

11. SOLICITACIÓN POR FLEXIÓN SIMPLE

11. 1. Conceptos generales

En el capítulo 8 designamos con el nombre de flexión simple, a la forma de sollicitación para la cual la reducción al baricentro de la sección considerada de las fuerzas que actuaban a uno y otro lado de la misma, se limitaba a dos pares normales al plano de aquélla, con o sin esfuerzo de corte. En el primer caso estábamos ante una sollicitación de *flexión pura* y en el segundo, en una de *flexión y corte*.

Como se verá en lo que sigue, desde el punto de vista de la determinación de las tensiones normales que se originan en las secciones sollicitadas por flexión simple cualquiera sea su forma, el planteo del problema es el mismo, por lo que deduciremos a continuación las relaciones que vinculan a los pares flexores con las tensiones que originan, para el caso de flexión pura.

Designaremos con el nombre de plano de flexión al plano en que actúan los pares flexores y línea de fuerzas a la traza de dicho plano con el plano de la sección.

En el estudio de la flexión simple pueden presentarse dos casos:

- a) que la línea de fuerzas coincida con uno de los ejes principales de inercia de la sección;
- b) que tal línea forme un cierto ángulo α con ese eje.

En el primer caso estamos ante una sollicitación por flexión simple normal y en el segundo, por flexión simple oblicua. Ambas formas de sollicitación las analizaremos en detalle en los párrafos siguientes.

Primeramente nos ocuparemos de la flexión pura normal, para hacerlo luego con la flexión simple oblicua, y finalmente desarrollaremos la flexión normal combinada con esfuerzos de corte, todo ello dentro de lo que hemos denominado régimen elástico, eso es, suponiendo que las tensiones que se desarrollan no superan el valor del límite de fluencia del material, sea éste definido o convencional.

Finalmente nos ocuparemos del problema de la flexión simple en régimen plástico, es decir cuando la sollicitación de la sección es de una magnitud tal que el valor de la tensión, en por lo menos un punto de la misma, sobrepasa el límite de fluencia del material.

11.2. Flexión pura normal

Sea (fig. 11.1) una sección F de un sólido de alma llena, solicitada por un par flexor de momento M que en ella origina tensiones. Suponemos que la línea de fuerzas coincide con uno de los ejes principales de inercia de la sección.

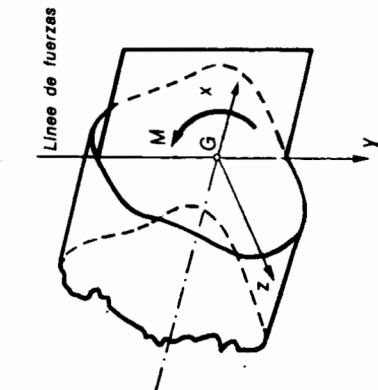


Fig. 11.1

Por ser nulos los esfuerzos de corte y normal, las ecuaciones de equivalencia [8.6], [8.7] en el caso que nos ocupa tienen las siguientes expresiones:

$$\left. \begin{aligned} \int_F \sigma_x dF &= 0 \\ \int_F \tau_{xy} dF &= 0 \\ \int_F \tau_{xz} dF &= 0 \\ \int_F (\tau_{xy} z + \tau_{xz} y) dF &= 0 \\ \int_F \sigma_x z dF &= 0 \\ \int_F \sigma_x y dF &= M \end{aligned} \right\} [11.1]$$

Estas expresiones por sí solas no resuelven el problema que nos interesa, es decir, el establecimiento de una relación funcional entre la sollicitación externa, el momento flexor, y las tensiones que el mismo origina en la sección, sino que es necesario recurrir a hipótesis relativas al comportamiento de la sección, suficientemente exactas y verificadas experimentalmente.

Como hemos dicho antes, analizaremos primeramente el problema de la flexión en régimen elástico; supondremos que nos encontramos dentro de los límites de validez de la ley de Hooke, y que admitimos proporcionalidad entre tensiones y deformaciones específicas.

Como hipótesis fundamental de la flexión admitiremos la de Bernoulli-Navier que establece que en la flexión, las secciones normales al eje de la pieza se mantienen planas a través de las deformaciones y giran en torno a un eje denominado eje neutro, que pertenece a la sección.

Al mantenerse planas¹ las secciones, no pueden originarse distorsiones en los elementos de la misma y en consecuencia por ser $\tau = \gamma G$ no existen tensiones tangenciales.

Por esta razón, la 2a., 3a. y 4a. de las [11.1] resultan idénticamente nulas, restando solamente las tres expresiones en que aparece la tensión normal σ_x .

Consideremos ahora dos secciones consecutivas 1-1 y 2-2 de una barra de eje rectilíneo, sujeta a flexión pura, separadas de una distancia unitaria y donde

¹ Como veremos más adelante, esta premisa no es cierta para el caso en que exista esfuerzo de corte, pero sí suficientemente exacta para los fines prácticos.

sobre cada sección actúan pares opuestos de momento M . Por tratarse de flexión normal, la línea de fuerzas coincide con uno de los ejes principales de inercia de la sección con el que también superpondremos el eje y de una terna cuyo eje z se corresponda con el eje neutro $n-n$, que forma un ángulo β con la línea de fuerzas.

De acuerdo con la hipótesis de Bernoulli-Navier, las secciones giran en torno a ejes y y se mantienen planas. Para nuestro estudio supondremos fija la sección 1-1 y consideraremos la rotación relativa de la sección 2-2 (fig. 11.2 a) con respecto a la 1-1.

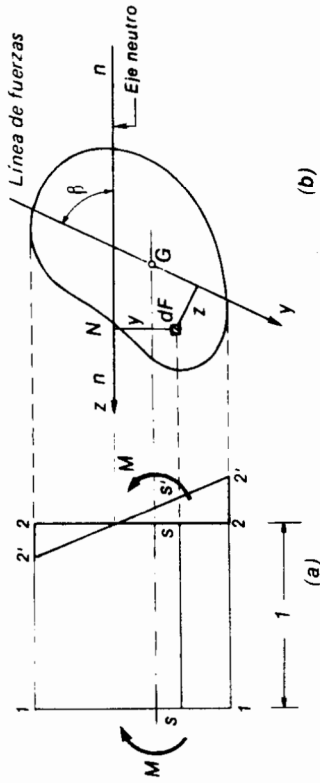


Fig. 11.2

Designaremos en lo que sigue como *fibra* al tubo elemental engendrado por un elemento de superficie al trasladarse entre dos secciones cualesquiera.

Una fibra cualquiera $s-s$ experimentará un alargamiento o un acortamiento según su posición en la sección que, por ser su longitud original unitaria, corresponderá directamente al alargamiento específico ϵ . Como puede observarse, al mantenerse planas las secciones, los alargamientos de las distintas fibras varían linealmente en función de su distancia al eje neutro.

