

La expresión [11.180] la hemos deducido partiendo del trabajo externo de deformación, producido por el par flexor. Como se verá a continuación, es posible llegar a la misma expresión de la energía partiendo del trabajo interno, o sea del trabajo que desarrollan las tensiones normales, únicas existentes en el caso que nos ocupa.

Si σ_x es la tensión en una fibra situada a la distancia y del eje neutro, y ϵ_x la correspondiente deformación específica, para el período elástico, de acuerdo con la ley de Hooke la relación entre ambas magnitudes es lineal. En consecuencia, su diagrama representativo será una recta que pase por el origen de coordenadas, como puede observarse en la figura 11.26. En dicho diagrama, el área de la zona rayada representa el trabajo interno de deformación por unidad de volumen, desarrollado hasta alcanzarse la tensión σ_x , es decir que, para un volumen infinitésimo dV el trabajo elemental será:

$$du = \frac{\sigma_x \epsilon_x}{2} dV \quad [11.181]$$

El trabajo total lo obtenemos integrando sobre todo el volumen:

$$U = \int_V \frac{\sigma_x \epsilon_x}{2} dV \quad [11.182]$$

De acuerdo con la ley de Hooke:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad [11.183]$$

y, además:

$$\sigma_x = \frac{M}{J_n} y \quad [11.184]$$

de donde, reemplazando estos valores en la [11.182] tenemos:

$$U = \int_V \frac{M^2 y^2}{2EJ_n^2} dV \quad [11.185]$$

o, también, teniendo en cuenta que $dV = dx \cdot dF$:

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ_n^2} \cdot \int_F y^2 dF \quad [11.186]$$

Pero $\int_F y^2 dF = J_n$, de donde:

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ_n} \quad [11.187]$$

expresión idéntica a la [11.180].

11.5. Flexión y corte

→ 11.5.1. Consideraciones generales

Cuando, al reducir al baricentro de una sección dada las fuerzas que actúan a uno u otro lado de la misma, se obtienen dos pares opuestos normales a la sección y dos fuerzas opuestas contenidas en el plano de ella, es decir, si existen simultáneamente un momento flexor y un esfuerzo de corte, la sollicitación se denomina de *flexión y corte*.

En este caso las ecuaciones de equivalencia [8.6] y [8.7] se transforman en

$$\left. \begin{aligned} \int_F \sigma_x dF &= 0 & \int_F (\tau_{xz} y + \tau_{xy} z) dF &= 0 \\ \int_F \tau_{xy} dF &= Q_y & \int_F \sigma_x y dF &= M_z \\ \int_F \tau_{xz} dF &= Q_z & \int_F \sigma_y z dF &= M_y \end{aligned} \right\} [11.188]$$

De estas ecuaciones, la primera y las dos últimas son las mismas que analizamos para el caso de la flexión pura. Las tres restantes no son nulas en este caso por la existencia de un esfuerzo de corte, que origina tensiones tangenciales en el plano de la sección.

El estudio de las tensiones de corte se basa en la denominada "teoría de Jouravski"¹, quien desarrolla, en un trabajo sobre puentes sistema How, una teoría sobre la resistencia de *piezas rectangulares*, tanto de madera como de hierro, constituidas de láminas superpuestas vinculadas entre sí. Resulta interesante destacar que Jouravski calcula los esfuerzos de resbalamiento longitudinales pero no se ocupa de las tensiones que ocurren en el plano de la sección. La extensión de la teoría de Jouravski a la determinación de las tensiones tangenciales en el plano de la sección se debe a Collignon, razón por la cual se acostumbra a designar con el nombre de "fórmula de Collignon" a la fórmula clásica utilizada para el cálculo de las tensiones tangenciales debidas a la flexión.

El *corte puro*, que es aquella sollicitación donde en el plano de la sección sólo existen dos fuerzas opuestas, o sea, cuando actúa solamente un esfuerzo de corte siendo nulas las restantes características, sólo se presenta en contadas ocasiones.

Un ejemplo de ello lo constituye el pórtico de figura 11.27.

En las secciones $M-M$ y $N-N$, donde las rectas de acción de las reacciones de vínculo cortan al eje del dintel del pórtico, los momentos flexores son nulos, pero existen esfuerzos axiales y de corte.

¹M. Jouravski, *Annales des ponts*.

Para el caso que analizamos, no interesan los primeros, por cuanto conducen a tensiones normales σ , que no influyen en las tensiones tangenciales τ . En consecuencia, estamos ante un caso de corte puro para el cual son aplicables las fórmulas que deduciremos a continuación, porque, como veremos, son independientes del valor de las tensiones normales. No ocurre lo mismo cuando la sollicitación por corte puro tiene su origen en fuerzas de cizallamiento. Tal el caso de figura 11.28 donde una barra está sollicitada por las mandíbulas de una

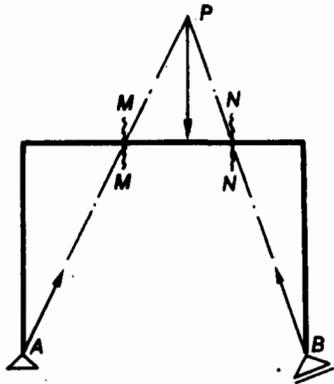


Fig. 11.27

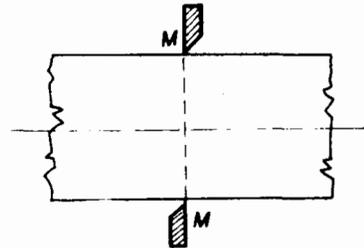


Fig. 11.28

cizalla que tiende a cortarla por la sección M-M y que escapa a las hipótesis de la resistencia de materiales.

Cuando se trata de pernos o remaches que vinculan planchuelas o chapas sollicitadas axialmente, existen, según el caso, una o varias secciones donde se admite que existe corte puro, fig. 11.29 a y b. Ello, en realidad, no es cierto por cuanto las fuerzas axiales N no actúan en el plano de corte, como lo exige la definición de corte puro. En efecto, N , fuerza normal que sollicita las chapas o planchuelas es, en realidad, la resultante de los esfuerzos elementales σdF , derivados de las tensiones normales σ distribuidos uniformemente sobre el espesor de la chapa. Por ello, sus rectas de acción coinciden con los ejes de las chapas y en las secciones de corte s-s aparecen momentos de flexión (fig. 11.29 c y d).

En estos casos se admite una distribución uniforme de las tensiones tangenciales y se utiliza para calcular su valor la expresión:

$$\tau = \frac{Q}{F} \quad [11.189]$$

donde Q es el esfuerzo de corte que sollicita a la sección, y F el área de ésta. El valor de τ así obtenido es un valor medio de la tensión que, según la forma de la misma, difiere del valor máximo real.

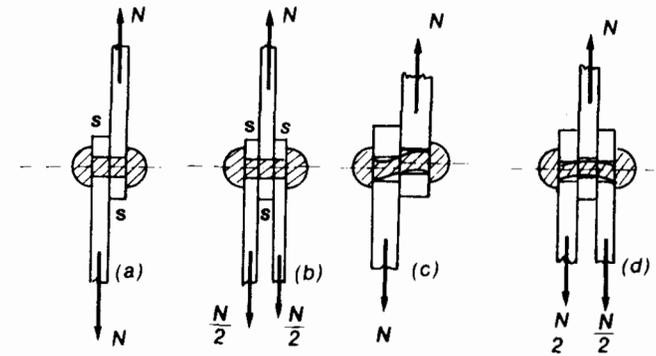


Fig. 11.29

→ 11.5.2. La teoría de Jouravski generalizada

Consideremos dos secciones de una pieza prismática sujeta a flexión y corte, separadas de dx (fig. 11.30).

En la sección 1-1 actúan un momento flexor M y un esfuerzo de corte Q . En la 2-2, el momento flexor será $M + dM$ mientras que el esfuerzo de corte mantiene su valor Q , siendo $dM = Q \cdot dx$.

