FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Conceptos Básicos de Control Automático

" Respuestas Dinámicas "
"Sistemas de primero y segundo Orden"

Ing. Marcelo Adrián Bruno

Ing. Yaki Nachajon Schwartz

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMERO Y SEGUNDO ORDEN UN REPASO.

Hemos visto que un sistema dinámico no queda caracterizado por una constante numérica, sino que se describe por una ecuación diferencial, que relaciona las variables de entrada y salida del sistema.

Para un ingeniero de control es muy útil poder estimar las formas que puede tomar la variable de salida de un sistema, saber si será creciente o decreciente, rápida o lenta, si tendrá o no oscilaciones. Veamos cómo esta información se puede obtener con relativa facilidad de los coeficientes de la ecuación diferencial que modela el proceso que estamos analizando.

En la práctica, la situación más frecuente es encontrarse con sistemas dinámicos de primero y segundo orden. En otros casos, sistemas de orden mayor están formados por subsistemas más simples de primero y segundo orden. Por este motivo, es conveniente estar familiarizados con estos sistemas y con los parámetros que caracterizan su respuesta.

Recordemos que, en el caso general de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-2} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) = u(t)$$

la solución general, $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$, está constituida por las n soluciones independientes de la ecuación homogénea más una solución particular de la ecuación completa.

La ecuación homogénea describe la evolución del sistema desde una condición inicial cuando no hay señal de entrada $[u(t) = 0]$ y las soluciones homogénea son del tipo e^{rt} donde *"r"* es una constante.

Como $\frac{d^m e^{rt}}{dt^m} = r^m e^{rt}$

se tendrá $(r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n)\, e^{rt} = 0$
por lo que e^{rt} será una solución si se satisface la ecuación característica

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots\ a_{n-2}\, r^2 + a_{n-1} r + a_n = 0$$

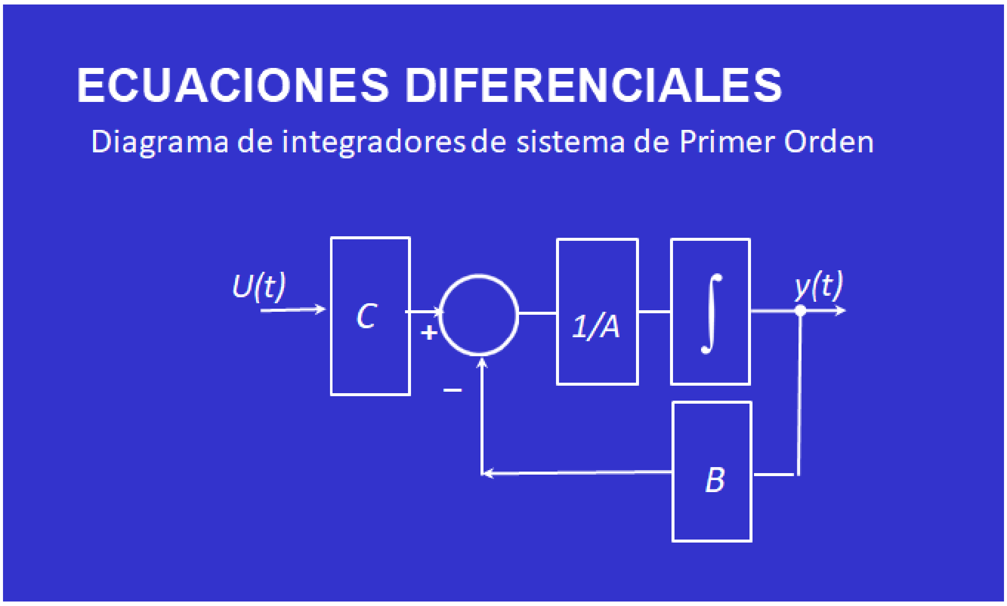
que también se puede escribir $(r - r_1)(r - r_2) \ldots\ldots (r - r_{n-1})(r - r_n) = 0.$

Si las n raíces son distintas se obtienen n soluciones independientes $e^{r_1 t}\ \ldots\ e^{r_n t}$

Analicemos esta solución en casos simples, para visualizar las formas posibles de la respuesta.

SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

La forma general es $A\frac{dy}{dt} + By(t) = C\,u(t)$, que corresponde a un diagrama de la forma



*) Ecuación Homogénea, $u(t) = 0$

En estas condiciones, la ecuación característica es $Ar + B = 0 \rightarrow r = -B/A$
y la salida de la homogénea es de la forma $y(t) = Ce^{-(B/A)\,t}$.
Vemos que la respuesta libre de un sistema de primer orden es de forma exponencial. Si *"B/A"* es positivo, $y(t)$ es decreciente; si *"B/A"* fuese negativo, resultaría una exponencial creciente.

**) Entrada constante, $u(t)= U_0$.
Si hay una señal de entrada constante , la salida $y(t)$ tiende hasta un valor final, también constante; cuando se llega al equilibrio, $dy/dt = 0$, de donde puede calcularse el valor final de $y = (C/A)\,U_0$.

Frecuentemente la ecuación diferencial de primer orden se suele presentar en forma ligeramente diferente, de modo que sus coeficientes se puedan relacionar más fácilmente con resultados experimentales. En lugar de la forma anterior

$$A\frac{dy}{dt} + By(t) = C\,u(t)$$

dividiendo por B resulta

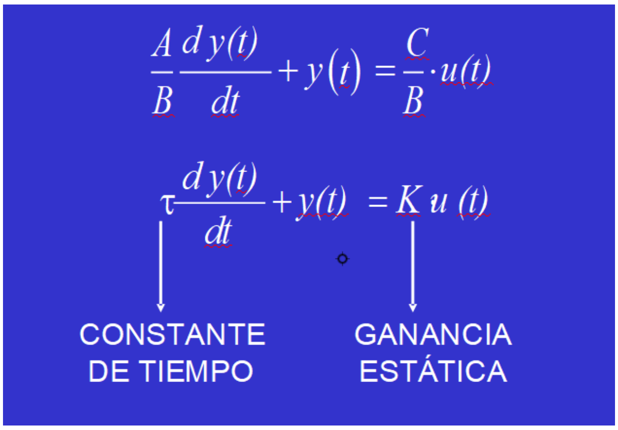
$$\left(\frac{A}{B}\right)\frac{dy}{dt} + y(t) = (C/B)\,u(t)$$
$$\tau\frac{dy}{dt} + y(t) = K\,u(t)$$

Al coeficiente $\tau = A/B$ se lo denomina la *constante de tiempo* del sistema y es un parámetro característico de los sistemas de primer orden.

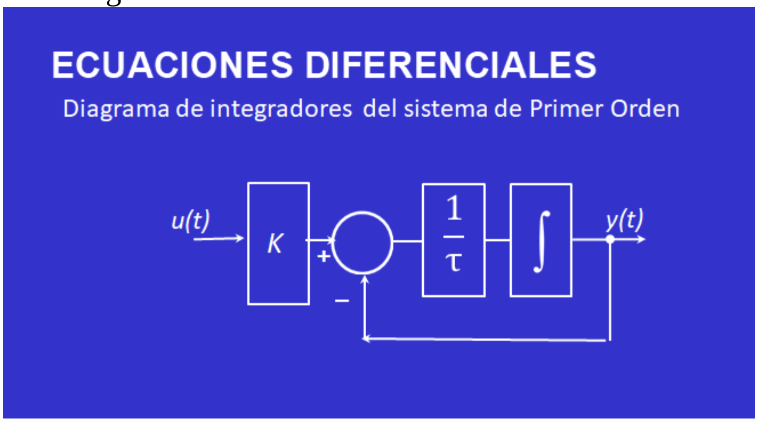
Al coeficiente K se lo puede interpretar como un factor de *ganancia entre salida y entrada, en estado estacionario.* Consideremos que ensayamos el sistema de primer orden con una entrada Uo constante y designemos por Y_{est} el valor que alcanza la salida cuando el sistema se estabiliza. En estas condiciones, $dy/dt = 0 \rightarrow Y_{est} = K\,U_0$

.