Si llamamos ϵ_x al alargamiento de las fibras situadas a una distancia unitaria del eje neutro, el correspondiente a las fibras situado a la distancia y será:

$$\epsilon_x = y \epsilon_x \quad [11.2]$$

y, de acuerdo con la ley de Hooke, la tensión σ que corresponde a las fibras situadas a la distancia y será:

$$\sigma_x = E \epsilon_x = E y \epsilon_x \quad [11.3]$$

y llamando $\bar{\sigma} = E \bar{\epsilon}_x$, tenemos finalmente:

$$\sigma_x = y \bar{\sigma} \quad [11.4]$$

Reemplazando el valor de σ_x dado por la [11.4] en las 1a, 5a y 6a de las expresiones [11.1] resulta:

$$\left. \begin{aligned} \int_F y \bar{\sigma} dF &= 0 \\ \int_F y z \bar{\sigma} dF &= 0 \\ \int_F y^2 \bar{\sigma} dF &= M \operatorname{sen} \beta \end{aligned} \right\} \quad [11.5]$$

o también por ser $\bar{\sigma} = \text{cte}$:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma} \int_F y dF &= 0 \\ \bar{\sigma} \int_F y z dF &= 0 \\ \bar{\sigma} \int_F y^2 dF &= M \operatorname{sen} \beta \end{aligned} \right\} \quad [11.6]$$

Analizando las dos primeras expresiones, vemos que por ser $\bar{\sigma}$ distinta de cero, debe necesariamente ser:

$$\left. \begin{aligned} \int y dF &= 0 \\ \int y z dF &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [11.7]$$

La primera, por tratarse de un momento estático nulo, nos dice que el eje z , coincidente con el eje neutro debe, necesariamente, ser baricéntrico, y la segunda, que es la expresión del momento centrífugo de la sección respecto de los ejes z e y , establece que ambos son conjugados de inercia.

Ahora bien, el eje y coincide con la línea de fuerzas, y el z con el eje neutro, además por tratarse de flexión normal, el eje y es principal de inercia. En consecuencia, para la flexión pura normal se cumple que:

- 1) el eje neutro es baricéntrico;
- 2) el eje neutro es conjugado de inercia de la línea de fuerzas, y como ésta coincide con un eje principal de inercia, ambos ejes son normales, y se tiene $\beta = 90^\circ$.

Estamos ante la situación que muestra la figura 11.3c, donde hemos representado el diagrama que nos da la variación de las tensiones normales sobre la sección. Este diagrama es lineal y afín al diagrama que aparece en la

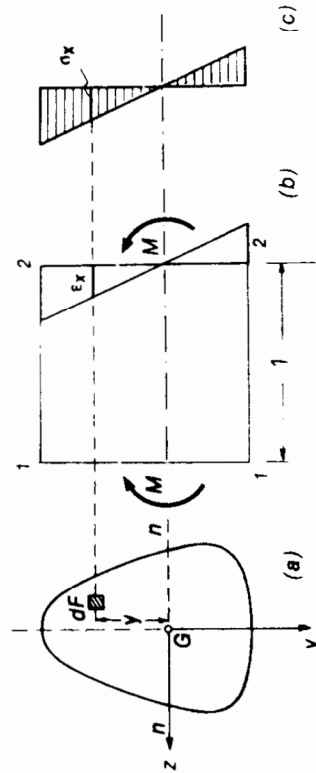


Fig. 11.3

figura 11.3b, relativo a la variación de las deformaciones específicas de las fibras, que también es lineal.

Falta establecer la relación que vincula al par flexor con las tensiones normales σ_x y con las características geométricas de la sección.

Para ello recurrimos a la tercera de las [11.6] donde la integral representa el momento de inercia de la sección respecto del eje neutro, y por ser $\beta = \frac{\pi}{2}$:

$$\bar{\sigma} J_n = M. \quad [11.8]$$

Reemplazando $\bar{\sigma}$ por su valor de la [11.4]:

$$\frac{\sigma_x}{y} J_n = M, \quad [11.9]$$

y finalmente:

$$\sigma_x = \frac{M}{J_n} y, \quad [11.10]$$

que nos da el valor de la tensión σ_x producida por el par flexor M en las fibras situadas a una distancia y del eje neutro.

La observación de la figura 11.3 nos dice que, para el par de pares con los sentidos que aparecen en ella y que corresponden a un momento flexor positivo (por definición), las fibras ubicadas *por encima* del eje neutro experimentan acortamientos, mientras que las situadas *por debajo* se alargan. Consecuentemente, las tensiones normales originadas serán respectivamente de compresión (negativas) o de tracción (positivas), y por ser J_n una magnitud positiva, para el par de ejes coordenados adoptados cuando M es positivo, σ_x tiene el signo de y . Si, en cambio, prescindimos del signo de y y consideramos solamente su valor absoluto, la expresión de σ_x en función del momento flexor será:

$$\sigma_x = \pm \frac{M}{J_n} y. \quad [11.11]$$

Resulta evidente que, de todos los valores de σ_x que se originan en la sección, interesan los mayores, y por ser las tensiones proporcionales a su distancia al eje neutro, resulta que las tensiones máximas ocurrirán en las fibras más alejadas de aquél. Llamaremos $\sigma_{\text{máx.}}$ la máxima tensión positiva, y $\sigma_{\text{mín.}}$ la máxima negativa, eso es, la tensión cuyo valor es el que más se aleja del anterior. Si y_1 e y_2 son las distancias de las fibras más alejadas del eje neutro (fig. 11.4) las expresiones que nos dan los valores correspondientes de las tensiones son:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\text{máx.}} &= + \frac{M}{J_n} y_1 \\ \sigma_{\text{mín.}} &= - \frac{M}{J_n} y_2 \end{aligned} \right\} \quad [11.12]$$

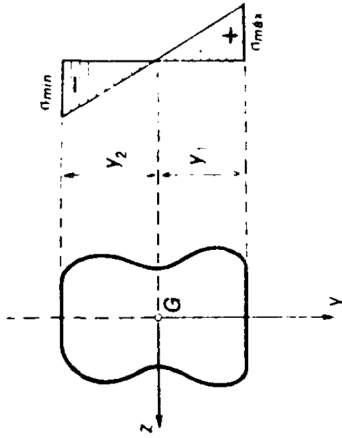


Fig. 11.4

Cuando la sección es tal que el eje neutro es a la vez eje de simetría resulta:

$$y_1 = y_2 = y_{\text{máx.}} \quad [11.13]$$

y en consecuencia:

$$|\sigma_{\text{máx.}}| = |\sigma_{\text{mín.}}| \quad [11.14]$$

transformándose las [11.12] en la siguiente expresión única:

$$\sigma_{\text{máx.}} = \pm \frac{M}{J_n} y_{\text{máx.}} \quad [11.15]$$

Si hacemos:

$$\frac{J_n}{y_{\text{máx.}}} = W \quad [11.16]$$

donde W resulta ser una magnitud cuya dimensión es el cubo de una longitud (cm³ por ejemplo), la [11.15] se transforma en:

$$\sigma_{\text{máx.}} = \pm \frac{M}{W} \quad [11.17]$$

W se conoce como *módulo resistente* de la sección.

Puede también extenderse el concepto de módulo resistente al caso de secciones cuyo eje neutro no sea eje de simetría.

Por ejemplo, si en las [11.12] hacemos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{J_n}{y_1} &= W_1 \\ \frac{J_n}{y_2} &= W_2 \end{aligned} \right\} \quad [11.18]$$

se transforman en:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\text{máx.}} &= + \frac{M}{W_1} \\ \sigma_{\text{mín.}} &= - \frac{M}{W_2} \end{aligned} \right\} \quad [11.19]$$

donde los valores W_1 y W_2 , representan módulos resistentes para las zonas de tracción y compresión respectivamente.

