Señales y Sistemas - 66.74

Práctica 6
Transformada Discreta de Fourier (DFT)

1 La Transformada Discreta y sus Propiedades

1. Calcular analíticamente y mediante la función FFT de Matlab las siguientes DFT's:

   (a) $x(n) = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$.

   (b) $x(n) = [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]$.

      i. Determinar la relación con la DFT de la secuencia 1a analíticamente.

      ii. Probar otros desplazamientos determinando si existe alguno distinto de cero tal que la DFT sea real.

      iii. Repetir para vectores de longitud 10.

   (c) $x(n) = [1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]$.

   (d) $x(n) = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$.

   (e) $x(n) = [1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1]$.

   (f) $x(n) = \dfrac{\sin(\pi n L/N)}{\sin(\pi n/N)}$ para $n = 0, \ldots, N-1$ y L impar.

2. Dada una secuencia $x(n)$ arbitraria de longitud $N = 10$ calcular su DFT y compararla con la DFT de la secuencia generada como

$$x_e(n) = \begin{cases} x(n/L) & \text{para } n = k\,L \\ 0 & \textit{resto} \end{cases}$$

   de longitud $N_e = 10L$. Encuentre además la relación entre ambas DFT's teóricamente, utilizando la definición de la DFT.

2 Autovectores y autofunciones de los sistemas LTI. Relación con la DFT

3. La DFT puede considerarse un cambio de base y por lo tanto puede escribirse como el producto de un vector fila por una matriz.

   (a) A partir de la expresión de la DFT determine esa matriz.

   (b) Los vectores columna de esa matriz forman una base ortogonal. Cuál es la expresión analítica de estos vectores?.

   (c) Cuál es la DFT de cada uno de estos vectores columnas y cuál es su IDFT? Relacione su respuesta con las DFT's obtenidas en los puntos 1a, 1b, 1c y 1d.

4. Sea la señal discreta de duración infinita $s(n) = A\cos(2\pi f_0 n/N)$, de la cual se disponen sólo de los N puntos correspondientes a $n = 0, \ldots, N-1$. Con esos puntos formamos una secuencia discreta de duración finita que denominaremos $x(n)$, que podemos asimilar a una señal *de duración infinita* igual a $s(n)$ en los puntos mencionados, y cero fuera de ellos. Una manera de expresar este hecho es decir que $x(n) = s(n)\,w(n)$, donde $w(n)$ es el pulso rectangular, que vale 1 si $n = 0, \ldots, N-1$ y cero en el resto. Este ejercicio intenta demostrar la utilidad de la DFT para encontrar la frecuencia de la (o las) señal. Se pide:

   (a) Suponiendo que f_0 es entero, grafique la señal $x(n)$ y su DFT de N puntos. Cómo puede leerse f_0 del gráfico de la DFT? Justifique su respuesta analíticamente. Justificar este cálculo desde el punto de vista del ejercicio 3. Puede leerse el valor de A del gráfico?

   (b) Suponga ahora que f_0 es un número no entero, y grafique la señal $x(n)$ y su DFT. Explique las diferencias con el caso anterior analíticamente. Pueden leerse f_0 y A en el gráfico de la DFT de N puntos? Podrían leerse en el gráfico si usáramos otra cantidad de puntos de DFT? Especifique qué condiciones debería cumplir f_0 para que sea posible.

   (c) Repetir las preguntas 4a y 4b si $s(n) = A\cos(2\pi f_0 n/N) + B\cos(2\pi f_1 n/N)$. En qué cambia esto respecto al caso de una sola componente de frecuencia? Discuta la utilidad de la multiplicación previa de la señal por una ventana (distinta de la rectangular).

5. Dada una secuencia de 64 valores definida por

$$x(n) = \cos\left(\frac{2\pi n}{64}\right) + \cos\left(\frac{16\pi n}{64}\right), n = 0, \ldots, 63$$

   y su DFT de 64 puntos $X(k)$, se forma una nueva secuencia $X_1(k)$ de 32 muestras definida por el submuestreo en 2 de su DFT:

$$X_1(k) = X(2k), n = 0, \ldots, 31$$

   (a) Hallar $x_1(n)$, la IDFT de $X_1(k)$.

   (b) Hallar otras dos secuencias $x(n)$ que por el mismo proceso también den la misma señal $x_1(n)$.

3 Relación de la DFT con la serie discreta de Fourier

6. (a) A partir de la fórmula de la DFT de una señal discreta $x(n)$ de duración N, hallar la relación con los coeficientes de la serie de Fourier de la señal $x(n)$ periodizada en N.