$$\Rightarrow \quad K = Yest\,/Uo$$



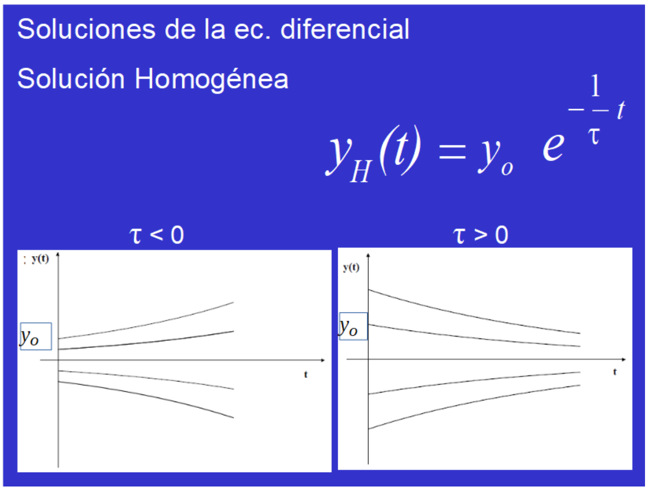
que corresponde a un diagrama de la forma



La salida de la solución de la ecuación homogénea $y(t)$ a partir de una condición inicial Yo resulta

$$y(t) = Yo\, e^{-(B/A)\,t} = Yo\, e^{-t/\tau}$$

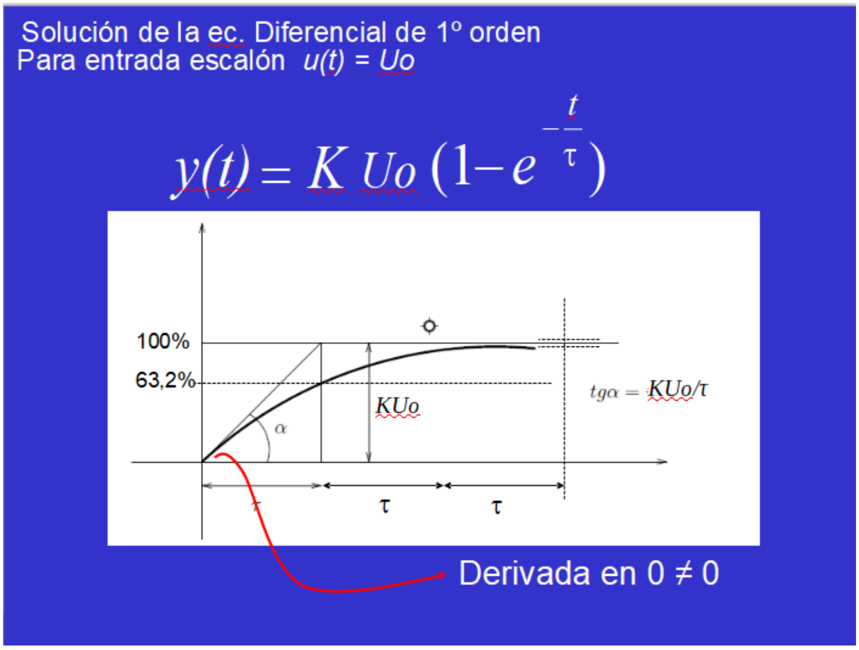
en el instante $t = \tau$ el valor de la salida es $Yo\, e^{-1} = 0.632\, Yo$



En la práctica, la constante de tiempo de un sistema de primer orden puede obtenerse aplicando una entrada constante Uo al sistema Como en el instante inicial y(0) = 0, de la ecuación diferencial se obtiene

$$\left.\frac{dy}{dt}\right]_{t=0} = \frac{Yest}{\tau}$$

que interpretamos geométricamente como la pendiente de la tangente a *y(t)* en el origen.
Si se prolonga la pendiente inicial hasta cortar la línea del valor final de la salida, el tiempo así determinado corresponde al coeficiente τ.



SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

Para sistemas de segundo orden, cuya forma general es

$$A\frac{d2y(t)}{dt2} + B\frac{dy(t)}{dt} + Cy(t) = Du(t)$$

también partimos de analizar la ecuación homogénea, formando la ecuación característica

$$Ar^2 + Br + C = 0$$

con raíces $r_1, r_2 = \frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$

pudiéndose presentar los siguientes casos:

(1) Si r_1 y r_2 son números reales y distintos (lo que ocurre cuando B^2-$4AC>0$), la solución de la homogénea es

$$y(t) = c_1\, e^{r1t} + c_2\, e^{r2t}$$

(2) Si $r_1 = r_2$, números reales iguales (lo que ocurre cuando B^2-$4AC=0$), la solución de la homogénea es

$$y(t) = c_1\, e^{r1t} + c_2\, te^{r2t}$$

(3) Si r_1 y r_2 son números complejos (lo que ocurre cuando B^2-$4AC<0$), la solución de la homogénea es

$$y(t) = c_1\, e^{r1t} + c_2\, e^{r2t}$$

donde ahora c_1, c_2, y también r_1, r_2 resultan complejos conjugados.

$$r_1, r_2 = \frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A} = \sigma \pm j\omega$$

$$c_1 = c\, e^{j\emptyset},\quad c_2 = c\, e^{-j\emptyset}$$

resultando

$$\begin{aligned} y(t) &= c\, e^{j\emptyset}\, e^{(\sigma+j\omega)t} + c\, e^{-j\emptyset}\, e^{(\sigma-j\omega)t} \\ &= c\, e^{\sigma t}\left\{e^{j\omega t+\emptyset} + e^{-(j\omega t+\emptyset)}\right\} = 2ce^{\sigma t}cos(\omega t) \end{aligned}$$

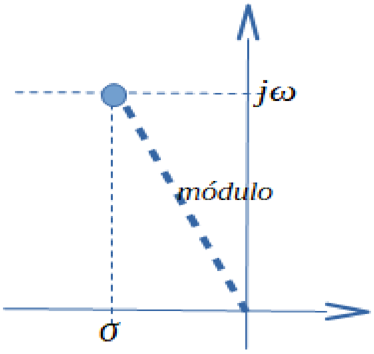
Aquí vemos que, según sean las raíces de la ecuación característica, las respuestas pueden ser:

- una suma de exponenciales
- una exponencial más una rampa afectada por un factor exponencial
- una senoide afectada por una exponencial.

En estas expresiones vemos que:

- el comportamiento exponencial está caracterizado por el factor $b/2a$; se lo conoce como factor de amortiguamiento, y la notación más generalizada es σ
- el término ω multiplica a la variable "tiempo" en el argumento de la senoidal, por lo que puede interpretarse como una frecuencia; se la denomina frecuencia amortiguada.

Como σ y ω son parte real e imaginaria de un número complejo, calculemos el módulo del mismo



,

$$modulo^2 = \sigma^2 + \omega^2 ,$$

$$\left(\frac{-B}{2A}\right)^2 + \frac{\sqrt{4AC-B^2}^2}{4A^2}$$

$$= \left(\frac{-B}{2A}\right)^2 + \frac{4AC-B^2}{4A^2} = \frac{C}{A}$$

La raíz de este valor se simboliza por ω_ny se denomina frecuencia natural o frecuencia no amortiguada del sistema

La relación entre el factor de amortiguamiento y la frecuencia natural define el *coeficiente* de amortiguamiento, $\varsigma = \sigma / \omega_n$ **,** Considerando ς como la proyección de ω_n sobre el eje real, se puede interpretar ς como el coseno del ángulo entre el vector y el eje real que, obviamente, es $0 < \varsigma < 1$.

A menores valores de ς , menor es la atenuación de la oscilación de frecuencia ω. En cambio, a medida que ς se aproxima a "1", la atenuación aumenta.

Podemos señalar que también la frecuencia de oscilación puede escribirse en términos de ω_n y σ.

$$\omega^2_n = \sigma^2 + \omega^2$$

$$\omega^2 = \omega^2_n - \sigma^2 = \omega^2_n (1 - \zeta^2)$$

$$\omega = \omega_n \sqrt{(1-\zeta^2)}$$

Basándonos en estas relaciones, y de un modo análogo a lo que vimos en sistemas de primer orden también en modelos dinámicos de segundo orden se acostumbra plantear la ecuación diferencial en términos relacionados con las características de la respuesta temporal.

