

GRADO DE HIPERESTATICIDAD

Antes de aventurarse al cálculo de solicitaciones y deformaciones en una estructura se debe verificar si la misma es [estáticamente determinada o estáticamente indeterminada](#).

La pregunta es si para poder determinar las reacciones de vínculo, alcanza con el simple planteo de ecuaciones de equilibrio o no.

Si es posible la determinación de reacciones de vínculo con el simple planteo de ecuaciones de equilibrio la estructura se denomina [estáticamente determinada o isostática](#). Se considera al lector suficientemente entrenado en la resolución de este tipo de estructuras.

En caso contrario la estructura se denomina [estáticamente indeterminada](#) y bajo este concepto es necesario analizar dos situaciones:

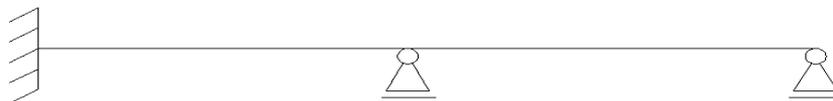
Cuando la estructura posee condiciones de vínculo, ya sea internas o externas, en menor número que las cinemáticamente necesarias o equivalentemente cuando el número de ecuaciones de equilibrio disponibles es mayor que el número de reacciones de vínculo a determinar. Es el caso de las estructuras consideradas hipostáticas y habitualmente denominadas [mecanismos](#). Estas estructuras son de uso habitual en [Ingeniería Mecánica](#) (ejes de máquinas por ejemplo).

Contrariamente cuando la estructura posee condiciones de vínculo, ya sea internas o externas, en mayor número que las cinemáticamente necesarias o equivalentemente cuando el número de ecuaciones de equilibrio disponibles es menor que el número de reacciones de vínculo a determinar, las estructuras se denominan [hiperestáticas](#) las cuáles conjuntamente con las estructuras isostáticas son de uso habitual en [Ingeniería Civil](#).

Las estructuras hiperestáticas son de estudio en el presente trabajo dando por sentado, como ya se dijo, que el lector conoce a la perfección el funcionamiento de las estructuras isostáticas.

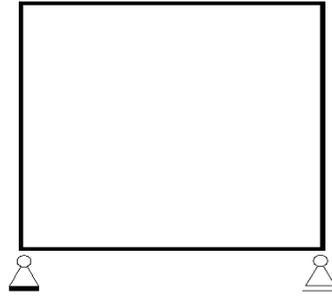
El estudio de una estructura hiperestática comienza por determinar cuál es su [grado de hiperestaticidad \(GH\)](#). A continuación se desarrollan algunos ejemplos:

Ejemplo 1



Se trata de una chapa que posee 3 grados de libertad, es decir que con 3 condiciones de vínculo bien dispuestas es suficiente para inmovilizarla. Al tener 5 condiciones de vínculo aplicadas (tres en el empotramiento y una por cada apoyo móvil) el grado de hiperestaticidad de la estructura será igual a dos ([GH=2](#)).

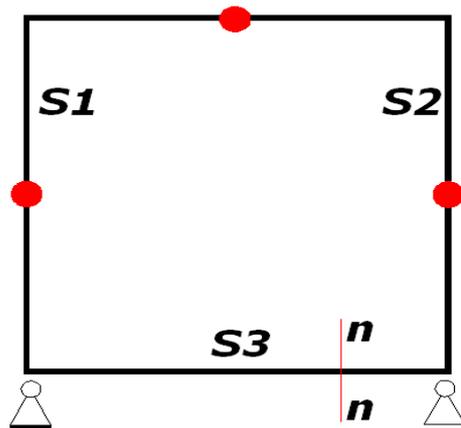
Ejemplo 2



Obsérvese que en primera instancia sería una estructura isostática, por lo menos en cuanto a la determinación de reacciones de vínculos externo, en consecuencia resultará el grado de hiperestaticidad por vínculo externo igual a 0 ($\text{GHVE}=0$).

La estructura a analizar independientemente de su vinculación exterior recibe el nombre de marco cerrado.