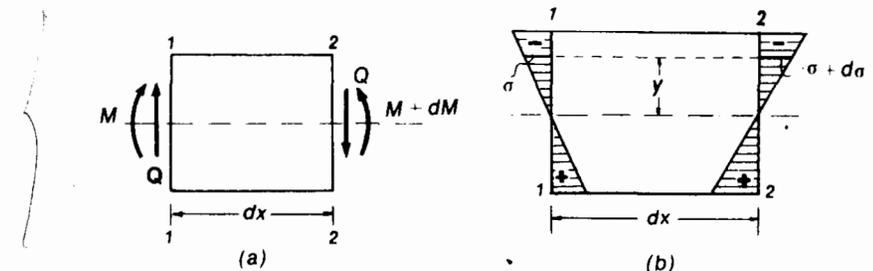


Fig. 11.30

Como consecuencia de la flexión, en una fibra situada a una distancia y del eje neutro, se originarán en la sección 1-1 tensiones normales:

$$\sigma = \frac{M}{J_n} y \quad [11.190]$$

y en la 2-2:

$$\sigma + d\sigma = \frac{M + dM}{J_n} y. \quad [11.191]$$

Supongamos ahora separada una parte del prisma de longitud dx por una superficie cilíndrica, como muestra la figura 11.31 a. En la parte rayada de la sección 1-1 actúan las tensiones dadas por la [11.190], que originan fuerzas elementales:

$$dN = \sigma dF \quad [11.192]$$

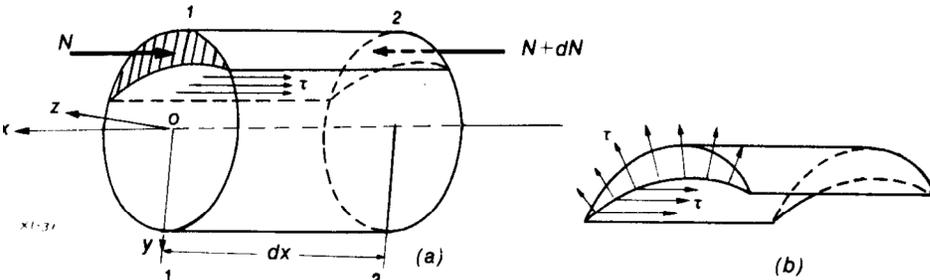


Fig. 11.31

cuya resultante N tiene por expresión:

$$N = \int_F \sigma dF = \int_F \frac{M}{J_n} y dF \quad [11.193]$$

En la sección 2-2, la resultante de los esfuerzos elementales será:

$$N + dN = \int_F \frac{M + dM}{J_n} y dF \quad [11.194]$$

Ambas fuerzas son coaxiales y su resultante será:

$$dN = \int_F \frac{dM}{J_n} y dF. \quad [11.195]$$

La fuerza elemental dN tiende a deslizar la parte del prisma ubicada por encima de la superficie cilíndrica con respecto al resto del mismo.

A esta acción se oponen tensiones tangenciales τ que actúan sobre la superficie curva de separación.

En lo que respecta a dichas tensiones, que se denominan tensiones longitudinales de resbalamiento, admitiremos:

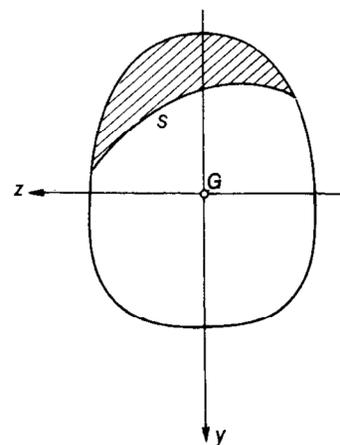


Fig. 11.32

- que su dirección es paralela al eje de la pieza;
- que varían en forma continua sobre la superficie curva.

Si llamamos s la longitud de la curva de intersección de la superficie con el plano de una de las secciones (fig. 11.32), la resultante de los esfuerzos elementales originados por las tensiones τ valdrá:

$$dT = dx \int_s \tau ds. \quad [11.196]$$

Razones de equilibrio conducen a que:

$$|dN| = |dT| \quad [11.197]$$

de donde, reemplazando valores:

$$\int_F \frac{dM}{J_n} y dF = dx \int_s \tau ds \quad [11.198]$$

Ahora bien, tanto dM como J_n son valores constantes para la sección, luego:

$$\frac{dM}{J_n} \int_F y dF = dx \int_s \tau ds \quad [11.199]$$

de donde:

$$\int_s \tau ds = \frac{dM}{dx} \frac{1}{J_n} \int_F y dF \quad [11.200]$$

Recordando que $(dM/dx) = Q$ y que $\int_F y dF$ es el momento estático de la superficie rayada ubicada por encima de la curva s , con respecto al eje neutro de la sección, la [11.200] se transforma en:

$$\int_s \tau ds = \frac{QS_n^s}{J_n} \quad [11.201]$$

Ahora bien:

$$\int_s \tau ds = \tau_m \cdot s \quad [11.202]$$

donde τ_m es el valor medio de la tensión de resbalamiento longitudinal. Luego, reemplazando en la [11.201] llegamos finalmente a:

$$\tau_m = \frac{QS_n^s}{sJ_n} \quad [11.203]$$

De acuerdo con el teorema de Cauchy, las tensiones τ de resbalamiento longitudinal dan origen en el plano de la sección a tensiones tangenciales, normales en cada punto de la curva s a su correspondiente tangente y cuyo valor medio está dado precisamente por la expresión [11.203].

→ 11.5.3. Tensiones tangenciales en la sección rectangular

Sea la sección rectangular de ancho b y altura h (fig. 11.33) sujeta a la acción de un esfuerzo de corte Q acompañado de flexión. Para el plano

longitudinal de traza $s-s$, ubicado a una distancia y del eje neutro, las tensiones rasantes longitudinales pueden suponerse constantes en todo el ancho b de la pieza. En consecuencia, de acuerdo con el teorema de Cauchy, en el plano de la sección y y a lo largo de la recta $s-s$ las tensiones tangenciales resultan normales a ésta y uniformemente distribuidas a lo largo de la misma, pero variando en altura en función de y . Conforme con lo anterior, la [11.203] se transforma en:

$$\tau_{xy} = \frac{Q S_n^y}{b J_n} \quad [11.204]$$

Para la sección rectangular tenemos:

$$\left\{ \begin{aligned} S_n^y &= \frac{b}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) \left(\frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \\ J_n &= \frac{b h^3}{12} \end{aligned} \right\} \quad [11.205]$$

Valores estos que reemplazados en [11.204] conducen, luego de algunas transformaciones a:

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2} \frac{Q}{b h} \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right] \quad [11.206]$$

La variación de τ_{xy} sobre la altura de la sección responde, como se ve, a una ley parabólica de segundo grado.

Para $y = \pm \frac{1}{2} h$, en los bordes superior e inferior de la sección, la [11.206] se anula, resultando $\tau_{xy} = 0$.

Ello es lógico que ocurra, por cuanto de ser en dichos puntos $\tau_{xy} \neq 0$, de acuerdo con el teorema de Cauchy aparecerían en las caras superior e inferior de la pieza prismática tensiones de resbalamiento longitudinal que no podrían ser equilibradas, por cuanto dichas caras, por hipótesis, se hallan libres de fuerzas exteriores.

Para $y = 0$, en correspondencia con las fibras ubicadas sobre el eje neutro, el término entre barras de la expresión [11.206] adquiere su mayor valor y τ_{xy} se hace máxima, resultando:

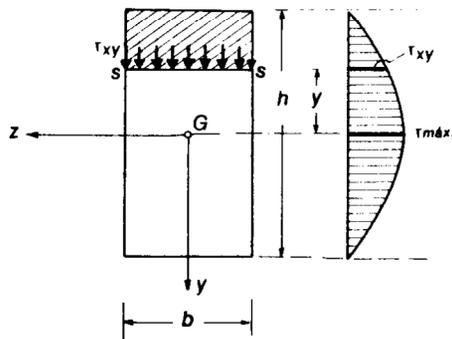


Fig. 11.33

$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{3}{2} \frac{Q}{b h} \quad [11.207]$$

Pero, por ser $bh = F$, área de la sección, tenemos:

$$\tau_{\text{máx.}} = \frac{3}{2} \frac{Q}{F} \quad [11.208]$$

es decir, que la tensión tangencial máxima para la sección rectangular, es un 50% mayor que la que resulta de admitir una repartición uniforme. En la expresión [11.205] hemos tomado para S_n^y el valor del momento estático con respecto del eje neutro, de la parte de la sección situada por encima del nivel y (zona rayada fig. 11.33).