Modelo de sistema de segundo orden

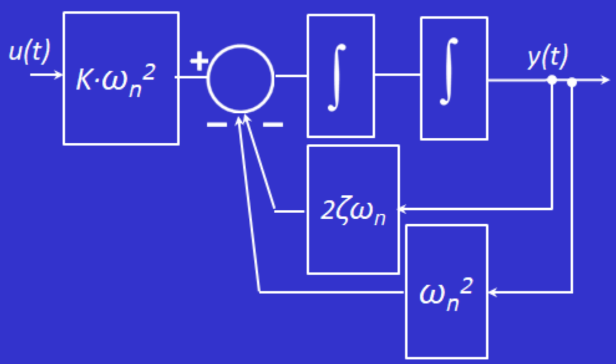
$$A\frac{d^2\, y(t)}{dt^2} + B\frac{d\, y(t)}{dt} + C y(t) = D\, u(t)$$

$$\frac{d^2\, y/t)}{dt^2} + \frac{B}{A}\frac{d\, y(t)}{dt} + \frac{C}{A}\, y(t) = \frac{D}{A}\, u\,(t)$$

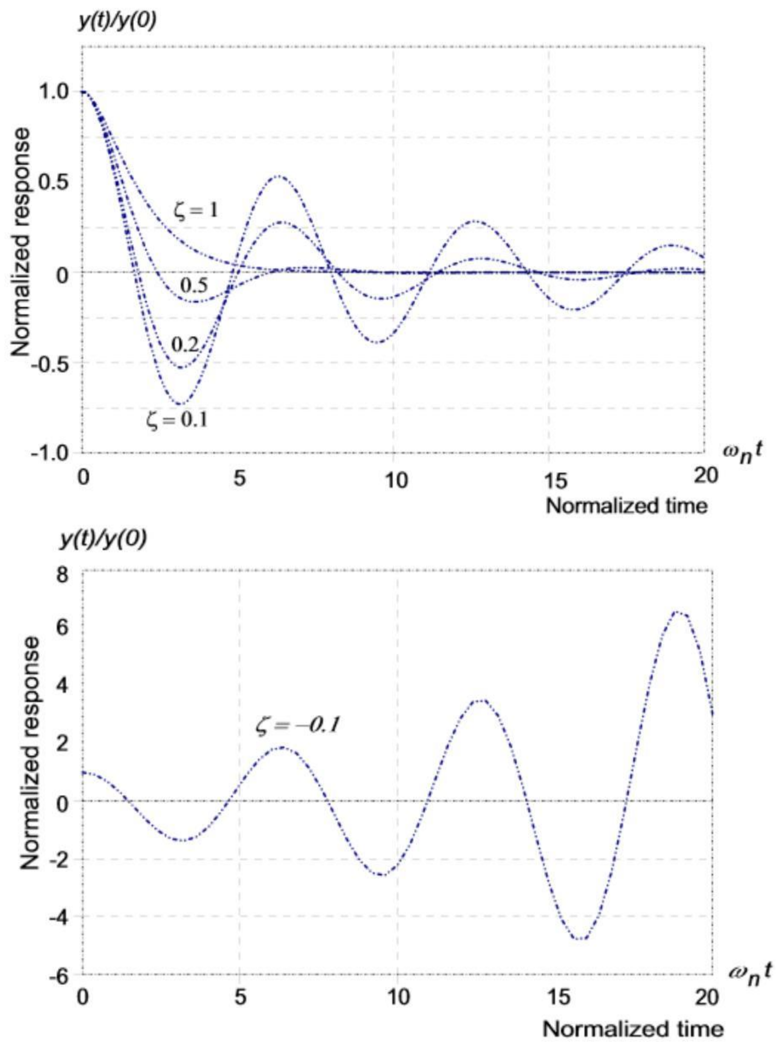
$$\frac{B}{A} = 2\,\xi\omega_n \qquad \frac{C}{A} = \omega_n^2 \qquad \frac{D}{A} = \frac{D}{C}\frac{C}{A} = K\,\omega_n^2$$