La fórmula de la flexión, en cualquiera de sus dos expresiones:

$$\sigma_{\text{máx.}} = \pm \frac{M}{J_n} y_{\text{máx.}} = \pm \frac{M}{W} \quad [11.20]$$

nos permite resolver dos problemas de suma importancia:

- a) el dimensionado de secciones solicitadas a flexión;
- b) la verificación de una sección determinada.

De ambos problemas nos ocuparemos a continuación.

11.2.1. Dimensionado de secciones

El dimensionado de una sección sujeta a flexión es un problema fundamental del cálculo de estructuras. Consiste en determinar las dimensiones de una sección dada, de modo que las tensiones normales que se originan, no superen los valores admisibles que establecen los reglamentos pertinentes para el tipo de estructura de que se trate, para el destino de ésta y la naturaleza del material empleado.

Debemos distinguir entre los materiales cuya resistencia es la misma a la tracción que a la compresión, y aquellos en que ambas resistencias son distintas. Al primer caso corresponde el acero y, en general, los materiales dúctiles, y al segundo los frágiles, que normalmente poseen mayor resistencia a la compresión que a la tracción.

En el caso de la madera, la resistencia varía según sea la dirección de las tensiones con respecto a la de las fibras, pero se acostumbra a tomar un valor de la tensión admisible sin diferenciar si es de compresión o de tracción.

Para secciones de acero, en la fórmula de flexión puede prescindirse del signo, por cuanto las tensiones admisibles a tracción y a compresión son iguales.

Si se trata de proyectar una sección solicitada por un momento flexor dado M , sus características geométricas deben ser tales que la tensión normal máxima sea igual o menor que la admisible, es decir:

$$\sigma_{\text{máx.}} = \frac{M}{J_n} y_{\text{máx.}} \leq \sigma_{\text{adm.}} \quad [11.21]$$

Si la sección es simétrica respecto del eje neutro y está constituida por un material de igual tensión admisible a tracción que compresión, tendremos:

$$\sigma_{\text{adm.}} = \frac{M}{W_{\text{nec.}}}, \quad [11.22]$$

o también:

$$W_{\text{nec.}} = \frac{M}{\sigma_{\text{adm.}}} \quad [11.23]$$

El módulo resistente W es función de las características geométricas de la sección. A continuación daremos las expresiones de W correspondientes a distintas secciones de uso corriente.

1ª) Sección cuadrada

a) Con respecto a un eje baricéntrico paralelo a un lado:

$$W = \frac{J}{a/2} = \frac{2a^4}{12a} = \frac{a^3}{6} \quad [11.24]$$

b) Con respecto a un eje baricéntrico paralelo a una diagonal:

$$W = \frac{2J}{\sqrt{2}a} = \frac{2a^4}{\sqrt{2}12a} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 \quad [11.25]$$

2ª) Sección rectangular de base b y altura h

Con respecto a un eje baricéntrico paralelo a la base:

$$W = \frac{2J}{h} = \frac{2bh^3}{12h} = \frac{bh^2}{6}. \quad [11.26]$$

3ª) Sección circular llena

Con respecto a un diámetro

$$W = \frac{2J}{D} = \frac{\pi D^3}{32}. \quad [11.27]$$

4ª) Sección circular hueca

$$W = \frac{2J}{D_2} = \frac{2\pi(D_2^4 - D_1^4)}{64D_2} = \frac{\pi D_2^3}{32} \left(1 - \frac{D_1^4}{D_2^4}\right) \quad [11.28]$$

Determinado el valor necesario de W , si la sección responde a uno de los tipos anteriores, se determinan sus dimensiones como sigue:

1ª) Sección cuadrada

$$a = \sqrt[3]{6 W_{\text{nec.}}} \quad [11.29]$$

2ª) Sección circular llena

$$D = \sqrt[3]{\frac{32 W_{\text{nec.}}}{\pi}} \quad [11.30]$$

3ª) Sección circular hueca

En este caso es necesario establecer *a priori* la relación de sus diámetros. Si llamamos α a dicha relación, es decir si:

$$\alpha = \frac{D_1}{D_2}, \quad [11.31]$$

resulta, para el valor del diámetro externo:

$$D_2 = \sqrt[3]{\frac{32 W_{\text{nec.}}}{\pi(1 - \alpha^4)}} \quad [11.32]$$

4ª) Sección rectangular

En este caso el problema tiene dos incógnitas: b y h , por lo que es necesario establecer *a priori* una relación entre ambas magnitudes.

La sección rectangular sujeta a flexión se utiliza principalmente en vigas de madera o de hormigón. El proyecto y cálculo de estas últimas cuando son armadas, escapa a los alcances de la presente obra.

En cuanto a las de madera, las escuadrías comunes responden a relaciones de lados iguales generalmente a 1:3 ó 1:4. Generalizando llamaremos β a la relación base/altura:

$$\beta = \frac{b}{h}, \quad [11.33]$$

en consecuencia, $b = \beta h$ y reemplazando en [10.26]:

$$W = \frac{\beta h^3}{6} \quad [11.34]$$

de donde:

$$h = \sqrt[3]{\frac{6 W_{\text{nec.}}}{\beta}} \quad [11.35]$$

La expresión [11.20] nos dice que, para un determinado valor del momento flexor, la tensión máxima será tanto menor cuanto mayor sea el momento de inercia de la sección con respecto al eje neutro.

Para secciones de igual área, el momento de inercia respecto de un eje baricéntrico será tanto mayor cuanto más alejada de aquél se encuentre distribuida la superficie de la sección. Por ello ha dado origen a los denominados "perfiles laminados" de acero, o también "perfiles normales", utilizados en construcciones metálicas tanto civiles como mecánicas y navales.

Existen numerosos tipos de perfiles laminados, los que se encuentran normalizados en lo que respecta a sus dimensiones. Estos perfiles aparecen tabulados en los principales manuales de Ingeniería¹, y en dichas tablas, aparte de las dimensiones de la sección, se dan las coordenadas del baricentro, los momentos de inercia, módulos resistentes y radios de giro respecto de dos ejes ortogonales y de los ejes principales de inercia.

Los tipos de sección más comunes son los que muestra la figura 11.5 y cuyas designaciones son:



Fig. 11.5

a) perfil doble T; b) perfil U; c) perfil L de alas desiguales; d) perfil L de alas iguales; e) perfil Z y f) perfil Grey o *Differingau*, o también doble T de alas anchas, todos ellos constituidos por un *alma*, vertical, de pequeño espesor, y una o dos *alas*, según el caso, horizontales, dispuestas en los extremos del alma.

¹ Véase, p. ej. Hütte, *Manual del Ingeniero*, Stahl im Hochbau, Foerster: *Estrática de las Construcciones*; Schleicher, *Manual del Ingeniero*, etc.

De este modo se consigue aumentar el momento de inercia de la sección, con un área reducida.

El cálculo directo o de proyecto de la sección, se realiza como sigue. Determinado mediante la expresión [11.23] el $W_{\text{nec.}}$, y elegido un tipo de perfil normal, se busca en la tabla correspondiente el número de perfil cuyo módulo resistente sea igual o mayor que el necesario, de modo que se cumpla:

$$W \geq W_{\text{nec.}} \quad [11.36]$$

y con ello se tiene resuelto el problema.