Si llamamos $S_n^{y'}$ el momento estático del área de la sección ubicada por debajo de $s-s$ con respecto al eje neutro, resulta:

$$S_n^y + S_n^{y'} = 0 \quad [11.209]$$

de donde:

$$S_n^y = -S_n^{y'} \quad [11.210]$$

Si, en la [11.204], sustituimos la [11.210] tenemos:

$$\tau_{xy} = -\frac{Q S_n^{y'}}{b J_n} \quad [11.211]$$

La diferencia de signos para τ_{xy} responde a lo que realmente ocurre con las tensiones rasantes longitudinales τ_{yx} . En efecto, si imaginamos un corte longitudinal de la pieza por el plano a nivel y , y separadas ambas partes (fig. 11.34), en la cara de $ABA'B'$ las tensiones rasantes longitudinales τ_{yx} concurren a la arista de intersección de ambos planos y originan en el de la sección tensiones τ_{yx} que también deben concurrir a dicha arista, dirigidas en el sentido positivo de las y . En cambio, para la cara $CDC'D'$ razones de equilibrio exigen que las tensiones τ_{yx} se alejen de la arista, pues deben equilibrarse con las tensiones que aparecen en la cara $ABA'B'$, y dichas tensiones τ_{yx} son precisamente,

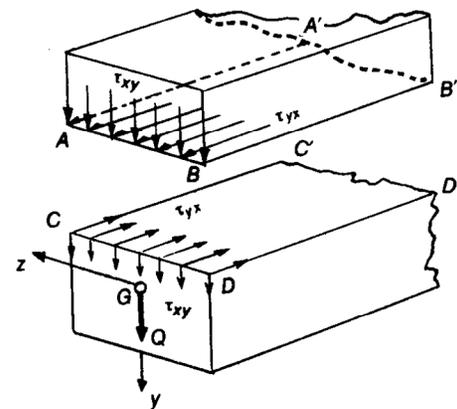


Fig. 11.34

las calculadas con la fórmula [11.211] y que dan origen, en el plano de la sección, a tensiones τ_{xy} que deben alejarse de la arista y que, en consecuencia, también están dirigidas según el semieje positivo de las y .

En consecuencia, para el cálculo de las tensiones tangenciales en el plano de la sección resulta indistinto considerar para S_n^y cualquiera de las dos partes en que la recta $s-s$ divide la sección.

11.5.4. Tensiones tangenciales en secciones simétricas de contorno curvilíneo

Al analizar en el párrafo anterior las tensiones tangenciales en la sección rectangular, admitimos que, en el plano de la sección, sólo existían tensiones τ_{xy} y que las τ_{xz} eran nulas.

Ello sólo se cumple en realidad, para los puntos M , N y C (fig. 11.35)

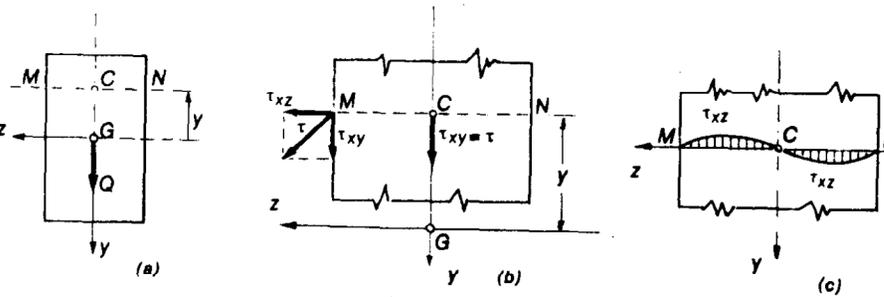


Fig. 11.35

para el nivel y . En efecto, para el punto C , razones de simetría hacen que, necesariamente, $\tau \equiv \tau_{xy}$ y consecuentemente $\tau_{xz} = 0$. En cuanto a los puntos M y N , si para los mismos la tensión τ tuviera, por ejemplo, la dirección que muestra la figura 11.35 b , admitiría una componente τ_{xz} normal al borde vertical de la sección, que, a la vez, daría origen en las caras laterales a tensiones τ_{zx} que no pueden existir por razones de equilibrio, ya que hemos partido de la hipótesis que dichas caras están libres de toda sollicitación exterior. En consecuencia, necesariamente, tanto para M como para N debemos tener:

$$\left. \begin{aligned} \tau &\equiv \tau_{xy} \\ \tau_{xz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [11.212]$$

Para los puntos intermedios, debemos contar con la existencia de ten-

siones τ_{xz} cuya ley de variación desconocemos, pero que deben responder a un diagrama tal que a ambos lados del punto C (fig. 11.35 c), su signo sea contrario. En efecto, al ser $Q_z = 0$ la tercera de las [11.188] se transforma en:

$$\int_F \tau_{xz} dF = 0, \quad [11.213]$$

lo que exige que, para $\tau_{xz} \neq 0$, las tensiones tangenciales sean opuestas en uno y otro lado del eje y .

Si el ancho b de la sección es reducido, el máximo valor que pueden alcanzar las tensiones τ_{xz} es pequeño, y en consecuencia, es posible admitir, para secciones delgadas, que son nulas.

Cuando el espesor de la sección rectangular es considerable ya no es posible despreciar las tensiones τ_{xz} , cuya ley de distribución sobre el ancho de la sección es objeto de la teoría matemática de la elasticidad y por ello, escapa a los alcances de la presente obra.

No obstante, para secciones simétricas de contorno curvilíneo es posible determinar con facilidad dichas tensiones partiendo de la hipótesis de una distribución lineal. Sea, por ejemplo, la sección que muestra la figura 11.36, solicitada por flexión y corte. De acuerdo con la teoría de Jouravski, en el plano $ABA'B'$ (fig. 11.36 b) se originan tensiones τ_{yx} de resbalamiento longitudinales, normales a la arista AB , a las que, según el teorema de Cauchy, corresponden en el plano de la sección, tensiones τ_{xy} normales a la arista AB y uniformemente distribuidas a lo largo de la misma.

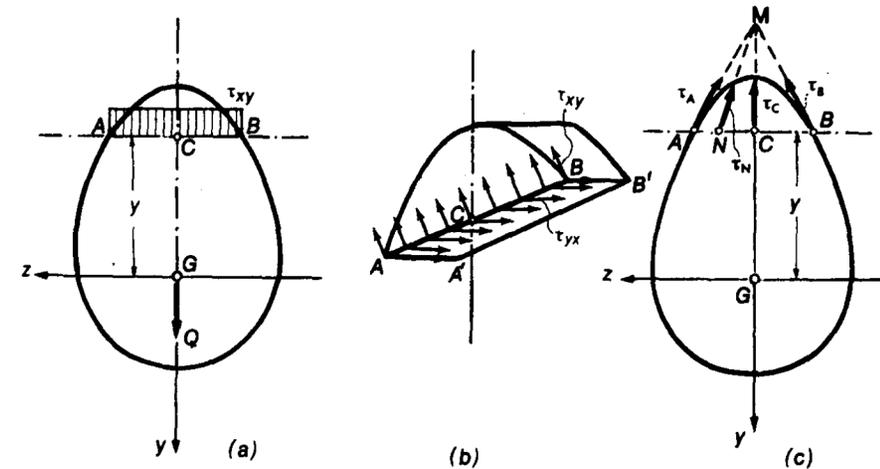


Fig. 11.36

Ahora bien, para los puntos A y B las tensiones tangenciales así determinadas, no pueden ser las tensiones tangenciales resultantes. En efecto, de serlo, admitirían dos componentes: una, τ_n , normal a la tangente al contorno en el punto A , y la segunda, τ_t , dirigida según esta última (fig. 11.37 *a*). A la vez, a la tensión τ_n , por el teorema de Cauchy correspondería una tensión τ_n' (fig. 11.37 *b*) normal a la tangente al contorno, pero actuando sobre

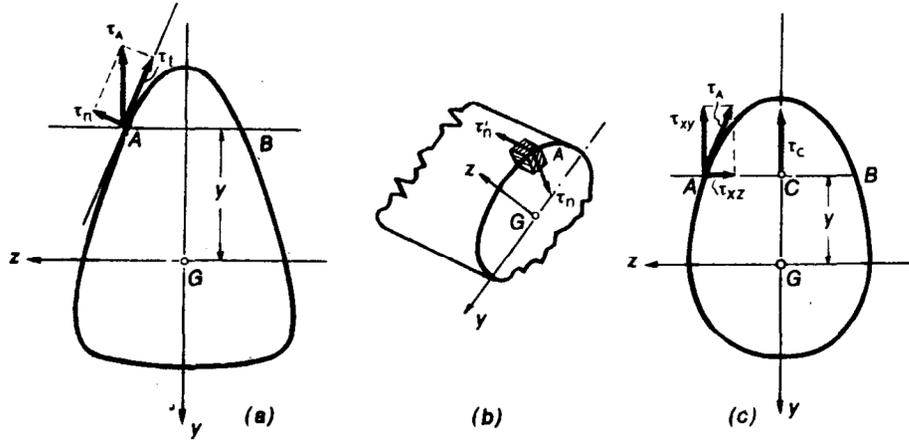


Fig. 11.37

el plano tangente a la superficie lateral según la generatriz que pasa por A . Esta tensión no puede existir, por cuanto, por hipótesis, la superficie lateral del elemento prismático se encuentra libre de solicitaciones. En consecuencia, debe ser:

$$\tau_n' = \tau_n = 0, \quad [11.214]$$

o sea, que para los puntos A y B las tensiones tangenciales resultantes τ_A y τ_B , están dirigidas según las respectivas tangentes al contorno de la sección.

