

**CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS
DE LAS SECCIONES PLANAS**

La resistencia que opone una barra a los diferentes tipos de la deformación depende muchas veces no sólo de su material y tamaño sino también de las configuraciones del eje, la forma de las secciones transversales y su ubicación respecto a la dirección de las cargas que actúan. Examinemos las principales características geométricas de las secciones transversales de la barra abstrayéndonos de las propiedades físicas del objeto estudiado. Estas características son las siguientes: áreas de las secciones transversales, momentos estáticos, momentos de inercia, módulos de la sección, radios de giro.

§ 4. Momento estático de área. Centro de gravedad de área

Examinando una figura arbitraria (sección transversal de la barra) referida al sistema de coordenadas xOy (fig. 7), se puede componer una expresión, por analogía con la expresión para el momento de fuerza respecto a algún eje, para el momento de área que se denomina *momento estático*. Así, el producto de un elemento de área dF por la distancia y desde el eje Ox

$$dS_x = ydF$$

se llama momento estático del elemento de área respecto al eje Ox . Por analogía, $dS_y = x dF$ es el momento estático del elemento de área respecto al eje Oy . Sumando estos productos por toda el área, obtenemos *momentos estáticos de área* respecto a los ejes x e y :

$$S_x = \int_F y dF; \quad S_y = \int_F x dF. \quad (2.1)$$

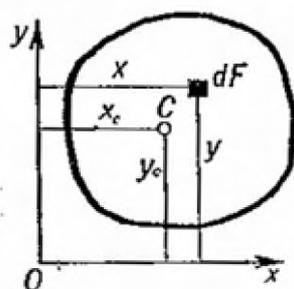


Fig. 7

La dimensión del momento estático es una unidad de longitud en cubo (por ejemplo, cm^3).

Supongamos que x_c e y_c son las coordenadas del centro de gravedad de la figura. Siguiendo la analogía con los momentos de fuerza, a base del teorema sobre el momento de la resultante se puede poner las siguientes expresiones:

$$S_x = Fy_c; \quad S_y = Fx_c; \quad (2.2)$$

donde F es el área de la figura.

Las coordenadas del centro de gravedad son

$$x_c = \frac{S_y}{F}; \quad y_c = \frac{S_x}{F}. \quad (2.3)$$

Para calcular momentos estáticos de una figura compuesta, ésta se divide en partes simples (fig. 8), cada una de las cuales tiene bien determinada el área (F_i) y la posición del centro de gravedad (x_i, y_i). Los momentos estáticos de toda la figura respecto a los ejes Ox y Oy serán, respectivamente, iguales a:

$$\left. \begin{aligned} S_x &= F_1 y_1 + F_2 x_2 + \dots + F_n y_n = \sum_{i=1}^{i=n} F_i y_i \\ S_y &= F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_n x_n = \sum_{i=1}^{i=n} F_i x_i \end{aligned} \right\} (2.4)$$

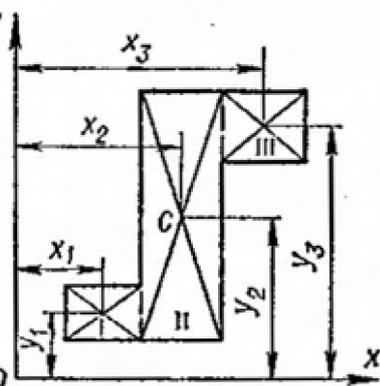


Fig. 8

A partir de las fórmulas (2.3) y (2.4) determinamos las coordenadas del centro de gravedad de la figura compuesta

$$x_c = \frac{S_y}{F} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} F_i x_i}{\sum_{i=1}^{i=n} F_i}; \quad y_c = \frac{S_x}{F} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} F_i y_i}{\sum_{i=1}^{i=n} F_i} \quad (2.5)$$