En ciertos casos especiales interesa un máximo aprovechamiento del material, por razones económicas, de modo que es necesario proyectar la pieza, o elemento constructivo o mecánico, de forma tal que para todas las secciones la máxima tensión normal sea igual a la tensión admisible. Ello conduce a piezas de sección variable por que, salvo el caso de sollicitación por flexión pura, el momento flexor varía de sección a sección y, consecuentemente, de acuerdo con la [11.23] al variar M , también varía $W_{\text{nec.}}$ y con él las dimensiones de la sección.

A título de ejemplo, analizaremos a continuación una viga de sección rectangular empotrada en su extremo y sujeta a dos casos distintos de carga:

- 1) carga concentrada P en el extremo libre, y
- 2) carga distribuida q sobre toda la luz de la viga (fig. 11.6).

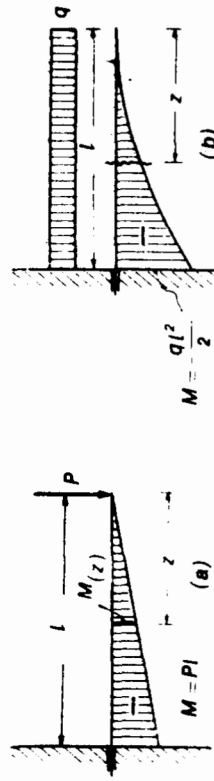


Fig. 11.6

En el caso (a), para una sección ubicada a una abscisa z del extremo libre tenemos:

$$M(z) = -Pz. \quad [11.37]$$

Teniendo en cuenta que para la sección rectangular:

$$W = \frac{bh^2}{6}, \quad [11.38]$$

reemplazando en la [11.23] resulta:

$$\frac{b h^2}{6} \frac{M(z)}{\sigma_{adm.}} = \frac{Pz}{\sigma_{adm.}} \quad [11.39]$$

$$b h^2 = 6 \frac{Pz}{\sigma_{adm.}} \quad [11.40]$$

de donde:

En este caso se presentan dos posibilidades, a saber: que se mantenga constante el ancho y varíe la altura, o la situación inversa, que se mantenga h y varíe el ancho de la sección.

La primera variante conduce a:

$$h_{(z)} = \sqrt{\frac{6 Pz}{b \sigma_{adm.}}}, \quad [11.41]$$

y la segunda a:

$$b_{(z)} = \frac{6 Pz}{h^2 \sigma_{adm.}}. \quad [11.42]$$

En el primer caso la altura varía en función de una parábola de grado $\frac{1}{2}$ y en el segundo, la variación del ancho es lineal.

Para el caso (b) tenemos:

$$M(z) = -\frac{q z^2}{2}, \quad [11.43]$$

de donde:

$$\frac{b h^2}{6} = \frac{q z^2}{2 \sigma_{adm.}}. \quad [11.44]$$

Si mantenemos constante b , la variación de la altura es:

$$h_{(z)} = \sqrt{\frac{3 q}{b \sigma_{adm.}}} \cdot z \quad [11.45]$$

es decir, lineal. En cambio, si mantenemos constante la altura, resulta:

$$b_{(z)} = \frac{3 q}{h^2 \sigma_{adm.}} \cdot z^2, \quad [11.46]$$

o sea, parabólica.

11.2.2. Verificación de secciones

En ciertos casos, conocidas la forma y las dimensiones de una sección y además el valor del momento flexor que la solicita, es necesario verificar si la máxima tensión normal supera o no el valor de la tensión admisible. Como en este caso se conoce el módulo resistente de la sección, sea por cálculo previo partiendo de su forma y dimensiones, o se lo obtenga de tablas (caso de perfiles

laminados), aplicamos directamente las fórmulas [11.19] o [11.21] según el caso, obteniendo el valor de $\sigma_{máx.}$ que debe resultar:

$$\sigma_{máx.} \leq \sigma_{adm.} \quad [11.47]$$

Otro caso que suele presentarse es aquel para el cual, dada una determinada sección de un cierto material, se pide determinar el máximo valor del momento flexor que es capaz de soportar sin sobrepasar en ningún punto la máxima tensión admisible. En este caso, como conocemos el módulo resistente de la sección y la tensión admisible, de la [11.23] despejamos:

$$M_{adm.} = \sigma_{adm.} \cdot W. \quad [11.48]$$

Analizaremos a continuación el caso de la sección cuadrada, para la cual, si bien el momento de inercia respecto de cualquier eje baricéntrico es constante, no ocurre lo mismo con el módulo resistente.

Sea, por ejemplo, la sección cuadrada de lado a de figura 11.7, sujeta a un mismo momento flexor M cuya línea de fuerzas coincide en un caso con el eje vertical paralelo a un lado (a) y en el otro, con una diagonal (b).

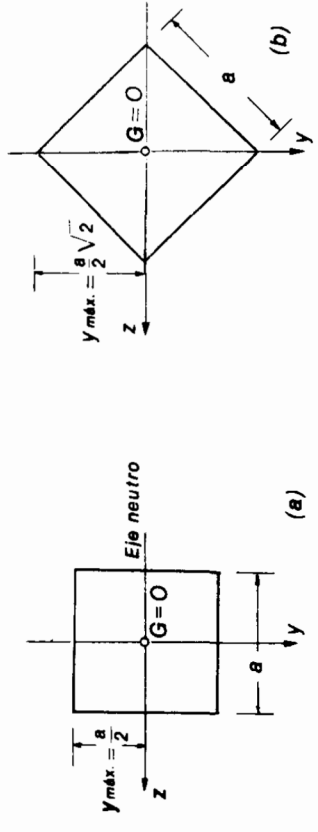


Fig. 11.7

Para ambos casos:

$$J_n = \frac{a^4}{12}, \quad [11.49]$$

pero los valores de los módulos resistentes varían, teniendo:

caso a

$$W = \frac{a^3}{6}, \quad [11.50]$$

caso b

$$W = \frac{2a^4}{12\sqrt{2}a} = \frac{a^3}{6\sqrt{2}}, \quad [11.51]$$

y las correspondientes tensiones máximas:

caso a

$$\sigma'_{\text{máx.}} = \pm \frac{6M}{a^3}, \quad [11.52]$$

caso b

$$\sigma''_{\text{máx.}} = \pm \frac{6\sqrt{2}}{a^3} M. \quad [11.53]$$

La relación entre ambas tensiones resulta ser:

$$k = \frac{\sigma'_{\text{máx.}}}{\sigma''_{\text{máx.}}} = \sqrt{2} \cong 1.41, \quad [11.54]$$

es decir que, para la sección cuadrada, cuando la línea de fuerzas coincide con una de las diagonales, la tensión máxima de flexión resulta ser 41% mayor que si aquella coincide con un eje paralelo a un lado.

Consideremos nuevamente la sección cuadrada, dispuesta en forma que la línea de fuerzas coincide con una diagonal (fig. 11.8).