La tensión τ_{xy} resulta ser, con ello, la componente vertical de τ_A (o τ_B), existiendo además una tensión horizontal τ_{xz} .

En C , por razones de simetría, debe ser $\tau_C \equiv \tau_{xy}$ y $\tau_{xz} = 0$. La tensión tangencial horizontal varía entre dos valores extremos, en A y B , de signo contrario anulándose en correspondencia con el eje de simetría. Admitir que la ley de variación de τ_{xz} es lineal (fig. 11.38), equivale a suponer que las tensiones tangenciales resultantes a lo largo de la línea AB concurren al punto M (fig. 11.36 *c*), determinado por la intersección de la dirección de τ_A (o τ_B) con el eje de simetría de la sección.

Consideremos un punto N de coordenadas z, y (fig. 11.39) y en él

sean τ_{xy} y τ_{xz} las dos componentes de la tensión tangencial. Con la notación de la figura resulta:

$$\frac{\tau_{xz}}{z} = \frac{\tau_{xy}}{MC}, \quad [11.215]$$

o también:

$$\tau_{xz} = \frac{\tau_{xy}}{MC} \cdot z. \quad [11.216]$$

Pero, tanto τ_{xy} , dado por la fórmula de Jouravski, como MC son constantes para los puntos ubicados al nivel y . Podemos, pues, escribir:

$$\tau_{xz} = k \cdot z, \quad [11.217]$$

o sea que la variación τ_{xz} responde a una ley lineal.

Como consecuencia de lo anterior concluimos que, para el tipo de secciones que nos ocupa, la fórmula de Jouravski, nos da el valor de las componentes

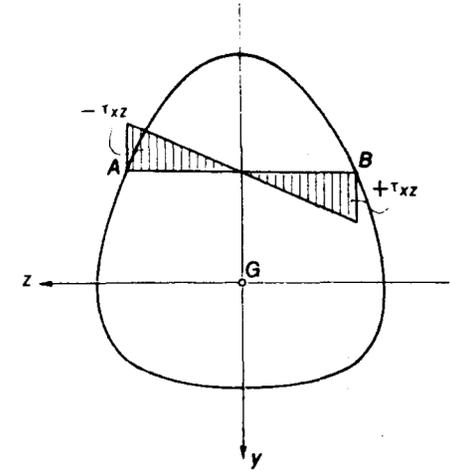


Fig. 11.38

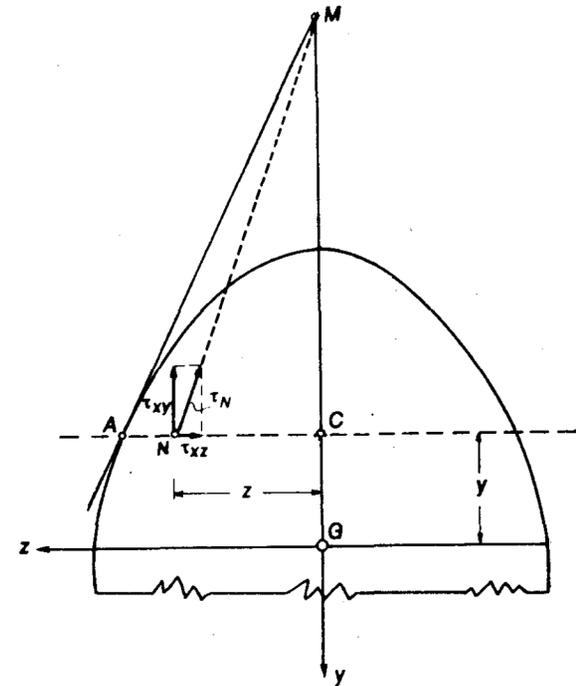


Fig. 11.39

verticales de las tensiones tangenciales en los distintos puntos de la sección. En cuanto a las tensiones resultantes, obtenemos su magnitud desproyectando los valores de τ_{xy} sobre la dirección de τ_N , que, a su vez, queda determinada uniendo el punto considerado, con la intersección del eje de simetría vertical con la dirección de la tangente al contorno al nivel y .

11.5.5. Tensiones tangenciales en la sección circular llena ←

Sea la sección circular de figura 11.40 sujeta a flexión y corte, de radio R . Como hemos visto, la fórmula de Jouravski:

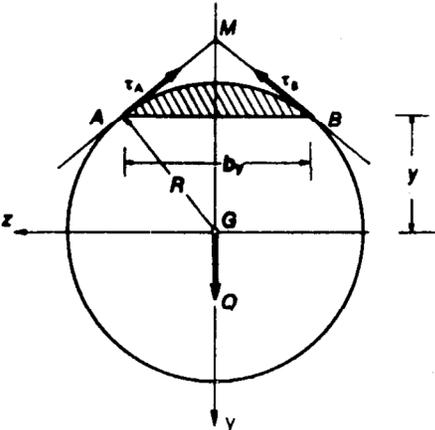


Fig. 11.40

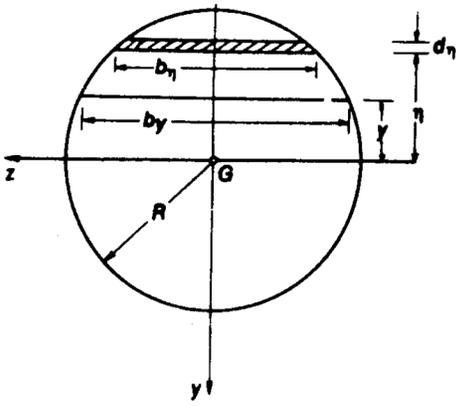


Fig. 11.41

$$\tau_{xy} = \frac{Q S_n^y}{b_y J_n} \quad [11.218]$$

nos da, en este caso, el valor de las componentes verticales de las tensiones tangenciales dirigidas según rectas que concurren al punto M.

Para la sección circular resulta:

$$\left. \begin{aligned} b_y &= 2\sqrt{R^2 - y^2} \\ J_n &= \frac{\pi R^4}{4} \end{aligned} \right\} \quad [11.219]$$

Por otra parte, de acuerdo con la figura 11.41:

$$dS_n^y = b_\eta \eta d\eta \quad [11.220]$$

$$S_n^y = \int_y^R b_\eta \eta d\eta, \quad [11.221]$$

y en consecuencia:

$$S_n^y = 2 \int_y^R \sqrt{R^2 - \eta^2} \eta d\eta, \quad [11.222]$$

$$\begin{aligned} S_n^y &= \frac{2}{3} (R^2 - \eta^2)^{3/2} \Big|_y^R = \\ &= \frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{3/2} \quad [11.223] \end{aligned}$$

Reemplazando los valores de las [11.219] y [11.223] en la [11.218]:

$$\tau_{xy} = \frac{2Q(R^2 - y^2)^{3/2} \times 4}{3 \times 2(R^2 - y^2)^{1/2} \pi R^4} \quad [11.224]$$

y finalmente:

$$\tau_{xy} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q(R^2 - y^2)}{\pi R^4} \quad [11.225]$$

Para $y = \pm R$, es decir, en los extremos superior e inferior de la sección resulta, como es lógico $\tau_{xy} = 0$.

Las tensiones tangenciales máximas corresponden al eje neutro, para el cual $y = 0$, de donde:

$$\tau_{m\acute{a}x.} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{F} \quad [11.226]$$

expresión que nos dice que la tensión tangencial máxima es superior en un 33% a la que resulta de suponer una distribución uniforme (Q/F) sobre la sección.