ECUACIONES DIFERENCIALES

Diagrama de integradores del sistema de Segundo Orden



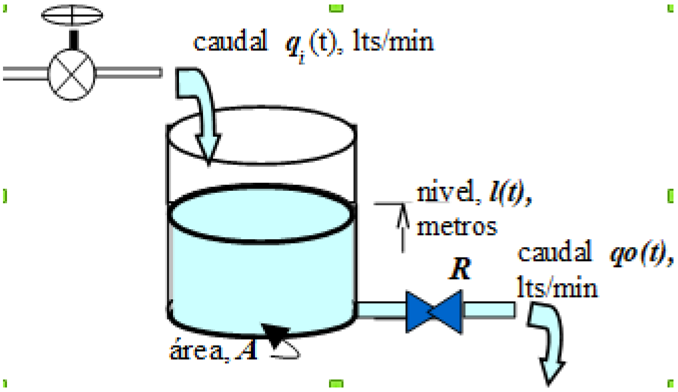
En el gráfico siguiente se muestra la respuesta libre del sistema, esto es sin entradas *(u(t) = 0)* y desde una condición inicial y_0, para distintos valores del coeficiente de amortiguamiento. Se muestran distintos casos de ς entre 0.1 y 1, y cómo sería una respuesta con ς < 0 .



MODELOS MATEMÁTICOS Y SISTEMAS FÍSICOS

Es interesante relacionar los coeficientes del modelo matemático con los parámetros del sistema físico que representa. Veamos dos ejemplos simples.

1) La figura muestra un depósito cilíndrico de área A, con una con variable de entrada *caudal* $q_i(t)$ y salida *nivel* $l(t)$. El caudal de descarga a través de la restricción R es proporcional al nivel l(t)



Las ecuaciones que describen este proceso son

$$A\frac{dl(t)}{dt}=q_i(t)-q_o(t)$$

$$q_o(t)=\frac{l(t)}{R}$$

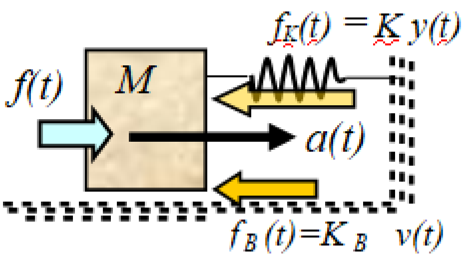
de donde

$$A\frac{dl(t)}{dt}+\frac{l(t)}{R}=q_i(t)$$

$$AR\frac{dl(t)}{dt}+\frac{l(t)}{R}=Rq_i(t)$$

Comparando con la forma general de la ecuación de primer orden, vemos que $\tau = A.R$. Esto indica que la rapidez de respuesta del sistema, dada por su constante de tiempo depende del área del tanque y del valor de la restricción. Por otra parte, esta restricción opera como una *ganancia estacionaria*, por lo que (si $q_i(t)$ es constante) se puede controlar mediante *R* el nivel de líquido al que se llega en equilibrio.

2) El sistema mecánico mostrado tiene un modelo matemático de segundo orden



$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2}=f(t)-f_B(t)-f_K(t)=f(t)-B.\frac{dy(t)}{dt}(t)-Ky(t)$$

que podemos escribir como

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2} + B.\frac{dy(t)}{dt}(t) + Ky(t) = f(t)$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{B}{M}.\frac{dy(t)}{dt}(t) + \frac{K}{M}y(t) = \frac{1}{M}f(t)$$

comparando con la forma standard de sistemas de segundo orden,
$\acute{y}(t)+2+2\zeta\omega_n\acute{y}(t) + \omega_n{}^2y(t) = (K\omega_n{}^2)\ u(t)$

podemos asociar el amortiguamiento del sistema con la relación entre la masa y la fricción presente, ya que $2\zeta\omega_n = B/M$. También vemos que, si el sistema oscila, lo hará a una frecuencia determinada principalmente por la relación entre la constante del resorte y la masa del sistema.

La ecuación anterior nos permite también construir un diagrama de simulación donde asociamos bloques matemáticos con parámetros físicos: valor de la masa, coeficiente de fricción, constante del resorte.