§ 5. Momentos de inercia de figuras planas

Se llama MOMENTO DE INERCIA AXIAL O ECUATORIAL del área de una figura la integral de los productos de los planos elementales por los cuadrados de su distancia al eje examinado. Así, los momentos de inercia de una figura arbitraria (fig. 9) respecto a los ejes x e y son iguales, respectivamente, a

$$J_x = \int_F y^2 dF; \quad J_y = \int_F x^2 dF. \quad (2.6)$$

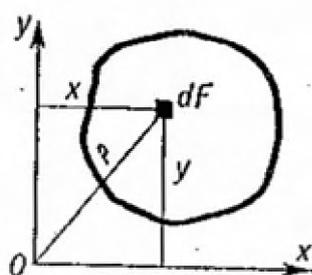


Fig. 9

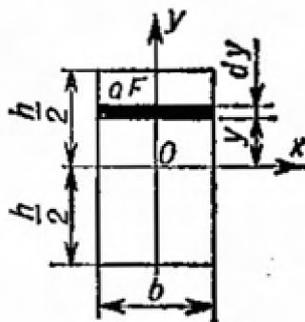


Fig. 10

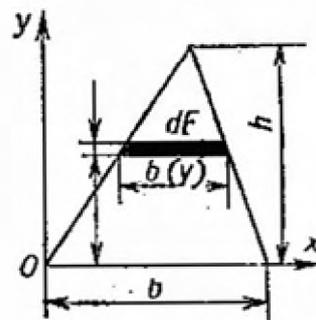


Fig. 11

Haciendo uso de estas fórmulas, calculemos los momentos de inercia para figuras elementales.

RECTÁNGULO (fig. 10). Teniendo en cuenta que el plano elemental $dF = bdy$, hallamos

$$J_x = \int_F y^2 dF = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12}.$$

Es obvio que

$$J_y = \frac{hb^3}{12}$$

TRIÁNGULO (fig. 11). Teniendo en cuenta que $b(y) = \frac{b}{h}(h - y)$, $dF = \frac{b}{h}(h - y)dy$, expresamos el momento de inercia respecto al eje x como

$$J_x = \int_F y^2 dF = \frac{b}{h} \int_0^h y^2 (h - y) dy = \frac{bh^3}{12}$$

SECTOR CIRCULAR (fig. 12). Teniendo en cuenta que $dF = \rho d\varphi d\rho$ e $y = \rho \sin \varphi$, determinemos el momento de inercia respecto al eje x :

$$J_x = \int_F y^2 dF = \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^r \rho^2 \sin^2 \varphi \rho d\varphi d\rho = \frac{r^4}{8} \left[(\beta - \alpha) - \frac{\sin 2\beta - \sin 2\alpha}{2} \right]$$

Se llama MOMENTO POLAR DE INERCIA de área de una figura respecto al punto dado (el polo O) la integral del producto de los planos elementales por los cuadrados de sus distancias ρ desde el polo (fig. 9):

$$J_p = \int_F \rho^2 dF \tag{2.7}$$

Si a través del polo está trazado un sistema de ejes x, y mutuamente perpendiculares, entonces $\rho^2 = x^2 + y^2$. De (2.6) y (2.7) se desprende que

$$J_p = J_x + J_y \tag{2.8}$$

CÍRCULO (fig. 13). Teniendo en cuenta que $dF = 2\pi\rho d\rho$, el momento polar de inercia será

$$J_p = \int_F \rho^2 dF = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\pi r^4}{2},$$

o bien

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

Es evidente de (2.8) que para el círculo

$$J_x = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi d^4}{64}$$

Hay que señalar que los valores de los momentos de inercia axiales y polares siempre son positivos.

Se denomina **MOMENTO DE INERCIA CENTRÍFUGO** la integral de los productos de los planos elementales por su distancia desde los ejes de coordenadas x, y :

$$J_{xy} = \int_F xy dF. \quad (2.9)$$

El momento de inercia centrífugo puede ser, según sea la posición de los ejes, positivo o negativo o igual a cero. Los ejes respecto a los cuales el momento