11.5.6. Tensiones tangenciales en la sección triangular

En el caso de la sección triangular, las tensiones tangenciales a lo largo de los bordes deben, necesariamente, estar dirigidas según estos últimos porque de no serlo (fig. 11.42a) habría una componente τ_n normal al borde, que daría origen a una tensión longitudinal sobre la superficie lateral. De acuerdo

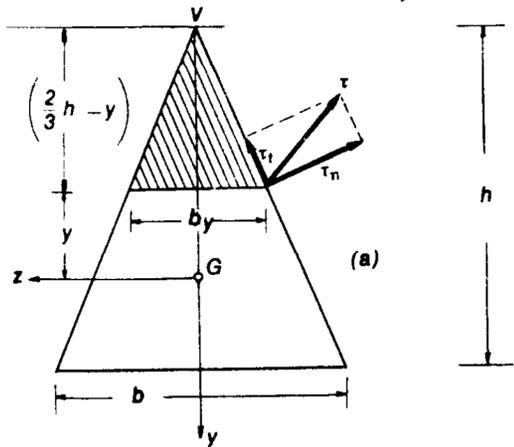


Fig. 11.42

con el teorema de Cauchy ésta no puede existir. El valor de la componente vertical de τ resulta de la fórmula de Jouravski, y si recordamos que con la notación de la figura es:

$$\left. \begin{aligned} J_n &= \frac{bh^3}{36} \\ b_y &= \frac{b}{h} \left(\frac{2}{3}h + y \right) \\ S_n^y &= \frac{1}{3} b_y \left(\frac{2}{3}h + y \right) \left(\frac{h}{3} - y \right) \end{aligned} \right\} \quad [11.227]$$

Reemplazando en:

$$\tau_{xy} = \frac{Q S_n^y}{b_y J_n} \quad [11.228]$$

resulta:

$$\tau_{xy} = \frac{12Q}{bh} \left(\frac{2}{3} + \frac{y}{h} \right) \left(\frac{1}{3} - \frac{y}{h} \right) \quad [11.229]$$

τ_{xy} se anula para $y = \frac{2}{3}h$ e $y = -\frac{1}{3}h$, en correspondencia con el vértice y la base del triángulo, como es lógico que sea. Derivando la [11.229] respecto de y e igualando a cero

$$\frac{d\tau_{xy}}{dy} = \frac{12Q}{bh^3} \left(\frac{h}{3} - 2y \right) = 0, \quad [11.230]$$

de donde $y = -\frac{1}{6}h$ es la distancia al baricentro en que ocurre el máximo valor de τ_{xy} , que obtenemos reemplazando y por $\frac{1}{6}h$ en la [11.229]:

$$\tau_{xy \text{ máx.}} = \frac{3Q}{bh} \quad [11.231]$$

Teniendo en cuenta que para el triángulo $F = \frac{1}{2}bh$, sustituyendo resulta

$$\tau_{xy \text{ máx.}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F} \quad [11.232]$$

es decir que el valor máximo de la componente vertical de la tensión tangencial, es un 50% mayor que el que resulta de admitir una repartición uniforme:

$$\tau_{xy} = \frac{Q}{F} \quad [11.233]$$

En lo que respecta a las componentes τ_{xz} , admitimos una variación lineal a lo ancho de la sección, o sea, que suponemos que las tensiones τ en puntos situados a un nivel y del eje neutro, concurren al vértice de la sección.

11.5.7. Alabeo de secciones solicitadas por flexión y corte

La hipótesis de Bernouilli-Navier, admitida para el desarrollo de la teoría de la flexión, supone la constancia de las secciones planas y es exacta en el caso de la flexión pura. Para la flexión con corte esta hipótesis no se cumple, como veremos a continuación, si bien se la admite como suficientemente aproximada a los efectos prácticos.

Sea, por ejemplo, una viga solicitada por flexión y corte (fig. 11.43) en una de cuyas secciones, supuestas rectangulares, se originan tensiones tangenciales que responde a una ley parabólica. (fig. 11.43 c) con un máximo en corres-

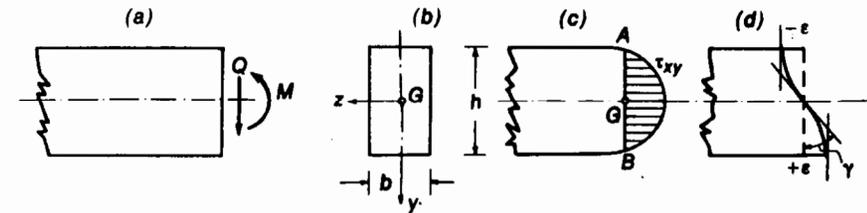


Fig. 11.43

pondencia con las fibras situadas en el eje neutro y valores nulos en los bordes superior e inferior. Recordando la relación $\gamma = \tau/G$ que vincula las tensiones tangenciales con las distorsiones, resulta que los elementos planos ubicados en correspondencia con los bordes superior e inferior de la sección no sufren distorsión alguna por ser en ellos nulas las tensiones tangenciales. En consecuencia, se mantienen paralelos a la posición primitiva de la sección. En cambio, a medida que nos acercamos al eje neutro, crecen las tensiones tangenciales y con ellas las distorsiones, hasta alcanzar un valor máximo para los elementos planos en correspondencia con el eje neutro, para luego ir decreciendo hasta alcanzar nuevamente un valor nulo en correspondencia con el borde inferior. Como consecuencia de ello, la sección no puede mantenerse plana ya que los sucesivos elementos de superficie de la sección experimentan distorsiones (giros) de distinta magnitud, es decir, la sección se alabea. No obstante, como dijimos antes, por ser las distorsiones de magnitud infinitésima en comparación con las dimensiones de la sección, puede suponerse sin mayor error que ésta se mantiene plana.

11.5.8. Tensiones tangenciales en la sección doble T

Sea la sección de figura 11.44 que idealiza un perfil laminado doble T. Para un corte $s-s$, situado a un nivel y medido desde el eje neutro de la sección,

las tensiones tangenciales quedan definidas por la fórmula de Jouravski. Con la notación de la figura resulta:

$$J_n = \frac{bh^3}{12} \left[1 - \left(1 - \frac{e}{b} \right) \left(1 - \frac{2t}{h} \right)^3 \right], \quad [11.234]$$

y para el corte $s-s$ en correspondencia con el alma:

$$S_n^y = \frac{bt}{2} (h-t) + \frac{e}{2} \left[\left(\frac{h}{2} - t \right)^2 - y^2 \right], \quad [11.235]$$

y finalmente:

$$\tau_{xy} = \frac{12Q}{bh^3e} \cdot \frac{\frac{bt}{2} (h-t) + \frac{e}{2} \left[\left(\frac{h}{2} - t \right)^2 - y^2 \right]}{\left[1 - \left(1 - \frac{e}{b} \right) \left(1 - \frac{2t}{h} \right)^3 \right]} \quad [11.236]$$

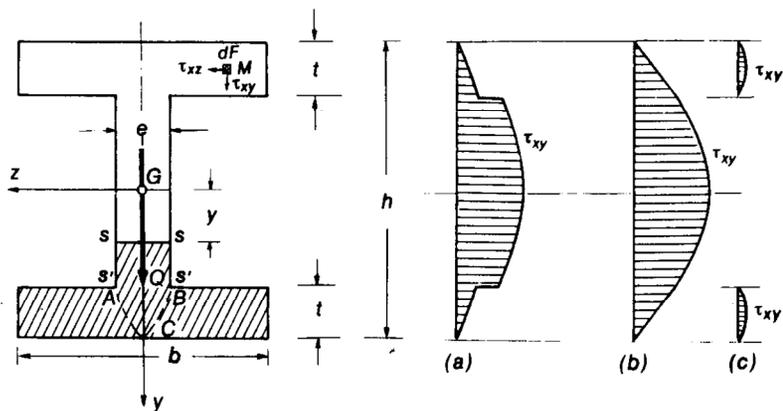


Fig. 11.44

Esta expresión es válida para los niveles y correspondientes al alma. Para los cortes $s'-s'$ en correspondencia con las uniones de las alas con el alma, donde $y = \frac{1}{2}h - t$, la [11.236] se transforma en:

$$\tau_{xy} = \frac{6Qt(h-t)}{h^3e \left[1 - \left(1 - \frac{e}{b} \right) \left(1 - \frac{2t}{h} \right)^3 \right]} \quad [11.237]$$

y para $y = 0$ adquiere su valor máximo:

$$\tau_{xy \text{ máx.}} = \frac{6Q \left[bt(h-t) + e \left(\frac{h}{2} - t \right)^2 \right]}{bh^3e \left[1 - \left(1 - \frac{e}{b} \right) \left(1 - \frac{2t}{h} \right)^3 \right]} \quad [11.238]$$

Como puede observarse, la variación de τ_{xy} entre ambos valores es parabólica y responde al diagrama de figura 11.44 a.

En lo que respecta a las tensiones tangenciales que se originan en las alas, su determinación procede en la forma que veremos a continuación.