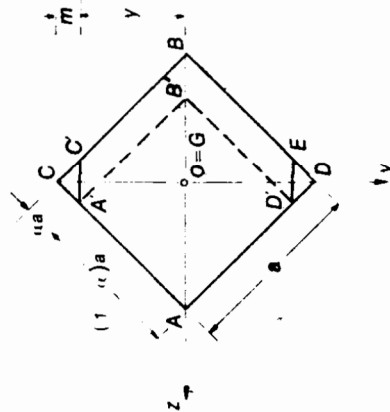


Fig. 11.8

El momento de inercia de la sección $AA'CED'$, con los vértices C y D cortados, con respecto del eje z (fig. 11.8) es igual a la suma de los momentos de inercia del cuadrado $AA'B'D'$ y de los paralelogramos $A'C'BB'$ y $BB'D'E$, estos últimos iguales entre sí.

Llamando αa la parte del lado que se suprime, con la notación de la figura resulta:

$$J_z = \frac{a^4}{12} (1 - \alpha)^4. \quad [11.55]$$

$$J_z'' = \frac{2}{3} \sqrt{2} \alpha a \left[\frac{a}{2} \sqrt{2} (1 - \alpha) \right]^3 = \frac{a^4}{3} \alpha (1 - \alpha)^3, \quad [11.56]$$

y finalmente:

$$J_z = \frac{a^4 (1 - \alpha)^3}{12} [4\alpha + (1 - \alpha)] = \frac{a^4}{12} (1 + 3\alpha) (1 - \alpha)^3. \quad [11.57]$$

El valor correspondiente del módulo resistente es:

$$W = \frac{J_z}{y} = \frac{a^4}{12y} (1 + 3\alpha) (1 - \alpha)^3, \quad [11.58]$$

y como:

$$y = \frac{a(1 - \alpha)\sqrt{2}}{2}, \quad [11.59]$$

resulta:

$$\left. \begin{aligned} W &= \frac{2a^4 (1 + 3\alpha) (1 - \alpha)^3}{12a(1 - \alpha)\sqrt{2}} \\ W &= \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 (1 + 3\alpha) (1 - \alpha)^2 \end{aligned} \right\} \quad [11.60]$$

Al variar α , varía W y el valor de la variable que hace máximo a W lo obtendremos derivando respecto de α la expresión [11.60] e igualando a cero:

$$\frac{dW}{d\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 [(1 - \alpha)^2 \cdot 3 - 2(1 + 3\alpha)(1 - \alpha)] = 0, \quad [11.61]$$

de donde:

$$\alpha = \frac{1}{9} \cong 0,111. \quad [11.62]$$

Reemplazando este valor de α en la [11.60] obtenemos:

$$W_{\text{máx.}} = 1,053 \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 = 1,053 W. \quad [11.63]$$

Se observa que, si a la sección cuadrada dispuesta con una diagonal coincidente con la línea de fuerzas se le cortan los vértices superior e inferior a una distancia igual a $1/9$ de la longitud de la semidiagonal, el módulo resistente de la sección aumenta en un 5,3%, y consecuentemente, para un mismo valor del momento flexor las tensiones máximas se reducen del mismo porcentual.

11.2.3. Deformaciones en la flexión pura normal

En el planteo del problema de la flexión vimos que las secciones giran las unas respecto de las otras. Tal es lo que ocurre con la sección 2-2 con respecto de la 1-1, fig. 11.9, donde θ mide el giro relativo de una sección respecto de la otra.

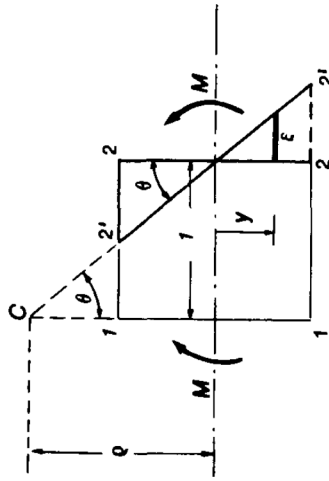


Fig. 11.9

Teniendo en cuenta que la separación entre ambas secciones es unitaria, el alargamiento de la fibra situada a una distancia y del eje neutro es directamente ϵ , deformación específica.

Si llamamos ρ al radio de curvatura de la sección deformada, con la notación de la figura tenemos:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon}{y}, \quad [11.64]$$

y recordando que:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{M}{EJ_n} y, \quad [11.65]$$

reemplazando resulta:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_n}, \quad [11.66]$$

ecuación fundamental de las deformaciones por flexión, que relaciona la curvatura de la sección con la sollicitación de ésta, sus características geométricas y la naturaleza del material de la pieza.

Esta expresión es válida para ambas formas de flexión simple normal, por

cuanto la existencia de un esfuerzo de corte no afecta la curvatura de la pieza. En consecuencia, la [11.66] nos da el valor de la curvatura de la deformada del eje de la pieza, denominada *línea elástica*.

Estableceremos a continuación la relación funcional que gobierna la deformación del eje de la pieza y que nos permite calcular los corrimientos verticales experimentados por los baricentros de las distintas secciones. Para ello, analizaremos la viga simplemente apoyada de figura 11.10, deformada por efectos de

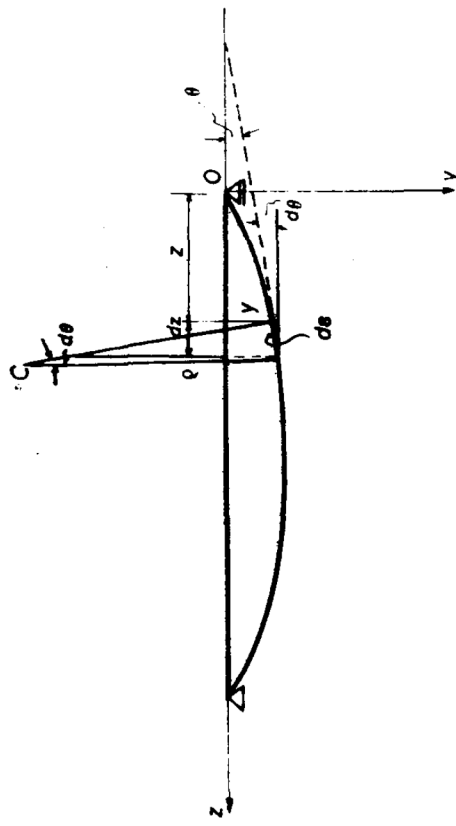


Fig. 11.10

un sistema de cargas arbitrarias (no representado en la figura). Una sección cualquiera, ubicada a una abscisa z , experimenta una rotación absoluta θ , medida por el ángulo que forma la tangente a la elástica en correspondencia con el baricentro de la sección, con el eje de la pieza antes de la deformación. Además, su baricentro sufre un corrimiento vertical y . La sección situada a una distancia dz de la anterior, gira respecto de ésta de un ángulo $d\theta$ y si ρ es el radio de curvatura de la línea elástica, resulta:

$$ds = \rho d\theta, \quad [11.67]$$

también:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}. \quad [11.68]$$

Teniendo en cuenta que los valores de θ son muy pequeños, podemos admitir, sin mayor error, que:

$$ds \cong dz, \quad [11.69]$$

y reemplazando:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dz}. \quad [11.70]$$

Por otra parte tenemos que:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dz}, \quad [11.71]$$

y por ser la deformación infinitésima, la inclinación de las tangentes a la elástica también lo es, y en consecuencia podemos escribir:

$$0 \cong \operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dz}, \quad [11.72]$$

de donde reemplazando en [11.70] llegamos a:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dz} = \frac{d^2y}{dz^2}. \quad [11.73]$$

Ahora bien, para los ejes coordenados adoptados, vemos que a valores crecientes de z corresponden valores decrecientes de θ . En consecuencia, en la [11.73] debemos afectar el segundo miembro del signo menos, obteniendo:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d^2y}{dz^2} \quad [11.74]$$

Reemplazando en la anterior $1/\rho$ por su valor de la [11.66] llegamos finalmente a:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{M(z)}{EJ_n} \quad [11.75]$$

que es la ecuación diferencial de la línea elástica.