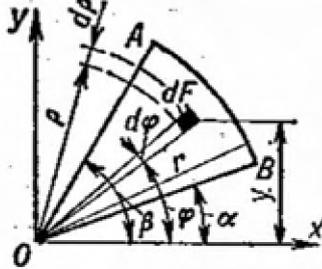


Fig. 12

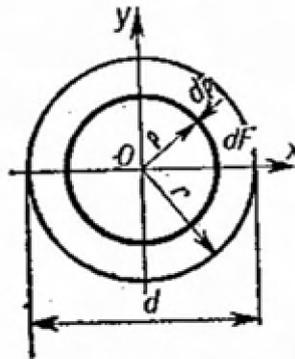


Fig. 13

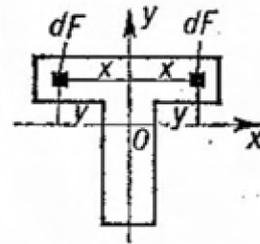


Fig. 14

de inercia centrífugo es igual a cero se denominan *ejes de inercia principales*. Dos ejes mutuamente perpendiculares, de los cuales por lo menos uno es el eje de simetría de la figura, serán sus ejes principales. Este hecho se deduce de lo siguiente: a cada valor positivo de $xy dF$ le corresponde igual valor negativo al otro lado del eje de simetría (fig. 14) y su suma por toda el área de la figura es igual a cero. Los ejes principales que pasan a través del centro de gravedad de la sección se denominan *ejes principales centrales*. La dimensión de los momentos de inercia es una unidad de longitud elevada a cuarta potencia (por ejemplo, cm^4).

§ 6. Momentos de inercia de secciones compuestas

Al calcular momentos de inercia de secciones compuestas, estas últimas se dividen, generalmente, en partes aisladas simples, cuyos momentos de inercia son conocidos. De la propiedad principal de la integral de la suma se deduce que el momento de inercia de la figura compuesta es igual a la suma de los momentos de inercia de sus partes integrantes. Determinemos el momento de inercia de una figura compuesta (fig. 15) respecto al *eje x* dividiéndola en las partes simples I, II, III que tienen respectivamente las áreas F_I, F_{II}, F_{III} :

$$J_x = \int_{F_I} y^2 dF + \int_{F_{II}} y^2 dF + \int_{F_{III}} y^2 dF;$$

o bien

$$J_x = J_x^I + J_x^{II} + J_x^{III}. \quad (2.10)$$

Hay que señalar que en el caso de que la sección tiene un orificio, es muy cómodo considerar éste una parte de la figura con área negativa. Así pues, el momento de inercia de la sección mostrada en la fig. 16 respecto al eje x , será

$$J_x = J_x^I - J_x^{II} = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi r^4}{4}.$$

§ 7. Momentos de inercia respecto a los ejes paralelos

Supongamos que son conocidos los momentos de inercia de la figura respecto a los ejes centrales x, y

$$J_x = \int_F y^2 dF; \quad J_y = \int_F x^2 dF; \quad J_{xy} = \int_F xy dF. \quad (2.11)$$

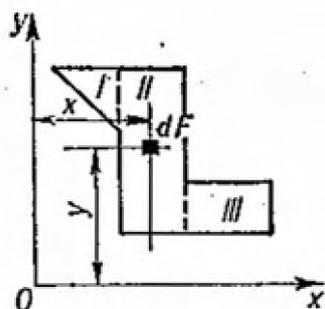


Fig. 15

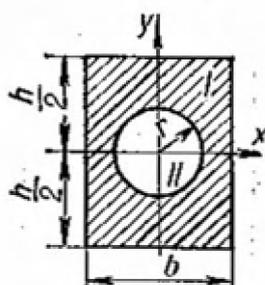


Fig. 16

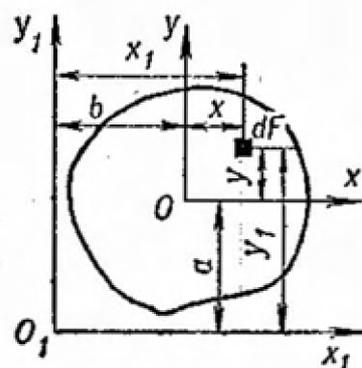


Fig. 17

Se necesita determinar los momentos de inercia respecto a los ejes x_1, y_1 que son paralelos a los centrales (fig. 17):

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2 dF; \quad J_{y_1} = \int_F x_1^2 dF; \quad J_{x_1 y_1} = \int_F x_1 y_1 dF. \quad (2.12)$$