Es común, en muchos textos, extender la validez de la expresión [11.236] a las alas. De esta manera, si consideramos los niveles comprendidos entre $y = \frac{1}{2}h - t$ e $y = \frac{1}{2}h$, la correspondiente expresión de la fórmula de Jouravski resulta:

$$\tau_{xy} = \frac{6Q \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{bh^3 \left[1 - \left(1 - \frac{e}{b} \right) \left(1 - \frac{2t}{h} \right)^3 \right]} \quad [11.239]$$

Para $y = \frac{1}{2}h$ es lógico y fácil de observar que:

$$\tau_{xy} = 0. \quad [11.240]$$

En correspondencia con $s'-s'$ y para $y = \frac{1}{2}h - t$, resulta:

$$\tau_{xy} = \frac{6Qt(h-t)}{bh^3 \left[1 - \left(1 - \frac{e}{b} \right) \left(1 - \frac{2t}{h} \right)^3 \right]} \quad [11.241]$$

Comparando los valores de τ_{xy} dados por las [11.237] y [11.241] vemos que éstas se encuentran en la relación de b/e , es decir, que al nivel $s'-s'$ se produce una discontinuidad del diagrama de tensiones τ_{xy} , tal como muestra la figura 11.44 a, llegando así a una incongruencia. En efecto, es evidente que, de acuerdo con la [11.241] a lo largo del borde interior del ala del perfil debe existir una tensión τ_{xy} originando, de acuerdo con el teorema de Cauchy, tensiones rasantes longitudinales sobre la superficie interior de aquella, donde, por tratarse de una superficie libre de sollicitaciones exteriores, no puede haber tensiones.

La situación real es la siguiente: en un punto tal como el M , de la superficie de una de las alas, existen tensiones τ_{xy} y τ_{xz} . Las primeras, salvo en la zona aproximadamente triangular ABC de unión de ala y alma, varían según diagramas parabólicos que se anulan en correspondencia de los bordes superior e inferior del ala (fig. 11.44 c), y su valor máximo es reducido por lo que pueden despreciarse. Para la zona ABC puede admitirse que varían linealmente desde el valor en correspondencia con $s'-s'$ dado por la [11.237] hasta anularse en el borde inferior del perfil.

En cuanto a las tensiones τ_{xz} , su magnitud es tal que no pueden ser despreciadas y juegan un papel importante en aquellas secciones para las que la línea de fuerzas coincide con un eje principal de inercia que no es eje de simetría de la sección.

Desarrollaremos a continuación las expresiones que nos permiten establecer su ley de variación a lo largo de las alas.

Supongamos el mismo perfil de figura 11.44, al que efectuamos un corte vertical en una de sus alas (fig. 11.45 a) y del que separamos la parte exterior

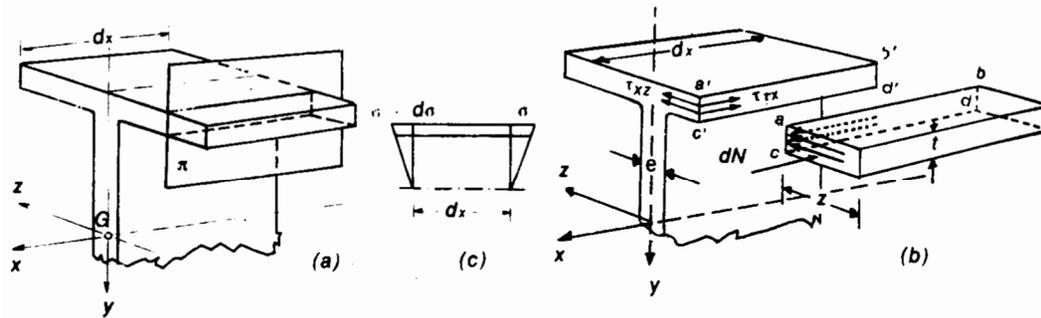


Fig. 11.45

[fig. 11.45 b]. Como el perfil se encuentra solicitado por flexión, sobre la cara normal posterior se originan tensiones normales (fig. 11.45 c):

$$\sigma = \frac{M}{J_n} y, \quad [11.242]$$

y en la cara anterior:

$$\sigma + d\sigma = \frac{M + dM}{J_n} y. \quad [11.243]$$

Las fuerzas elementales $(\sigma + d\sigma)dF$ y σdF admiten dos resultantes coaxiales, cuyas expresiones son:

$$N + dN = \int_{(h/2)-t}^{h/2} \frac{z(M + dM)}{J_n} y dy. \quad [11.244]$$

para la cara anterior y:

$$N = \int_{(h/2)-t}^{h/2} \frac{z}{J_n} M y dy \quad [11.245]$$

para la posterior. Por ser de signo contrario, su suma nos da la fuerza dN que tiende a deslizar la parte externa del ala con respecto al resto del perfil según el plano π , cuya expresión es:

$$dN = \int_{(h/2)-t}^{(h/2)} z y \frac{dM}{J_n} dy \quad [11.246]$$

o también:

$$dN = \frac{dM}{J_n} \int_{(h/2)-t}^{h/2} z y dy = z \frac{dM}{J_n} \frac{y^2}{2} \Big|_{(h/2)-t}^{h/2} \quad [11.247]$$

En esta expresión la integral representa el momento estático respecto del eje neutro de la parte de ala de base z .

Reemplazando los límites de integración llegamos finalmente a:

$$dN = \frac{S_n^z}{J_n} dM = \frac{dM}{J_n} \cdot \frac{z t}{2} (h - t). \quad [11.248]$$

Ahora bien, en la cara a, b, c, d se originan tensiones τ_{zx} de resbalamiento longitudinal, opuestas al deslizamiento, que suponemos paralelas al eje x y uniformemente distribuidas sobre la cara. Estas tensiones conducen a un esfuerzo resultante $\tau_{zx} \cdot t \cdot dx$, que por razones de equilibrio debe ser igual a dN :

$$\frac{dM}{J_n} S_n^z = \tau_{zx} t dx = dM \cdot \frac{z}{2} t \frac{(h - t)}{J_n}. \quad [11.249]$$

de donde:

$$\tau_{zx} = \frac{dM}{dx} \frac{S_n^z}{t \cdot J_n} = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{z}{2} \cdot \frac{(h - t)}{J_n} \quad [11.250]$$

Recordando que $Q = dM/dx$ y teniendo en cuenta el valor de J_n dado por la [11.234] obtenemos finalmente:

$$\tau_{zx} = \frac{6Q(h-t)z}{bh^3 \left[1 - \left(1 - \frac{e}{b}\right) \left(1 - \frac{2t}{h}\right)^3 \right]}. \quad [11.251]$$

Ahora bien, de acuerdo con el teorema de Cauchy, en el plano del ala se originan tensiones $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ que, de acuerdo con la [11.251] varían linealmente desde cero (extremo del ala, para $z = 0$) hasta un máximo en correspondencia con el borde del alma, donde $z = \frac{1}{2}(b - e)$:

$$\tau_{xz \text{ máx.}} = \frac{3Q(h-t)(b-e)}{bh^3 \left[1 - \left(1 - \frac{e}{b}\right) \left(1 - \frac{2t}{h}\right)^3 \right]}. \quad [11.252]$$

La figura 11.46 muestra los diagramas correspondientes a las cuatro semi-alas, donde es fácil de ver que, para las semialas superiores, sujetas a tensiones normales de compresión, las tensiones τ_{xz} están dirigidas hacia el eje del perfil, es decir hacia el alma, mientras que para las inferiores, por ser las tensiones normales de tracción, las tensiones τ_{xz} cambian de signo y se alejan del eje del perfil.

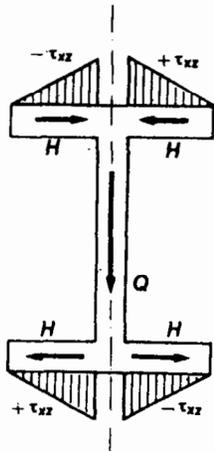


Fig. 11.46

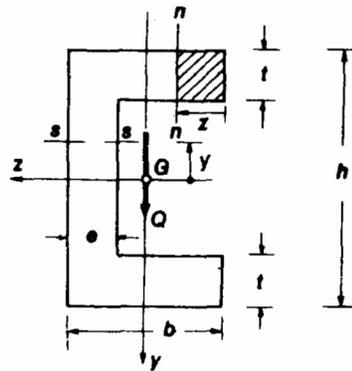


Fig. 11.47

Razones de simetría hacen que, para cada una de las alas, los esfuerzos horizontales H derivados de las tensiones τ_{xz} se anulen entre sí por ser opuestos y el esfuerzo de corte Q se equilibre prácticamente con la resultante de los esfuerzos elementales originados en el alma por las tensiones τ_{xy} .