La estructura isostática más parecida al marco cerrado, que puede vincularse a tierra con tres condiciones de vínculo es la cadena cerrada de tres chapas .Gráficamente:



Si ahora se desea en esta cadena cerrada de tres chapas trazar diagramas de características será necesario abrir la misma por ejemplo en la sección n-n. En esta situación quedan en evidencia en dicha sección los esfuerzos internos; es decir, el momento flexor , el esfuerzo de corte y el esfuerzo normal. Para poder determinar dichos esfuerzos internos se dispone de tres ecuaciones de equilibrio relativo respecto de las tres articulaciones internas de la estructura.

Si idéntico proceso se quisiera desarrollar en el marco cerrado, los esfuerzos internos de la sección donde dicho marco es abierto quedan indeterminados ante la inexistencia de articulaciones internas. Por este motivo se concluye que: un marco cerrado posee un grado de hiperestaticidad por vínculo interno igual a 3 ($\text{GHVI} = 3$).

Obsérvese entonces que cuando es necesario determinar el grado de hiperestaticidad de una estructura es necesario establecer que:

$$\text{GH} = \text{GHVE} + \text{GHVI}$$

A efectos de clarificar ideas se analiza un ejemplo más complejo:

Ejemplo 3



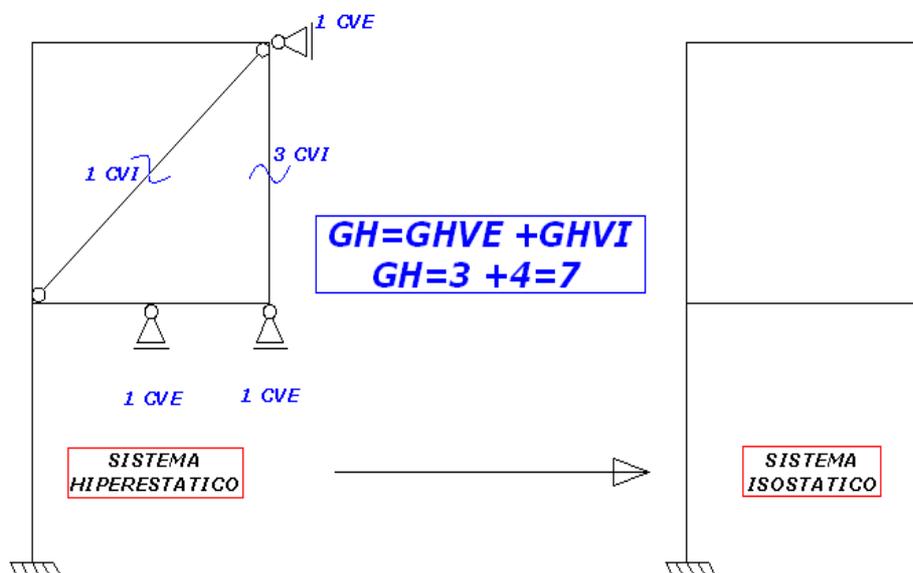
Obsérvese que en este caso será: $\text{GHVE}=9$ ya que la estructura posee 12 condiciones de vínculo externo de las cuáles cinemáticamente sólo son necesarias 3. En este caso resulta además $\text{GHVI}=18$ dada la existencia de seis marcos cerrados. Finalmente el GH de la estructura es:

$$\text{GH} = \text{GHVE} + \text{GHVI} = 9 + 18 = 27$$

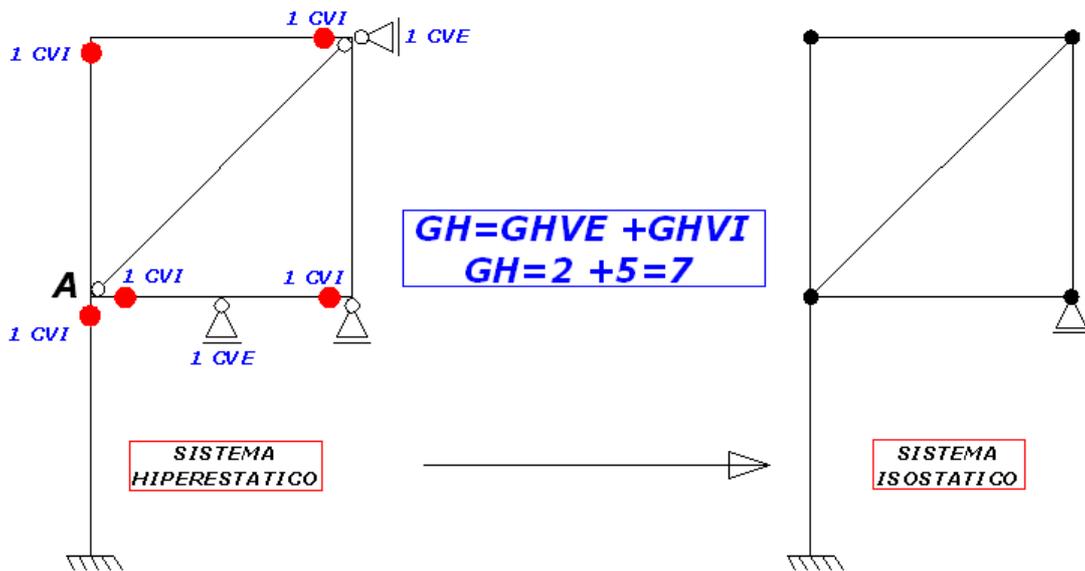
Métodos de determinación del Grado de Hiperestaticidad de una estructura.

Primer método: En este caso se transforma la estructura hiperestática en una estructura isostática determinando la cantidad de vínculos externos e internos que fueron necesarios suprimir en dicho procedimiento.

Ejemplo 4



Obsérvese que son variadas las maneras de obtener una estructura isostática derivada de la estructura hiperstática e inclusive se puede variar el balance entre GHVE y GHVI. Obviamente esta situación no puede alterar el GH de la estructura.

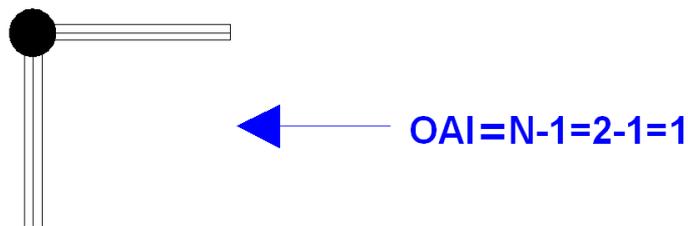


Para poder comprender mejor como ha sido transformado el sistema hiperestático en isostático en este caso, es necesario introducir el concepto de orden de una articulación interna (OAI) cuya expresión de cálculo es:

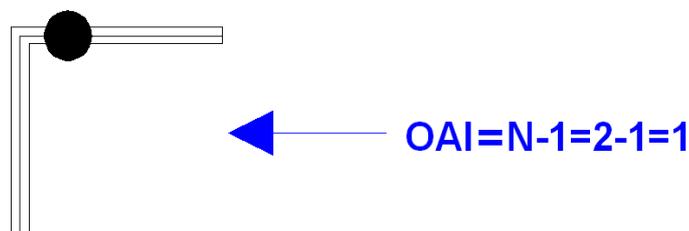
$$OAI = N - 1$$

Expresión en la cuál **N** es el número de barras que la articulación interna une.

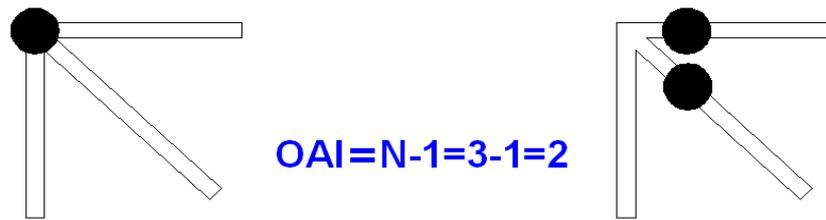
Por ejemplo:



Cuando una articulación une entre si dos barras la situación considerada es la de una barra que se articula a la otra. O sea, gráficamente :



Análogamente si ahora la articulación interna une entre si tres barras resulta:

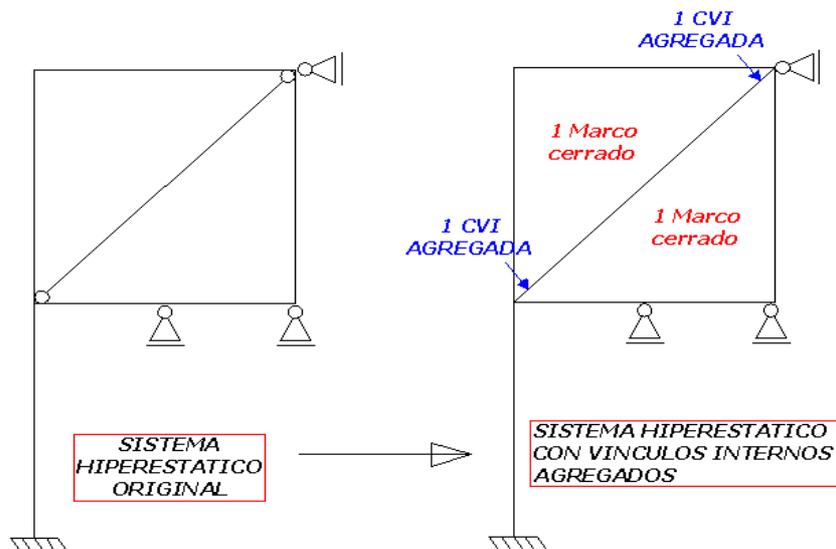


Analizando el tema desde el punto de vista estático el orden de una articulación interna coincide con el número de ecuaciones de equilibrio relativo que es posible plantear respecto de la misma.

Conocido el concepto de [orden de una articulación interna](#), resulta más sencillo entender como se ha derivado el sistema isostático a partir del sistema hiperestático en el ejemplo 4 en su segunda parte.

Segundo método: En este caso se plantea agregar a la estructura hiperstática condiciones de vínculo interno eliminando la existencia de articulaciones, con el objeto de obtener la mayor cantidad de marcos cerrados posibles (son mas sencillos de analizar) y luego descartar como incógnitas las reacciones de vínculo interno asociadas a dichos vínculos agregados.

Se analiza bajo este segundo método la estructura hiperstática del ejemplo 4.



Para transformar la estructura hiperstática original eliminando sus dos articulaciones internas ha sido necesario agregar dos condiciones de vínculo interno conformándose los dos marcos cerrados indicados en la figura. Si se recuerda que cada marco cerrado posee $GHVI=3$ resulta:

$$\begin{array}{l}
 \text{GHVE} = 3 \\
 \text{GHVI} = 2 \times 3 - 2 = 4 \\
 \text{GH} = \text{GHVE} + \text{GHVI} = 3 + 4 = 7
 \end{array}$$

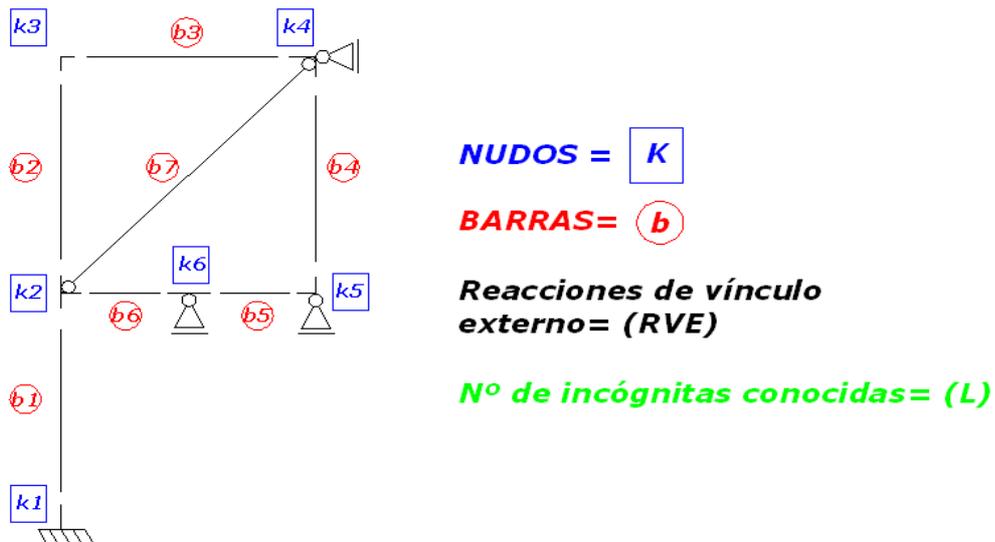
Condiciones de vínculo interno agregadas
 GHVI por cada marco cerrado
 N° de marcos cerrados

Verificándose como es lógico el grado de hiperestaticidad anteriormente obtenido.

Como puede observarse, este segundo método si bien permite determinar de manera más sencilla el GH de una estructura, no deja definida una estructura isostática derivada, hecho que debe ser considerado como una desventaja frente al primer método, dado que la estructura isostática derivada es necesaria para resolver la estructura hiperestática como se verá más adelante.

Tercer método: En este caso el grado de hiperestaticidad se determina mediante fórmula cuya obtención surge de plantear simplemente el balance entre incógnitas a determinar y ecuaciones disponibles. La expresión que se obtiene recibe el nombre de índice de vinculación (IV).

Se parte de la estructura analizada en el ejemplo 4 pero ahora discretizada en nudos y barras tal como se muestra:



El índice de vinculación será:

$$\boxed{IV = \text{Nº de incógnitas} - \text{Nº de ecuaciones}}$$

De forma que:

$$\begin{aligned}
 IV > 0 & \text{ Hiperestático} \\
 IV = 0 & \text{ Isostático} \\
 IV < 0 & \text{ Hipostático}
 \end{aligned}$$

Ahora bien, del balance resulta:

Nº de incógnitas

6 x barra (6b)
RVE

Nº de ecuaciones

3 x barra (3b)
3 x nudo (3k)
L

O sea:

$$IV = (6 \cdot b + RVE) - (3 \cdot b + 3 \cdot k + L)$$

$$\boxed{IV = 3 \cdot (b - k) + RVE - L}$$

Donde:

L = es el número disponible de ecuaciones de equilibrio relativo respecto de las articulaciones internas y como ya se explicó al desarrollar dicho tema será igual a la sumatoria del orden de estas últimas.

Para el ejemplo que se desarrolla será:

$$k=6 \quad b=7 \quad RVE=5 \quad L=2 \quad IV = 3(7-6)+6 -2=7$$

Se puede observar que el **IV** coincide, como era de esperar, con el **GH** anteriormente obtenido.

La fórmula del índice de vinculación debe utilizarse con mucho cuidado pues no permite detectar la existencia de vinculación aparente como así tampoco si la resolución de la estructura se encuentra condicionada al estado de cargas actuante. A continuación se ejemplifica:

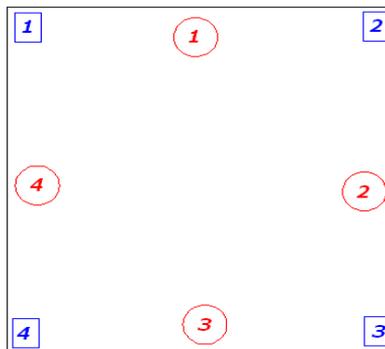
Ejemplo 5



$$k=2 \quad b=1 \quad RVE=3 \quad L=0 \quad IV = 3(1-2)+3 -0=0$$

Se puede observar que el **IV=0** indica que la estructura es isostática pero la expresión nada informa sobre la existencia de vinculación aparente.

Ejemplo 6



$$k=4 \quad b=4 \quad RVE=0 \quad L=0 \quad IV = 3(4 - 4)+0 -0=0$$

En este caso nuevamente resulta **IV=0** indicando que se trata de un isostático y en realidad la información es errónea ya que se trata de un sistema de resolución condicionada puesto que es necesario que la estructura se encuentre cargada con un sistema de fuerzas en equilibrio y bajo esa condición la misma presenta un **GHVI=3** por tratarse de un marco cerrado.