Se puede expresar las coordenadas de cualquier punto en el sistema nuevo $x_1 O_1 y_1$ por medio de las coordenadas en el sistema anterior $x O y$ del modo siguiente:

$$x_1 = x + b; \quad y_1 = y + a. \quad (2.13)$$

Como los momentos estáticos de área respecto a los ejes centrales son iguales a cero, las fórmulas (2.12), tomando en consideración (2.13), pueden ser representadas definitivamente en la forma de

$$\left. \begin{aligned} J_{x_1} &= J_x + a^2 F; \\ J_{y_1} &= J_y + b^2 F; \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

$$J_{x_1 y_1} = J_{xy} + abF. \quad (2.15)$$

Por consiguiente: 1) el momento de inercia respecto a cualquier eje es igual al momento de inercia respecto al eje central, paralelo al dado, más el producto del área de la figura por el cuadrado de la distancia entre los ejes; 2) el momento de inercia centrífugo respecto a cualquier sistema de ejes rectangulares es igual al momento de inercia centrífugo respecto al sistema de ejes centrales, paralelos a los dados, más el producto del área de la figura por las coordenadas de su centro de gravedad referido a los ejes nuevos. Es necesario señalar que las coordenadas a, b que forman parte de la fórmula (2.15) se introducen tomando en consideración su signo.

§ 8. Dependencia entre los momentos de inercia durante el giro de los ejes de coordenadas

Supongamos que son conocidos los momentos de inercia de una figura arbitraria respecto a los ejes de coordenadas x, y (fig. 18):

$$J_x = \int_F y^2 dF; \quad J_y = \int_F x^2 dF; \quad J_{xy} = \int_F xy dF. \quad (2.16)$$

Se necesita determinar los momentos de inercia respecto a los ejes x_1, y_1 virados respecto a los ejes x e y a un ángulo α contra el sentido de las manecillas del reloj, considerando positivo el ángulo:

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2 dF; \quad J_{y_1} = \int_F x_1^2 dF; \quad J_{x_1 y_1} = \int_F x_1 y_1 dF. \quad (2.17)$$

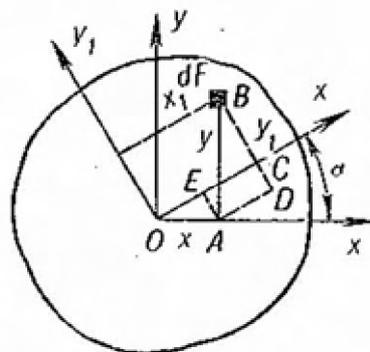


Fig. 18

Las coordenadas de un plano elemental arbitrario en el sistema nuevo ($x_1 O y_1$) pueden representarse por medio de las coordenadas del sistema anterior ($x O y$) del modo siguiente:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= OC = OE + AD = x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha; \\ y_1 &= BC = BD - EA = y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Hallamos definitivamente:

$$\left. \begin{aligned} J_{x_1} &= J_x \cos^2 \alpha + J_y \operatorname{sen}^2 \alpha - J_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha; \\ J_{y_1} &= J_y \cos^2 \alpha + J_x \operatorname{sen}^2 \alpha + J_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

$$J_{x_1 y_1} = J_{xy} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} (J_y - J_x) \operatorname{sen} 2\alpha. \quad (2.20)$$

Señalemos que las fórmulas (2.19) y (2.20) obtenidas durante el giro de cualquier sistema de ejes rectangulares son válidas, naturalmente, para los ejes centrales. Sumando (2.19) término a término, hallamos

$$J_{x_1} + J_{y_1} = J_x + J_y = J_p.$$

Es decir, durante el giro de los ejes rectangulares la suma de los momentos de inercia axiales no varía y es igual al momento de inercia polar respecto al origen de coordenadas.

Durante el giro del sistema de ejes a un ángulo $\alpha = 90^\circ$ obtenemos lo siguiente:

$$J_{x_1} = J_y; \quad J_{y_1} = J_x; \quad J_{x_1 y_1} = -J_{xy}.$$

§ 9. Determinación de la dirección de los ejes de inercia principales. Momentos de inercia principales

El mayor interés práctico lo representan los ejes principales centrales, respecto a los cuales los momentos de inercia centrífugos son iguales a cero. Deno-

temos los ejes principales centrales por las letras u, v . Es obvio que

$$J_{uv} = 0.$$

Para determinar la posición de los ejes principales centrales de una figura asimétrica arbitraria es necesario hacer girar los ejes centrales x, y a tal ángulo α_0 (fig. 19), para el cual el momento de inercia centrífugo respecto a la posición nueva de los ejes será igual a cero

$$J_{x_1 y_1} = J_{uv} = 0.$$

De la fórmula (2.20) obtenemos

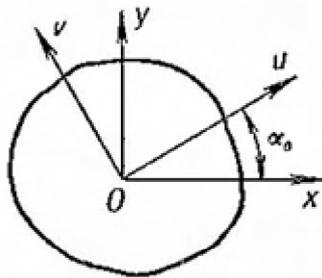


Fig. 19

$$J_{x_1 y_1} = J_{xy} \cos 2\alpha_0 - \frac{J_y - J_x}{2} \sin 2\alpha_0 = 0,$$

de donde

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}. \quad (2.21)$$

Los dos valores del ángulo α_0 , obtenidos de la fórmula (2.21), difieren 90° uno de otro y determinan la posición de los ejes principales. Como se ve fácilmente, el menor de estos ángulos por el

valor absoluto no sobrepasa de $\frac{\pi}{4}$. Generalmente se utiliza el ángulo menor.

El eje principal, trazado bajo este ángulo (positivo o negativo), se designa, generalmente, con la letra u . Hagamos recordar que el ángulo negativo α_0 se coloca a partir del eje x en el sentido de las manecillas del reloj.

En la fig. 20 pueden verse algunos ejemplos de la denotación de los ejes principales de acuerdo con la regla señalada. Los ejes iniciales están designados

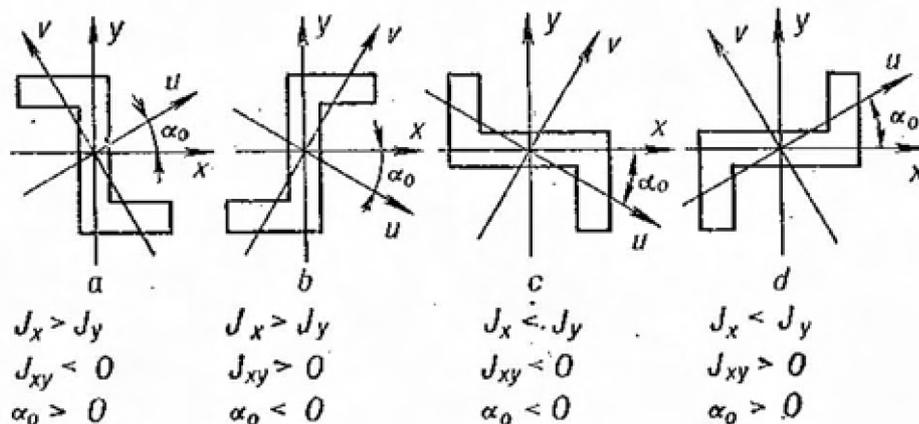


Fig. 20

con las letras x e y . Los valores de los momentos de inercia principales pueden obtenerse de las fórmulas generales (2.19), tomando $\alpha = \alpha_0$:

$$\left. \begin{aligned} J_u &= J_x \cos^2 \alpha_0 + J_y \sin^2 \alpha_0 - J_{xy} \sin 2\alpha_0; \\ J_v &= J_y \cos^2 \alpha_0 + J_x \sin^2 \alpha_0 + J_{xy} \sin 2\alpha_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

Sumemos y restemos las últimas expresiones. Considerando (2.21) tenemos lo siguiente:

$$J_u + J_v = J_x + J_y;$$

$$J_u - J_v = (J_x - J_y) \cos 2\alpha_0 - 2J_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha_0 = (J_x - J_y) \frac{1}{\cos 2\alpha_0}.$$

Solucionando las últimas ecuaciones juntas respecto a J_u y J_v , obtenemos

$$\left. \begin{aligned} J_u &= \frac{1}{2} \left[(J_x + J_y) + (J_x - J_y) \frac{1}{\cos 2\alpha_0} \right]; \\ J_v &= \frac{1}{2} \left[(J_x + J_y) - (J_x - J_y) \frac{1}{\cos 2\alpha_0} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Está claro que cuando $J_x > J_y$, $J_u > J_v$.

Tomando en consideración, de acuerdo con (2.21), que

$$\frac{1}{\cos 2\alpha_0} = \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0} = \pm \sqrt{1 + \frac{4J_{xy}^2}{(J_x - J_y)^2}},$$

las expresiones (2.23) para los momentos principales pueden escribirse en la forma de

$$\left. \begin{aligned} J_u &= \frac{1}{2} \left[(J_x + J_y) \pm \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2} \right]; \\ J_v &= \frac{1}{2} \left[(J_x + J_y) \mp \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2} \right], \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

además los signos superiores deben tomarse cuando $J_x > J_y$, y los inferiores, cuando $J_x < J_y$.

De esta manera, las fórmulas (2.21), (2.23) y (2.24) permiten determinar la posición de los ejes principales y el valor de los momentos de inercia principales centrales.

Ahora, si en vez del sistema inicial arbitrario de ejes centrales xOy se toma el sistema de ejes principales, las fórmulas de transición a los ejes virados (2.19) y (2.20) se simplifican:

$$\left. \begin{aligned} J_{x_1} &= J_u \cos^2 \alpha + J_v \operatorname{sen}^2 \alpha; \\ J_{y_1} &= J_v \cos^2 \alpha + J_u \operatorname{sen}^2 \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

$$J_{x_1 y_1} = \frac{1}{2} (J_u - J_v) \operatorname{sen} 2\alpha. \quad (2.26)$$

Hagamos notar que los momentos de inercia principales tienen la propiedad de extremalidad. Es fácil convencerse de ello, diferenciando la expresión (2.19) por la variable α .

3. Para una sección tubular con diámetro interior d y exterior D :

$$W_x = W_y = W = \frac{J_x}{D/2} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4), \quad (2.35)$$

siendo

$$\alpha = \frac{d}{D}. \quad (2.36)$$

Se llama **MÓDULO POLAR DE LA SECCIÓN** la relación del momento de inercia polar a la distancia desde el polo hasta el punto más alejado de la sección:

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{\text{máx}}}. \quad (2.37)$$

Se toma por polo el centro de gravedad de la sección de la barra.

1. Para un círculo (fig. 13):

$$W_p = \frac{J_p}{r} = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16}. \quad (2.38)$$

2. Para una sección tubular

$$W_p = \frac{J_p}{D/2} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4). \quad (2.39)$$

§ 12. Orden del cálculo

Al hacer el análisis de las características geométricas de figuras planas de cualquier complejidad el problema más importante consiste en determinar la posición de los ejes principales y los valores de los momentos de inercia principales. Puede recomendarse el siguiente orden de determinación de la posición de los ejes principales y de los valores de los momentos de inercia principales centrales de un perfil complejo, compuesto de partes simples, cuyas características son fáciles de determinar.

1. Trazamos un sistema de ejes rectangulares arbitrario. Dividimos la figura en partes simples y determinamos según (2.5) la posición de su centro de gravedad.

2. Trazamos el sistema inicial de ejes centrales x , y de tal manera que se pueda calcular con mayor facilidad los momentos de inercia de las partes de la figura respecto a estos ejes. Con este propósito determinamos los momentos de inercia de las partes de la figura respecto a sus propios ejes centrales trazados paralelamente a los ejes x , y , utilizando las fórmulas (2.14) y (2.15) de transición a los ejes paralelos. De tal manera obtenemos los valores de J_x , J_y y J_{xy} .

3. Determinamos por (2.21) el ángulo de inclinación de los ejes principales centrales, designando con la letra u el eje trazado bajo el ángulo menor (positivo o negativo), y con la letra v , el eje perpendicular a éste.

4. Por las fórmulas (2.24) determinamos los valores de los momentos de inercia principales centrales J_u y J_v .