11.5.9. Centro de corte ←

Consideremos el perfil C de figura 11.47, sujeto a flexión y corte, y en el que la línea de fuerzas coincide con el eje y , principal de inercia pero *no de simetría*. Admitamos por un momento que, para esta sección sea válida la teoría de Jouravski. Con la notación de la figura tenemos:

$$\left. \begin{aligned} J_n &= \frac{bh^3}{12} \left[1 - \left(1 - \frac{e}{b}\right) \left(1 - \frac{2t}{h}\right)^3 \right] \\ S_n^y &= \frac{e}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) + (b - e) \frac{t}{2} (h - t) \end{aligned} \right\} \quad [11.253]$$

de donde, para el nivel y , las tensiones tangenciales τ_{xy} en el alma resultan:

$$\tau_{xy} = \frac{6Q \left[e \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) + (b - e) t (h - t) \right]}{ebh^3 \left[1 - \left(1 - \frac{e}{b}\right) \left(1 - \frac{2t}{h}\right)^3 \right]} \quad [11.254]$$

Para el corte $n-n$ del ala superior, situado a una distancia z del extremo de la misma, se tiene:

$$S_n^z = z \int_{(h/2) - t}^{h/2} y \, dy = z (h - t) \frac{t}{2} \quad [11.255]$$

Como puede observarse, tanto la expresión de J_n como la de S_n^z son las mismas que las establecidas para la sección doble T en el párrafo anterior. Ello es lógico, por cuanto ambas secciones sólo difieren en la posición relativa del alma respecto al eje baricéntrico vertical. En consecuencia:

$$\tau_{xz} = \frac{Q S_n^z}{J_n t} = \frac{6Q (h - t) z}{bh^3 \left[1 - \left(1 - \frac{e}{b}\right) \left(1 - \frac{2t}{h}\right)^3 \right]} \quad [11.256]$$

La figura 11.48 *a* muestra la distribución de las tensiones τ_{xy} en el alma y τ_{xz} en las alas; las flechas indican sus respectivos sentidos.

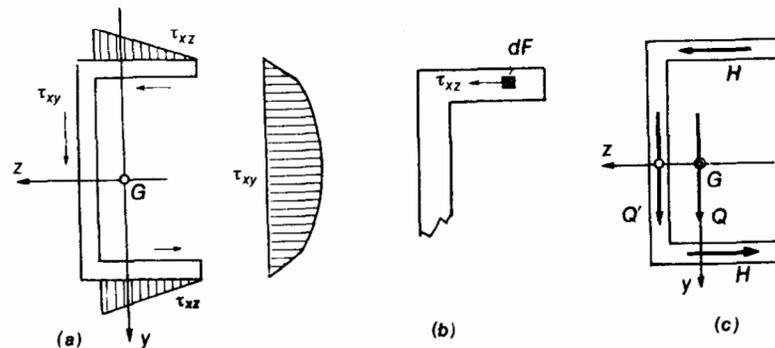


Fig. 11.48

La distribución de las tensiones τ_{xz} sobre las alas es triangular y su valor máximo, en correspondencia con la unión del ala con el alma, es decir, para $z =$

$$\tau_{xz \text{ máx.}} = \frac{6Q(h-t)(b-e)}{bh^3 \left[1 - \left(1 - \frac{e}{b}\right) \left(1 - \frac{2t}{h}\right)^3 \right]} \quad [11.257]$$

y la fuerza resultante sobre toda la superficie del ala:

$$H = \frac{1}{2} (b-e)t \tau_{xz \text{ máx.}} \quad [11.258]$$

Por razones de simplicidad, expresaremos $\tau_{xz \text{ máx.}}$ en función de J_n :

$$\tau_{xz} = \frac{Q(h-t)}{2J_n} z \quad [11.259]$$

$$\tau_{xz \text{ máx.}} = \frac{Q(h-t)(b-e)}{2J_n}$$

y reemplazando en [11.258]:

$$H = \frac{Q(h-t)t(b-e)^2}{4J_n} \quad [11.260]$$

Las fuerzas horizontales H , iguales en valor absoluto para ambas alas pero de signos contrarios, tienen los sentidos que aparecen en figura 11.48 c cuando Q , esfuerzo de corte, tiene sentido positivo, dirigido hacia abajo. Ambas forman un par de momento:

$$M_H = H(h-t) = \frac{Q(h-t)^2(b-e)^2 t}{4J_n} \quad [11.261]$$

El esfuerzo Q' , resultante de los esfuerzos elementales en el alma, es, como dijimos, igual al esfuerzo de corte Q .

Analizaremos a continuación si se cumplen o no las condiciones de equivalencia entre los esfuerzos exteriores e interiores de la sección. Los primeros son el momento flexor M_z y el esfuerzo de corte Q . Los esfuerzos interiores son las dos fuerzas H , la resultante Q' de los esfuerzos en el alma y las resultantes D y Z del diagrama de tensiones normales. Las condiciones de equivalencia las expresaremos en forma de tres ecuaciones de igualdad de proyecciones sobre los tres ejes x , y , z , fig. 11.49', y tres ecuaciones de igualdad de momentos respecto de los mismos ejes, es decir:

1) proyección sobre el eje x :

$$Z - D = 0$$

2) proyección sobre el eje y :

$$Q' = Q$$

3) proyección sobre el eje z :

$$H - H = 0$$

4) momento respecto del eje z :

$$D \cdot z = Z \cdot z = M_z$$

5) momento respecto del eje y :

$$0 = 0$$

6) momento respecto del eje x :

$$Q' \cdot \delta' + H \cdot (h-t) \neq 0 \quad [11.262]$$

Como puede observarse, la última de las condiciones de equivalencia no se satisface; en consecuencia, la hipótesis de la que partimos, la aplicabilidad a esta sección de la teoría de Jouravski, no es válida. De modo que no podemos admitir la hipótesis de Bernoulli-Navier de la conservación de las secciones planas, lo que por otra parte resulta evidente. En efecto, la sección está solicitada por un par torsor cuyo momento es igual a M_H dado por la [11.261] y en consecuencia se alabea.

Por tratarse de una sección cuyos elementos constituyentes son de poco espesor el alabeo es considerable y las tensiones normales secundarias inducidas, pueden llegar a ser de importancia y deben sumarse a las debidas a la flexión.

La forma de calcular las tensiones normales debidas al par ficticio de torsión ha sido tratada anteriormente en el capítulo correspondiente a Torsión.

Si el plano de flexión en lugar de pasar por el baricentro G de la sección, lo hace por un punto O (fig. 11.49) situado sobre el eje de simetría de la sección y desplazado de la recta de acción de Q' de una distancia $\delta = M_H/Q' = M_H/Q$ hacia la izquierda de la sección, de modo que exista coincidencia de signos de los momentos M_H y de Q aplicado en O respecto del eje x , entonces la 6a. de las [11.262] se satisface como es fácil de observar. En consecuencia, será válida la teoría de Jouravski, y las tensiones de τ_{xy} y τ_{xz} podrán determinarse mediante la fórmula de Coignon.

Al punto O determinado en la forma indicada se lo denomina *centro de corte* de la sección.

Cuando se trata de un perfil ángulo de alas iguales, para el que la línea de fuerzas coincide con el eje de momento de inercia mínimo (fig. 11.50) el centro de corte coincide con la intersección de las líneas medias de las alas. En efecto, en cada una de ellas, las tensiones tangenciales deben estar dirigidas según los ejes de las mismas y en consecuencia los esfuerzos totales tienen dicha dirección y su resultante pasa por la intersección de sus respectivas rectas de acción que coinciden con los ejes de alas del perfil.

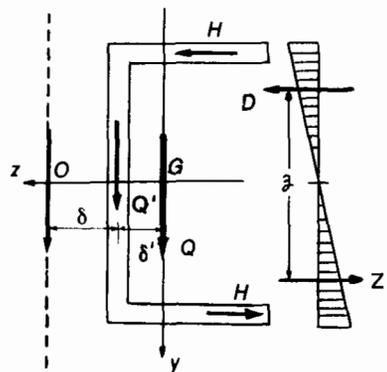


Fig. 11.49

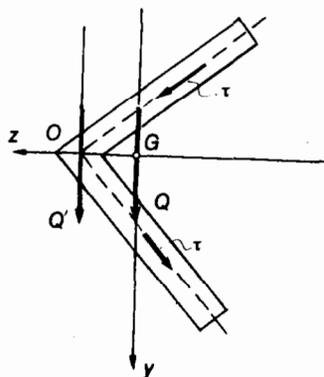


Fig. 11.50

Consideremos ahora el caso de un perfil doble T asimétrico y supongamos que la línea de fuerzas coincide con el eje de momento de inercia mínimo (fig. 11.51).