   (b) Relacione este resultado con el ejercicio 3

7. Para las señales de la figura 1 calcular y graficar los coeficientes de la serie de Fourier utilizando la DFT. Justificar el procedimiento. Contrastar los resultados con los obtenidos en el punto 4a de la Práctica 3.

8. Calcule y grafique nuevamente los coeficientes de la serie de Fourier para la señal a) de la figura 1 pero suponiendo que es un pulso de 5 muestras y período de repetición $N = 10$ y $N = 50$. Qué relación existe entre estas DFT's y la hallada en el punto anterior?

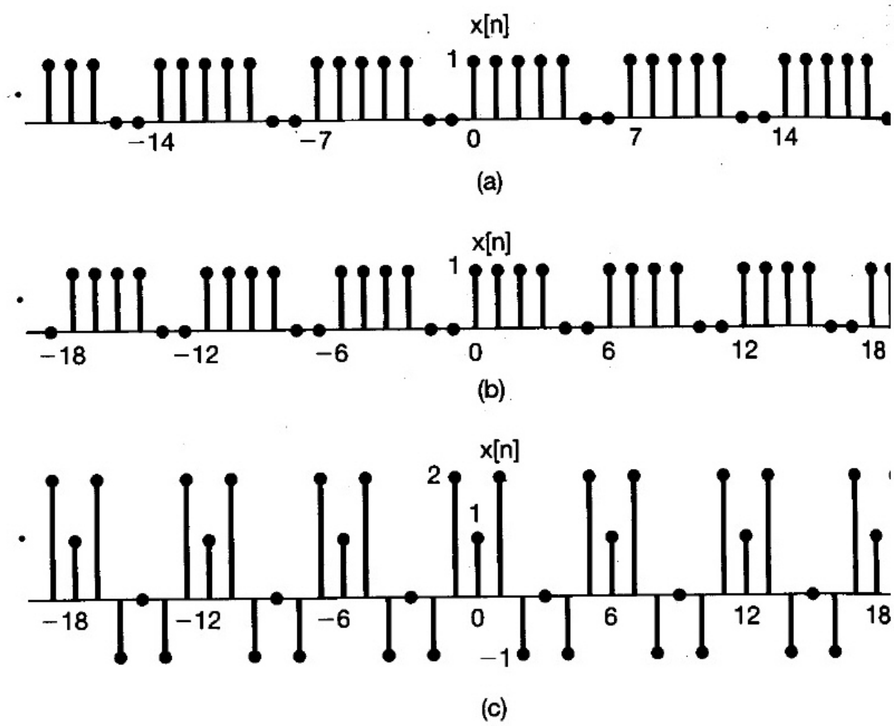

Figure 1: Ejercicio 7

4 Relación de la DFT con la Transfomada Continua de Fourier

9. Encuentre la relación entre $X(k)$, la DFT de una señal discreta y de duración finita $x(n)$, y la transformada Fourier de tiempo discreto $X(\Omega)$ de la misma señal, a partir de las fórmulas de ambas transformadas.

10. Conociendo la relación entre la DFT y la transformada (continua) de Fourier se desea obtener 100 muestras del espectro de la señal $x(n) = \sin(n\pi/32)/n$. Cuál es el procedimiento a seguir?

11. Hallar utilizando la DFT la respuesta en frecuencia de un sistema cuya respuesta impulsiva es:
    (a) $h(n) = u(n) - u(n-20)$.
    (b) $h(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$
    (c) Comparar los resultados con los hallados en el punto 6 de la Práctica 4.
    (d) Calcular mediante DFT la salida de los sistemas de los puntos 11a y 11b si su entrada es $x(n) = e^{j\frac{2\pi}{100}f_0\,n}$, con $f_0 = 3$ y $f_0 = 1.5$.

12. Encuentre la señal correspondiente a la IDFT de las muestras del espectro (continuo) de la señal discreta
$$x(n) = \sin(n\pi/32)/n$$
obtenidas en el punto 10. Grafique la señal obtenida de este modo, y encuentre la relación que tiene con $x(n)$.

13. Dadas las señales que se muestran en la figura 2

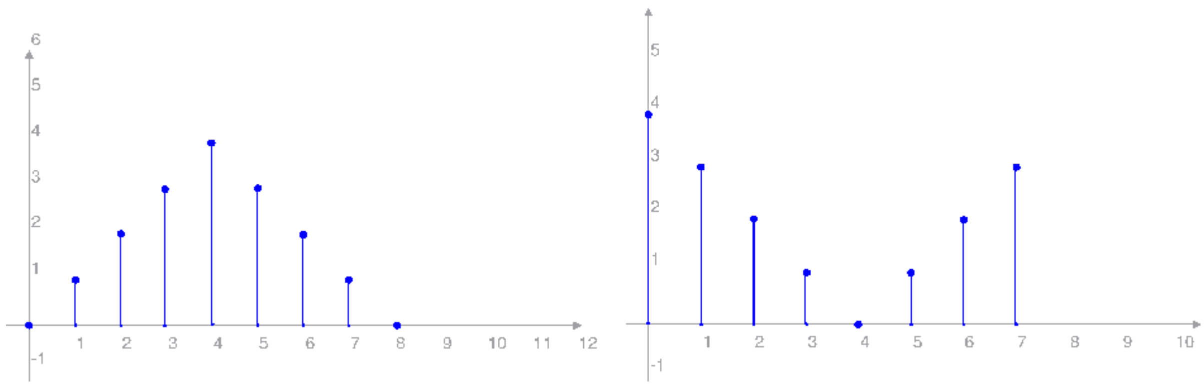

Figure 2: Ejercicio 13

(a) Conteste intuitivamente cuál de las dos señales tiene mayor energía en altas frecuencias.

(b) Calcule la transformada de Fourier continua de ambas señales suponiendo que los saltos son unitarios, es decir el mínimo valor es 0 y el máximo 4.

(c) Qué sucede si se quiere encontrar la respuesta en frecuencia a partir de la DFT de 8 muestras? Discutir el resultado.

5 Convolución lineal y circular utilizando la DFT

Según lo visto en las prácticas anteriores es posible obtener la salida de un sistema LTI calculando la Transformada de Fourier de la señal de entrada y de la respuesta impulsiva del sistema y antitransformando el producto de ambas. Es posible aplicar el mismo principio utilizando la transformada discreta en lugar de la continua? Los ejercicios siguientes muestran que sí es posible en algunos casos, pero tomando ciertas precauciones.

14. Dados dos pulsos discretos de duración N=8 y amplitud unitaria se pide:

    (a) Hallar analíticamente su convolución lineal. Simular el resultado mediante la función `conv` de Matlab.

    (b) Hallar analíticamente su convolución circular de 8 puntos. Cómo simularía este resultado en Matlab?

    (c) Utilizando DFT e IDFT describa la manera de obtener la convolución lineal de las dos señales propuestas. Simularlo en Matlab y compararlo con el obtenido en el punto 14a.

    (d) Periodizar la secuencia obtenida en el punto 14a con período N=8. Qué relación tiene con la secuencia obtenida en el punto 14b? Explique el resultado.

15. Dadas las señales:

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{para } n = 0, \ldots, 7 \\ 0 & \text{para otro } n \end{cases}$$

$$h(n) = \delta(n-8)$$

    (a) Encuentre analíticamente la señal $y(n) = x(n) * h(n)$.

    (b) Idem anterior pero utilizando DFT e IDFT. Qué cantidad de puntos tienen que tener dichas transformaciones? Verifique los cálculos utilizando Matlab.

16. Dadas dos secuencias de 4 puntos $x(n)$ y $h(n)$ definidas de la siguiente forma:

$$x(n) = \cos(n\pi/2), n = 0, 1, 2, 3$$

$$h(n) = 2^n, n = 0, 1, 2, 3$$

   (a) Determinar la DFT de 4 puntos $X(k)$ de la secuencia $x(n)$.
   (b) Calcular la DFT de 4 puntos $H(k)$ de la secuencia $h(n)$.
   (c) Calcular $y_1(n)$ como la convolución circular de 4 puntos de $x(n)$ con $h(n)$.
   (d) Calcular $y_2(n)$ como la IDFT de 4 puntos del producto de las DFTs $X(k)$ y $H(k)$.
   (e) Calcular la respuesta de un sistema cuya respuesta impulsiva es $h(n)$ cuando se le aplica a la entrada la secuencia $x(n)$. Qué relación guarda esta respuesta con la salida $y_2(n)$ hallada en el punto 16d?.

17. Dada la señal $x(n) = (1 + cos(n\pi/10))\, u(n)$

   (a) Hallar la salida para un sistema cuya respuesta al impulso es $h(n) = u(n) - u(n - 10)$. Qué tipo de filtrado realiza este sistema?
   (b) Qué precauciones hay que tomar para realizar el filtrado utilizando la DFT y la IDFT?
   (c) Hallar nuevamente la salida pero utilizando la función `filter`. Comparar los resultados.
   (d) Analizar intuitivamente cuál sería la salida si la respuesta al impulso del sistema fuera $h(n) = u(n) - u(n - 100)$. Verificar el resultado con Matlab.