Esta expresión es aplicable solamente cuando los corrimientos y son muy reducidos. En caso contrario, para elementos estructurales de poca rigidez donde los valores de y son considerables, es necesario tener en cuenta la expresión rigurosa de la curvatura:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dz^2} \left[1 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right]^{3/2} \quad [11.76]$$

que conduce a la siguiente expresión para la línea elástica:

$$\frac{d^2y}{dz^2} \left[1 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right]^{3/2} = -\frac{M(z)}{EJ_n} \quad [11.77]$$

Como es fácil de observar, la [11.77] se transforma en la [11.75] para

pequeñas deformaciones. En efecto, si y es reducida, también lo es dy/dz , y su cuadrado es despreciable en comparación con la unidad, con lo que el denominador de la [11.77] resulta de valor unitario.

Conocida en cada caso la función que define la variación del momento flexor, por integración de la [11.75] se determina la correspondiente ecuación de la línea elástica, que permite establecer el corrimiento máximo o flecha máxima, cuyo conocimiento es de importancia.

En efecto, al proyectar una estructura no basta que las dimensiones de sus secciones se determinen de forma tal que las tensiones no sobrepasen los valores admisibles. En determinados casos, es necesario hacerlo de modo que los máximos corrimientos no superen determinados valores, por razones estéticas o constructivas. A continuación, estableceremos las ecuaciones de la línea elástica para distintos elementos estructurales y diversos estados de carga.

a) *Viga simplemente apoyada con carga uniformemente repartida* (fig. 11.11)

La expresión del momento flexor en una sección genérica situada a la abscisa z es:

$$M(z) = \frac{1}{2} p \cdot (lz - z^2) \quad [11.78]$$

en consecuencia, la [11.75] resulta en este caso:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{1}{2} \frac{p}{EJ_n} (lz - z^2) \quad [11.79]$$

Admitiendo la constancia de E y J_n , integrando tenemos:

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{p}{2EJ_n} \left(\frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right) + C \quad [11.80]$$

$$y = -\frac{p}{2EJ_n} \left(\frac{lz^3}{6} - \frac{z^4}{12} \right) + C_1 z + C_2 \quad [11.81]$$

Las constantes de integración las determinaremos en función de las condiciones de contorno.

Es evidente que, dadas las condiciones de sustentación, para $z = 0$ y $z = l$ debe tenerse $y = 0$. En consecuencia, si:

$$z = 0: \quad C_2 = 0 \quad [11.82]$$

y si

$$z = l: \quad 0 = -\frac{p}{2EJ_n} \left(\frac{l^4}{6} - \frac{l^4}{12} \right) + C_1 \quad [11.83]$$

y finalmente:

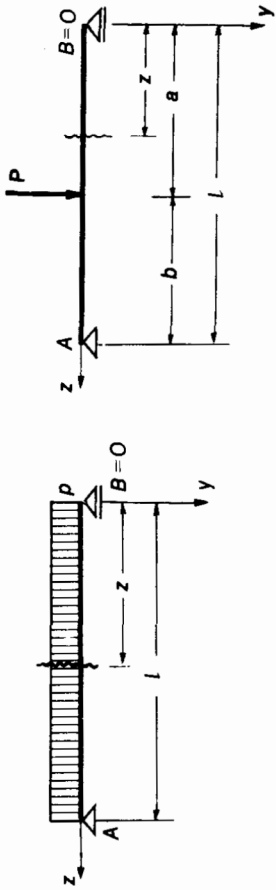


Fig. 11.11

$$C = \frac{pl^3}{24EJ_n} \quad [11.84]$$

En consecuencia, la ecuación de la línea elástica resulta:

$$y = -\frac{p}{2EJ_n} \left(\frac{z^3}{6} - \frac{z^4}{12} \right) + \frac{pl^3}{24EJ_n} \quad [11.85]$$

o también:

$$y = \frac{pl^4}{24EJ_n} \left(\frac{z^4}{l^4} - 2\frac{z^3}{l^3} + \frac{z}{l} \right) \quad [11.86]$$

Calcularemos ahora la flecha máxima:

Es evidente que para que y sea máxima, debe ser $dy/dz = 0$.

Reemplazando en la [11.80] C por su valor de la [11.84] e igualando a cero, obtenemos finalmente:

$$z = \frac{l}{2} \quad [11.87]$$

Ello era por demás evidente, por cuanto, por razones de simetría de figura y de carga, la elástica de deformación debe ser simétrica respecto del centro de la luz y , en consecuencia, la flecha máxima debe corresponder con éste. Reemplazando el valor de z dado por la [11.87] en la [11.86] llegamos a la expresión de la flecha máxima.

$$f_{\max.} = \frac{5}{384} \frac{pl^4}{EJ_n} \quad [11.88]$$

b) *Viga simplemente apoyada con una carga concentrada* (fig. 11.12)

Analizaremos el caso general de una carga concentrada en una posición cualquiera $z = a$, fig. 11.12.

Debemos considerar dos posibilidades para la expresión del momento flexor:

$$1) \quad 0 < z < a \quad M_{(z)} = \frac{Pa}{l} z \quad [11.89]$$

$$2) \quad a < z < l \quad M_{(z)} = \frac{Pa}{l} (l - z) \quad [11.90]$$

En el primer caso tenemos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 y}{dz^2} &= -\frac{Pb}{lEJ_n} z \\ \frac{dy}{dz} &= -\frac{Pbz^2}{2lEJ_n} + C \\ y &= -\frac{Pbz^3}{6lEJ_n} + C \cdot z + C_1 \end{aligned} \right\} \quad [11.91]$$

y en el segundo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 y}{dz^2} &= -\frac{Pa}{lEJ_n} (l - z) \\ \frac{dy}{dz} &= -\frac{Pa}{lEJ_n} \left(lz - \frac{z^2}{2} \right) + C' \\ y &= -\frac{Pa}{lEJ_n} \left(\frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) + C' \cdot z + C'_1 \end{aligned} \right\} \quad [11.92]$$

Para la determinación de las constantes de integración procederemos como sigue:

Para $z = 0$ debe anularse la tercera de las [11.91]. En consecuencia:

$$C_1 = 0 \quad [11.93]$$

En razón de la continuidad entre ambos tramos de la elástica, debemos tener, para $z = a$, que ambas expresiones de y deben ser iguales, ocurriendo lo mismo con las primeras derivadas, por ser única la tangente a la elástica en dicho punto. En consecuencia, reemplazando en las correspondientes expresiones z por a , luego de algunas transformaciones, llegamos a:

b) Procedimiento analítico

El procedimiento analítico para la determinación de la dirección del eje neutro se basa en el cálculo del ángulo γ , conocida la línea de fuerzas en función de las características geométricas de la sección [fig. 11.22].

Para ello recordemos, con la notación de la figura 11.22, la expresión que vincula los ángulos que forman con el eje z dos ejes conjugados.¹

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{J_z - \operatorname{tg} \alpha J_{zy}}{J_{zy} - \operatorname{tg} \alpha J_y} \quad [11.159]$$

De acuerdo con esta expresión, una vez fijados los ejes z e y y calculados J_z , J_y y J_{zy} , la determinación de γ es inmediata, por cuanto α es dato del problema.

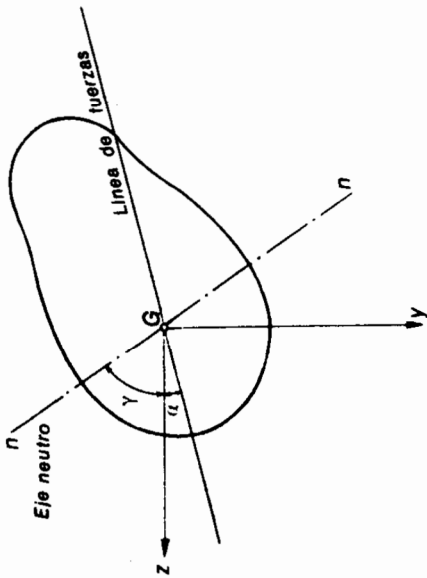


Fig. 11.22

Cuando se conoce *a priori* la dirección de los ejes principales de inercia, conviene hacer coincidir los ejes z e y con aquéllos.

En ese caso resulta:

$$\left. \begin{aligned} J_z &= J_1 \\ J_y &= J_2 \\ J_{zy} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [11.160]$$

y la [11.159] se transforma en:

$$\operatorname{tg} \gamma = - \frac{J_1}{J_2} \operatorname{tg} \alpha = - \frac{J_1}{J_2} \operatorname{cotg} \alpha. \quad [11.161]$$

11.3.2. Flexión oblicua en función de dos flexiones normales

La expresión [11.151] resulta de fácil aplicación cuando se trata de verificar las condiciones de trabajo de una sección, es decir, cuando el problema se refiere al cálculo de las tensiones máximas debidas a un momento flexor determinado.

En cambio no es práctica para el proyecto de secciones. En efecto, cuando se conoce el momento flexor y se fija la tensión de trabajo (igual o menor que la tensión admisible) la [11.151] se trasforma en:

¹Ver Estabilidad I, del autor, cap. 4.2, pág. 205. Ed. Kapelusz.

$$\frac{J_n}{J_{\max} \operatorname{sen} \beta} = \frac{M}{\sigma_{\text{adm}}} \quad [11.162]$$

y para una determinada forma de sección, tanto J_n como J_{\max} y $\operatorname{sen} \beta$ dependen de sus dimensiones. De modo que la solución del problema sólo puede efectuarse por tanteos, fijando las dimensiones y verificando luego si la sección satisface la condición.

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{adm}}. \quad [11.163]$$

Es por ello que resulta más conveniente descomponer la flexión oblicua en dos flexiones normales y calcular las tensiones por superposición de efectos, como veremos a continuación.

Sea la sección de figura 11.23 sujeta a la acción de un par flexor de momento M cuya línea de fuerzas no coincide con ninguno de los ejes principales.

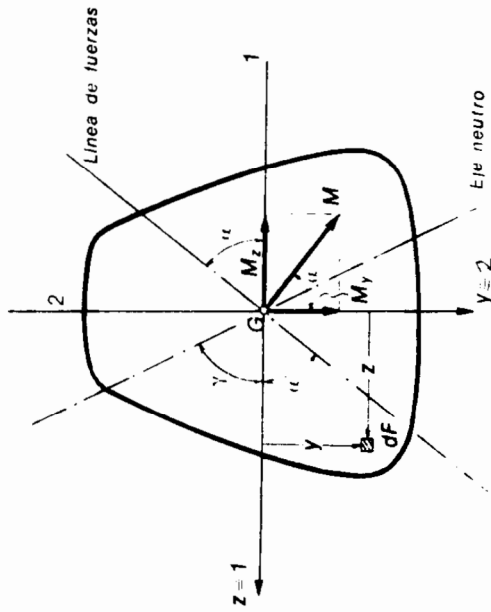


Fig. 11.23

El vector \bar{M} representativo del par flexor, actúa normalmente a la línea de fuerzas, y es posible descomponerlo en dos vectores \bar{M}_z y \bar{M}_y orientados según las direcciones de los ejes principales de inercia.

Cada uno de estos pares constituye por sí una sollicitación de flexión normal, por cuanto las respectivas líneas de fuerzas coinciden con uno de los ejes principales (1-1 para \bar{M}_y y 2-2 para \bar{M}_z) resultando ser el eje conjugado el correspondiente eje neutro (1-1 para \bar{M}_z y 2-2 para \bar{M}_y).

En consecuencia, para una fibra cualquiera dF de coordenadas z e y ,

obtenemos la tensión normal σ como suma algebraica de las tensiones originadas por cada flexión parcial actuando independientemente:

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = -\frac{M_z}{J_1}y + \frac{M_y}{J_2}z \quad [11.164]$$

En lo que respecta a los signos de ambos términos del miembro derecho de la [11.164] ellos surgen de las siguientes consideraciones:

Para el caso de la figura, el par flexor \bar{M} indicado produce en el elemento dF ubicado en las cercanías del borde inferior una tensión de tracción, o sea, positiva. En consecuencia, la suma de ambos términos debe ser positiva. De acuerdo con el sistema de ejes adoptados, las coordenadas del elemento dF son positivas, lo mismo que \bar{M}_y . En cambio, \bar{M}_z es negativo. En consecuencia, por ser los momentos de inercia magnitudes positivas, es necesario afectar al término donde aparece M_z del signo menos (-), para que, al introducir en la [11.164] M_z y M_y con sus signos, resulte σ con el signo que efectivamente le corresponde.

Si α es el ángulo que la dirección del vector \bar{M} forma con el eje 2-2, que es igual al que forma la línea de fuerzas con el 1-1, resulta:

$$\left. \begin{aligned} M_z &= M \cos \alpha \\ M_y &= M \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad [11.165]$$

valores que reemplazados en la [11.164] conducen a:

$$\sigma = M \left(z \frac{\cos \alpha}{J_2} - y \frac{\sin \alpha}{J_1} \right) \quad [11.166]$$

Esta expresión nos permite calcular la ecuación del eje neutro. En efecto, para las fibras en correspondencia con este último, la tensión debe ser nula. En consecuencia, haciendo $\sigma = 0$ en la [11.166] resulta:

$$\frac{z}{J_2} \cos \alpha = \frac{y \sin \alpha}{J_1} \quad [11.167]$$

de donde:

$$|y| = \left| z \frac{J_1}{J_2} \cotg \alpha \right| \quad [11.168]$$

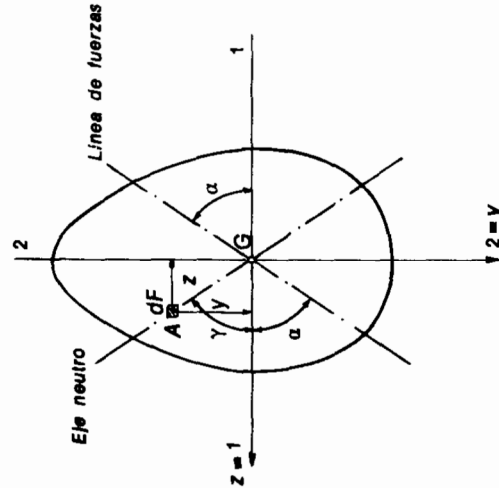


Fig. 11.24

3 FLEXIÓN PURA OBLICUA 307

ecuación de una recta que pasa por el origen de coordenadas, que coincide con el baricentro (fig. 11.24).

Ahora bien, $\cotg \alpha$ es mayor que cero, y como para el punto A del eje neutro z es positiva e y negativa, debemos afectar la [11.168] del signo menos, resultando en definitiva:

$$y = -z \frac{J_1}{J_2} \cotg \alpha \quad [11.169]$$

Pero de la figura:

$$\frac{y}{z} = \operatorname{tg} \gamma \quad [11.170]$$

donde γ es el ángulo que forma el eje neutro con el eje z . En consecuencia, resulta finalmente:

$$\operatorname{tg} \gamma = -\frac{J_1}{J_2} \cotg \alpha \quad [11.171]$$

expresión idéntica a la [11.161]

11.3.3. Verificación y proyecto de secciones solicitadas a flexión oblicua

Análogamente a lo visto en flexión normal, para la flexión oblicua pueden presentarse dos problemas:

- verificar si las tensiones de una determinada sección no sobrepasan los valores admisibles;
- establecer las dimensiones de una sección de forma dada de modo que la máxima tensión no supere el valor de la tensión admisible.

La resolución del primer problema se puede efectuar tanto con la ecuación [11.151] como con la [11.164], pues en ambas, todos sus elementos son conocidos (los momentos de inercia se toman de tablas, caso de los perfiles laminados, o se calculan fácilmente) y la única incógnita es la tensión máxima, que cuando se utiliza la [11.151] se obtiene gráficamente trazando el diagrama de tensiones normales (véase fig. 11.20).

Para el segundo caso, conviene utilizar la expresión [11.164], si bien cuando la sección no tiene ejes de simetría es necesario proceder por aproximaciones sucesivas. El problema se simplifica enormemente cuando la sección es simétrica, por ejemplo para secciones rectangulares y perfiles doble T. Para estas secciones las máximas tensiones positivas y negativas resultan de igual valor absoluto, y teniendo en cuenta que en esos casos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{J_z}{y} = W_z \\ \frac{J_y}{z} = W_y \end{aligned} \right\} \quad [11.172]$$

la [11.164] se transforma en:

$$|\sigma| = \left| \frac{M_z}{W_z} \right| + \left| \frac{M_y}{W_y} \right| \quad [11.173]$$

y finalmente en:

$$|\sigma| = \frac{M_z}{W_z} \left(1 + \frac{W_z}{W_y} \cdot \frac{M_y}{M_z} \right) \quad [11.174]$$

La relación W_z/W_y varía para los perfiles normales doble T entre 6,5 para el perfil No. 8 (8 cm de altura) y 10,3 para el No. 55 (55 cm de altura). Por ello, para el dimensionamiento, una vez establecidos los valores de M_z y M_y , se fija un valor medio comprendido entre los valores extremos de la relación, a juicio del proyectista y se despeja de la [11.174] el valor de W_z .

$$W_z = \frac{M_z}{\sigma_{adm}} \left(1 + \frac{W_z}{W_y} \cdot \frac{M_y}{M_z} \right) \quad [11.175]$$

Conocido W_z , se busca en la tabla de perfiles laminados aquel cuyo valor de W_z se aproxime más por exceso al valor calculado, y se verifica luego si la relación real de módulos resistentes se corresponde con la adoptada o si difiere de ella. En este último caso se repite el cálculo pero esta vez utilizando la relación que corresponde al perfil real, y de esta manera en uno o dos pasos se llega a la solución buscada.

Para los perfiles *Grey* de alas anchas, la relación de módulos varía entre 3,28 para el perfil No. 18 que es el más reducido que se lamina, y 6,4 para el No. 55.

11.4. Energía de deformación en la flexión

Si consideramos dos secciones infinitamente próximas de una barra prismática sujeta a flexión pura, ésta se deforma y las secciones experimentan una rotación relativa $d\theta$. En el ámbito de validez de la ley de Hooke, las rotaciones absolutas θ de una determinada sección son proporcionales al momento

del par que la sollicita, y la representación gráfica de dicha relación es una recta que pasa por el origen de coordenadas (fig. 11.25).

Al incrementarse la rotación de $d\theta$ el par M efectúa un trabajo:

$$d\Phi = M d\theta, \quad [11.176]$$

representado por el área del rectángulo elemental rayado de figura 11.25. El trabajo total, para una rotación θ será, en consecuencia:

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_0^\theta M d\theta. \quad [11.177]$$

Ahora bien, de acuerdo con la [11.66] tenemos:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_n} \quad [11.178]$$

y recordando que $1/\rho = d\theta/dx$, llegamos a:

$$d\theta = \frac{M}{EJ_n} dx. \quad [11.179]$$

Reemplazando el valor de $d\theta$, dado por la [11.179], en [11.177], resulta:

$$\Phi = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ_n} \quad [11.180]$$

como expresión de la energía de deformación absorbida en la flexión cuando

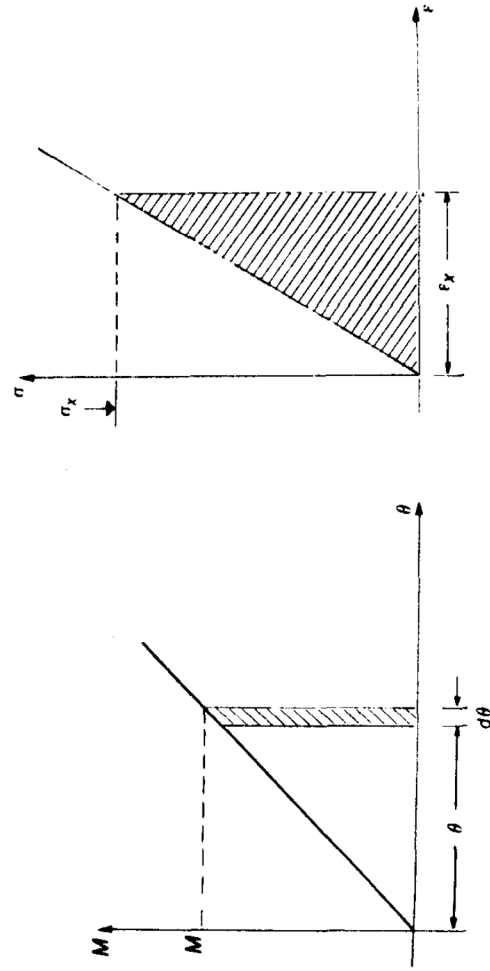


Fig. 11.25

el par flexor crece de cero a s

Fig. 11.26