Para un nivel $s_1 - s_1$, en las alas mayores tenemos

$$\tau'_{xy} = \frac{Q S_n'^y}{t_1 J_n} \tag{11.263}$$

y para el $s_2 - s_2$ en las menores :

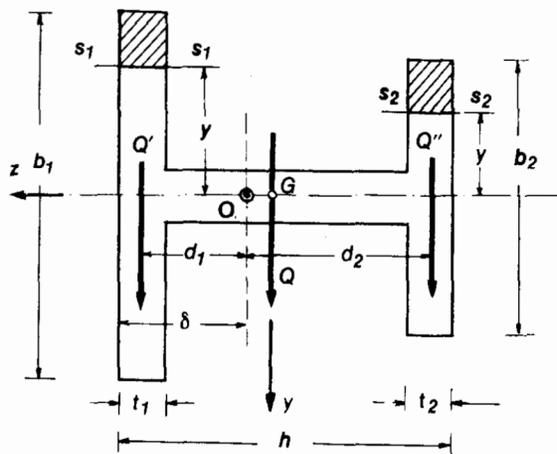


Fig. 11.51

$$\tau''_{xy} = \frac{Q S_n''y}{t_2 J_n} \tag{11.264}$$

Las tensiones máximas corresponden al eje neutro, para el que:

$$\left. \begin{aligned} S_n'^y &= \frac{t_1 b_1^2}{8} \\ S_n''y &= \frac{t_2 b_2^2}{8} \end{aligned} \right\} \tag{11.265}$$

y reemplazando:

$$\left. \begin{aligned} \tau'_{xy \text{ máx.}} &= \frac{Q b_1^2}{8 J_n} \\ \tau''_{xy \text{ máx.}} &= \frac{Q b_2^2}{8 J_n} \end{aligned} \right\} \tag{11.266}$$

Las fuerzas resultantes Q' y Q'' sobre cada una de las alas valen:

$$Q' = \frac{2}{3} t_1 b_1 \tau'_{xy \text{ máx.}} = \frac{Q}{J_n} \cdot \frac{t_1 b_1^3}{12} \tag{11.267}$$

$$Q'' = \frac{2}{3} t_2 b_2 \tau''_{xy \text{ máx.}} = \frac{Q}{J_n} \cdot \frac{t_2 b_2^3}{12}$$

La resultante de ambas, cortará al eje horizontal de simetría en el centro de torsión O . Si llamamos d_1 y d_2 las distancias a éste desde las rectas de acción de Q' y Q'' , debemos tener por tratarse de un sistema de fuerzas paralelas:

$$Q' d_1 = Q'' d_2 \tag{11.268}$$

o también:

$$\frac{Q}{J_n} \cdot \frac{t_1 b_1^3}{12} d_1 = \frac{Q}{J_n} \cdot \frac{t_2 b_2^3}{12} d_2 \tag{11.269}$$

y finalmente, simplificando y recordando que $J_1 = t_1 b_1^3/12$ y $J_2 = t_2 b_2^3/12$ son los valores de los momentos de inercia de las alas respecto del eje neutro:

$$J_1 d_1 = J_2 d_2 \tag{11.270}$$

Pero

$$\left. \begin{aligned} d_1 + d_2 &= h - \frac{1}{2} (t_1 + t_2) \\ d_2 &= h - \frac{1}{2} (t_1 + t_2) - d_1 \end{aligned} \right\} \tag{11.271}$$

de donde:

$$d_1 = \frac{J_2}{J_1} \left[h - \frac{1}{2} (t_1 + t_2) - d_1 \right] \quad [11.272]$$

$$d_1 = \frac{\left[h - \frac{1}{2} (t_1 + t_2) \right] \frac{J_2}{J_1}}{1 + \frac{J_2}{J_1}} \quad [11.273]$$

y con respecto al borde del ala mayor:

$$\delta = \frac{t_1}{2} + \frac{\left[h - \frac{1}{2} (t_1 + t_2) \right] \frac{J_2}{J_1}}{1 + \frac{J_2}{J_1}} \quad [11.274]$$

11.6. Las tensiones principales en flexión y corte

Sea figura 11.52, una sección solicitada por flexión y corte, que, por razones de simplicidad supondremos rectangular.

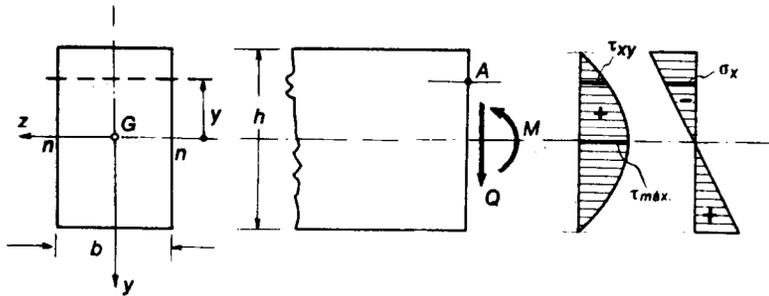


Fig. 11.52

En las fibras situadas a una distancia y del eje neutro actuarán una tensión normal σ_x y una tangencial τ_{xy} que, para los sentidos de M y Q indicados tendrán los signos que aparecen en los respectivos diagramas de fig. 11.52. Dichos valores serán constantes para todas las fibras situadas a un mismo nivel y , y si, por otra parte, consideramos que $\sigma_z = \sigma_y = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, podemos admitir que a los puntos A corresponde un estado elástico plano. Si ahora aislamos el prisma infinitésimo que corresponde a un punto A , su sollicitación será la que indica la figura 11.53 a.

El problema tiene por objeto determinar las tensiones principales y sus direcciones, para los distintos puntos de la sección.

En este caso, por ser $\sigma_y = 0$ su expresión genérica, es:

$$\sigma_{1,2} = -\frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad [11.275]$$

y su determinación gráfica resulta del trazado de la circunferencia de Mohr de figura 11.53 b. Sobre el plano principal $P-1$ actúa la tensión principal σ_1

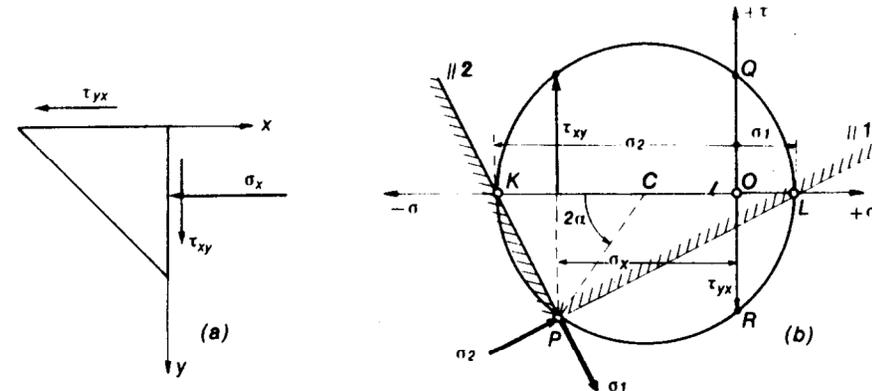


Fig. 11.53

de tracción y sobre el $P-2$, la σ_2 de compresión, cuyas direcciones son normales a los planos respectivos y aparecen indicadas con sus sentidos en la figura.

Desarrollaremos a continuación una construcción gráfica simple, debida a M. Ritter, conocida como *diagrama de Ritter* que permite, conocidos los diagramas de σ_x y τ_{xy} para la sección determinar los correspondientes a σ_1 y σ_2 y además, sus direcciones.

Sea la sección $S-S'$ de una viga sujeta a flexión y corte, y AGA' y SLS' los diagramas de tensiones normales σ_x y tangenciales τ_{xy} respectivamente. Tracemos la recta BGB' , cuyas ordenadas respecto de $S-S'$ representan los valores $\frac{1}{2} \sigma_x$. Para un nivel cualquiera y , la paralela al eje baricéntrico en su intersección con los diagramas $\frac{1}{2} \sigma_x$, τ_{xy} y el eje $S-S'$ define los puntos C , N' y O respectivamente. Con centro en O y radio ON rebatimos N sobre $S-S'$ obteniendo Q y con centro en C trazamos la semicircunferencia KQL , de radio CQ .

Los segmentos \overline{OL} y \overline{OK} representan, respectivamente σ_1 y σ_2 , tensiones principales. En efecto, por construcción tenemos que $\overline{OQ} = \overline{ON} = \tau_{xy}$; $\overline{OC} = \frac{1}{2} \sigma_x$; $\overline{CQ} = \sqrt{\frac{1}{4} \sigma_x^2 + \tau_{xy}^2} = \overline{CK} = \overline{CL}$.

En consecuencia: