

## 7 Momento Torsor

### 7.1 Introducción

Una pieza prismática está sometida a *torsión simple* cuando sobre sus secciones actúa únicamente un momento resultante que tiene componente sólo según el eje  $x$  de la pieza, es decir, un *momento torsor*,  $M_t$  (ver Figura 7.1). En el caso particular de que el momento torsor actuante sea constante a lo largo de la pieza, se dice que el estado es de *torsión pura*.

Recordemos que la determinación del momento torsor debe hacerse respecto al centro de esfuerzos cortantes  $C$  de la sección, para poder determinar de esa manera el *momento torsor real* que actúa sobre ella (ver Sección 6.8 dedicada al *centro de esfuerzos cortantes* en el Capítulo precedente). En este Capítulo se entenderá siempre que el momento torsor  $M_t$  al que se hace referencia es el momento torsor *real* y, por tanto, se prescindirá del calificativo correspondiente.

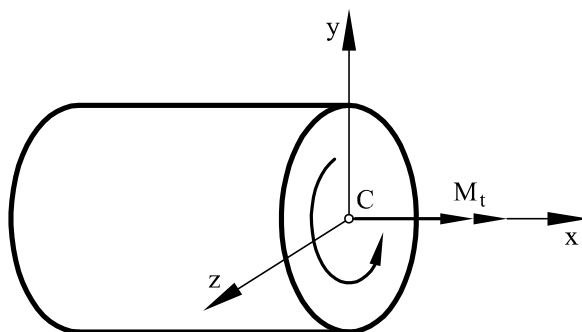


Fig. 7.1: Pieza sometida a momento torsor

La actuación de un momento torsor sobre la sección implica la aparición de tensiones tangenciales sobre la sección, de tal forma que se cumplan las relaciones integrales:

$$\vec{T} = \int_S \vec{\tau} \, dS = 0 \quad ; \quad \vec{M}_t = \int_S \vec{r}_c \times \vec{\tau} \, dS \quad (7.1)$$

donde  $\vec{r}_c$  es el vector de posición respecto al centro de esfuerzos cortantes. Como en casos anteriores, dichas ecuaciones no bastan para determinar la distribución de tensiones tangenciales, por lo que es necesario hacer hipótesis sobre la deformación de la rebanada, cuya validez debe ser avalada por la experiencia.

El estudio general de piezas prismáticas sometidas a momento torsor es un tema complejo que escapa de las hipótesis fundamentales en las que se basa la Resistencia de Materiales. La dificultad principal consiste en que, en general, las secciones sometidas a torsión no permanecen planas, sino que sufren deformación fuera de su plano, fenómeno conocido con el nombre de *alabeo*. En función de este hecho, se distingue entre *torsión uniforme*, cuando el alabeo relativo es despreciable, y *torsión no uniforme*, cuando el alabeo relativo debe ser considerado.

La torsión uniforme se estudia mediante la teoría de Coulomb, válida para secciones en las que no se produce alabeo de la sección, y la teoría de Saint-Venant, más general, válida para situaciones sin alabeo relativo. Ambas teorías son compatibles con el planteamiento general de la Resistencia de Materiales. Por el contrario, cuando el alabeo relativo es relevante *no se cumple el principio de Saint-Venant*, es decir, las tensiones en una sección no dependen exclusivamente del valor del momento torsor sobre ella. En estas situaciones el estudio queda, estrictamente hablando, fuera del campo de aplicación de la Resistencia de Materiales. El problema se puede resolver con un planteamiento *ad hoc* adecuado, lo que se conoce como *teoría de la torsión no uniforme*, o mediante el planteamiento general de la teoría de la elasticidad.

En este Capítulo se estudiará en detalle la torsión simple de barras cilíndricas de sección circular, mediante la teoría de Coulomb. Se introducirá, asimismo, la teoría de Saint-Venant para torsión uniforme, y se describirán las analogías oportunas para considerar la torsión de piezas de sección arbitraria, obteniéndose resultados de interés práctico para el estudio de perfiles de pequeño espesor, tanto abiertos como cerrados. En resumen, en lo que sigue se tratará fundamentalmente el caso de torsión uniforme; aunque en la Sección 7.4 se describe brevemente el tratamiento de situaciones de torsión no uniforme, se deja para los libros especializados el tratamiento detallado de ésta.

Debe recordarse que, adicionalmente al momento torsor, pueden actuar sobre la sección esfuerzos axiales, flectores y cortantes. En tal caso, y suponiendo que el principio de superposición es aplicable, los resultados obtenidos en este Capítulo para la torsión uniforme deben completarse con los obtenidos en los Capítulos anteriores.

## 7.2 Torsión de Coulomb

### 7.2.1 Sección circular

Consideremos una pieza prismática recta de sección circular constante, sometida a un estado de *torsión pura* bajo la acción de dos momentos  $M_t$ , iguales y de sentidos opuestos, aplicados en sus secciones extremas.

Sencillas consideraciones geométricas, basadas en la simetría de la pieza y de la sollicitación (ver Figura 7.2), nos permiten asegurar que, para este caso, en la deformación por torsión:

- las secciones rectas giran alrededor de su centro de gravedad, por simetría axial respecto al eje de la pieza.
- las secciones rectas se conservan circulares y planas en la deformación. En efecto, las secciones deben permanecer circulares por simetría axial respecto al eje de la pieza. Además, deben permanecer planas por simetría de la sollicitación respecto de cualquier sección recta.
- los radios de la sección se conservan rectos en la deformación, por simetría de la sollicitación respecto de cualquier sección recta.

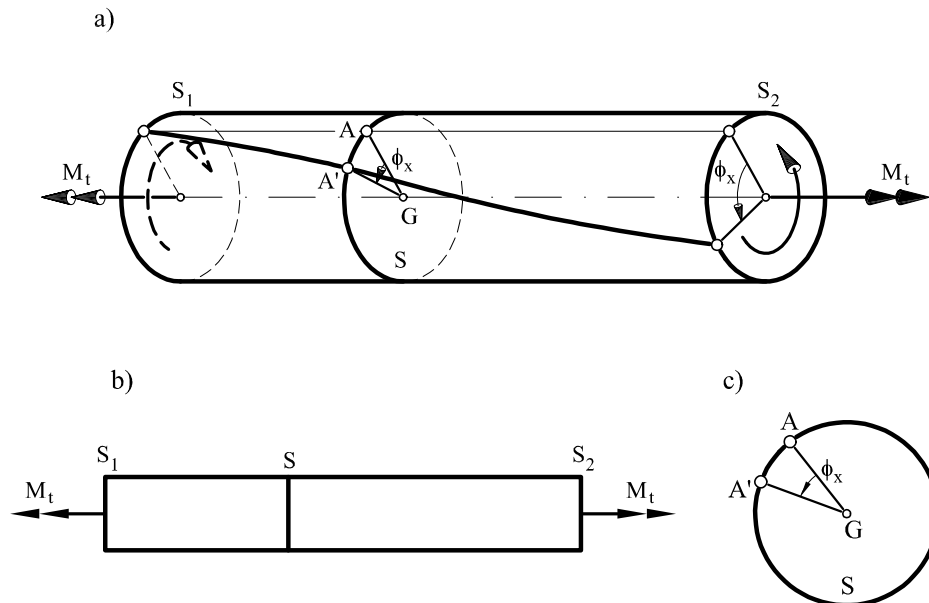


Fig. 7.2: Pieza de sección circular sometida a torsión pura

- el ángulo entre dos radios cualesquiera de la sección permanece inalterado en la deformación, por simetría axial respecto al eje de la pieza.

En resumen, la deformación por torsión de piezas rectas de sección circular se puede describir mediante la hipótesis de C. A. de Coulomb (1784), que puede enunciarse:

“en una pieza recta de sección circular sometida a torsión pura, la deformación es tal que cada sección gira alrededor de su centro sin deformarse en su plano y sin alabearse, como si fuera un disco rígido. Las fibras longitudinales de la pieza se deforman en hélices”.

Bajo la hipótesis de pequeños movimientos y deformaciones, los giros de torsión son suficientemente pequeños y la curvatura de los arcos de hélice de las fibras deformadas puede suponerse despreciable, es decir, éstos pueden suponerse rectilíneos.

La hipótesis de deformación de Coulomb puede verificarse experimentalmente y concuerda con los resultados de la Teoría de la Elasticidad, incluso cuando el momento torsor es variable a lo largo del eje de la pieza, es decir, en situaciones de *torsión simple*.

Obsérvese, por último, que la hipótesis de Coulomb es puramente geométrica, es decir, no presupone comportamiento elástico del material de la pieza. En lo que sigue supondremos que el material es elástico y, además, que la ley de Hooke es aplicable.

Analicemos una rebanada diferencial de longitud  $dx$  de una pieza prismática de sección circular sometida a *torsión simple*, tal como se muestra en la Figura 7.3a. Consideremos en ella el elemento diferencial  $ABCD$ , situado sobre un cilindro de radio  $\rho$ , concéntrico con el eje de la pieza; dicho elemento se deformará a torsión según el “paralelogramo”  $ABC'D'$  de la Figura 7.3b, donde  $AC'$  y  $BD'$  son segmentos de hélice de longitud infinitesimal, por lo que pueden considerarse rectilíneos. La deformación angular del elemento vendrá dada por:

$$\gamma \simeq \tan \gamma = \frac{\overline{CC'}}{\overline{AC}} = \frac{\rho d\phi_x}{dx} = \rho \theta \quad (7.2)$$

donde se ha introducido el ángulo de torsión,  $\phi_x$ , y el ángulo de torsión por unidad de longitud,  $\theta = d\phi_x/dx$ . Obsérvese que el giro de torsión,  $\phi_x$ , es un ángulo, por tanto, es adimensional, y se mide en radianes [rad]. Por el contrario, el giro de torsión por unidad de longitud,  $\theta$ , es un ángulo por unidad de longitud y se mide en [rad/L].

Se tiene, por consiguiente, que las distorsiones son proporcionales a  $\rho$ :

$$\gamma = \rho \theta \quad (7.3)$$

De acuerdo con la ley de Hooke, las tensiones tangenciales en el elemento  $ABCD$  son proporcionales a las deformaciones, de la forma:

$$\tau = G \gamma = G \rho \theta \quad (7.4)$$

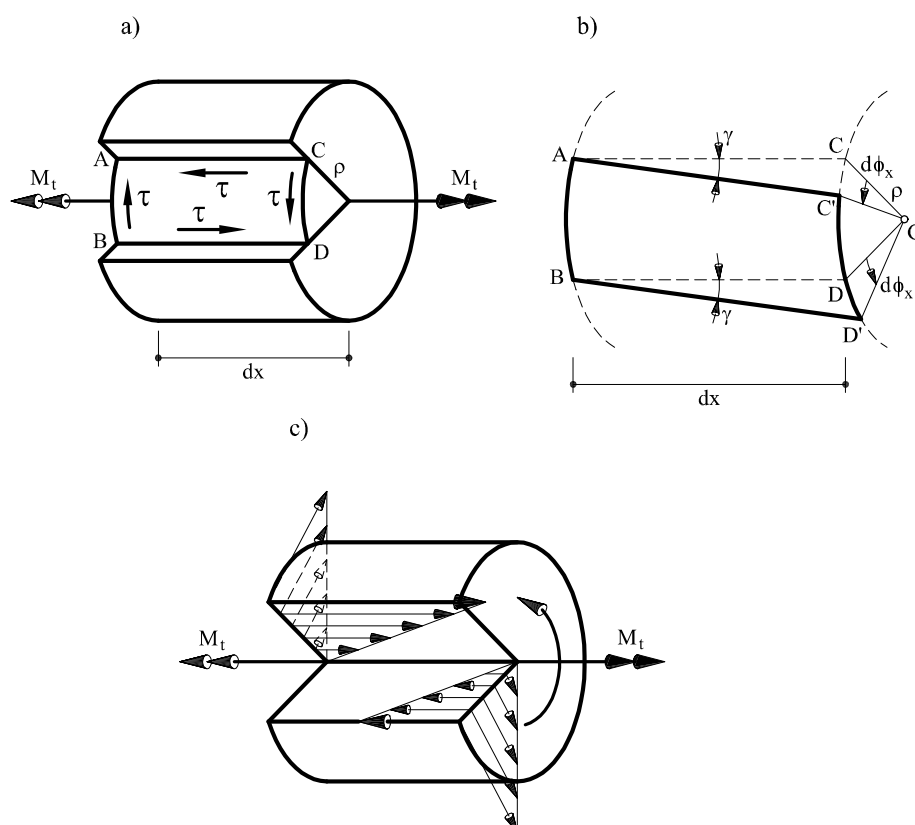


Fig. 7.3: Rebanada sometida a torsión de Coulomb

donde  $G$  es el módulo de rigidez a cortante del material. Estas tensiones tangenciales tienen las direcciones y sentidos que se muestran en las Figuras 7.3a y c. Se observa que las tensiones tangenciales en un punto de la sección son perpendiculares al radio que pasa por dicho punto, y que varían linealmente con la distancia  $\rho$  al centro de la sección. Por tanto, los valores máximos se dan en el contorno de ésta.

El momento resultante de las tensiones tangenciales debe ser igual al momento torsor actuante  $M_t$ ; por consiguiente:

$$M_t = \int_S \rho \tau \, dS = \int_S G \theta \rho^2 \, dS = G \theta \int_S \rho^2 \, dS = G \theta I_p \quad (7.5)$$

donde  $I_p$  es el momento polar de inercia de la sección circular. Para un círculo de radio  $r$ , es  $I_p = \pi r^4/2$ , y el giro de torsión por unidad de longitud  $\theta$  vale:

$$\theta = \frac{M_t}{G I_p} \quad (7.6)$$

El producto  $GI_p$  se denomina *rigidez torsional* de la sección. Sustituyendo este valor en la expresión (7.4) de las tensiones tangenciales, se obtiene:

$$\tau = \frac{M_t \rho}{I_p} \quad (7.7)$$

Por tanto, en una sección circular el valor de la tensión tangencial máxima se da en la circunferencia exterior y su valor viene dado por la expresión:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t r}{I_p} = \frac{2M_t}{Ar} = \frac{M_t}{W_t} \quad (7.8)$$

Por analogía con la teoría de flexión, al valor  $W_t = I_p/r = Ar/2 = \pi r^3/2$  se le llama *módulo de torsión* de la sección.

Es interesante resaltar que los elementos diferenciales tales como el de la Figura 7.4 están sometidos a cortante puro. A este estado tensional le corresponden tensiones principales  $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{\max}$  en direcciones a  $\pm 45^\circ$  con el eje longitudinal de la pieza. Si el material de la pieza tiene resistencias a tracción y compresión de valores parecidos, la rotura a torsión se produce en un plano perpendicular al eje de la pieza, cuando la tensión tangencial máxima alcanza el valor de rotura. Este tipo de rotura es común en la mayoría de los metales y generalmente es de carácter dúctil. Por el contrario, si el material de la pieza resiste menos a tracción que a compresión la rotura se produce por tracción, apareciendo grietas helicoidales a  $45^\circ$  con el eje de la pieza. Este tipo de rotura es, generalmente, de carácter frágil y se da en materiales como el hierro fundido, el hormigón o las rocas.

Obsérvese también que la distribución de tensiones encontrada cumple la igualdad:

$$\vec{T} = \int_S \vec{\tau} dS \equiv 0 \quad (7.9)$$

debido a la simetría radial de la distribución de tensiones tangenciales sobre la sección.

El giro total de la pieza debido a torsión, entre sus secciones extremas, es:

$$\phi_x = \int_l \theta dx = \int_0^l \frac{M_t(x)}{G I_p(x)} dx \quad (7.10)$$

donde  $l$  es la longitud total de la pieza. En el caso particular de torsión pura y pieza de sección constante, el giro total de torsión resulta:

$$\phi_x = \frac{M_t l}{G I_p} \quad (7.11)$$

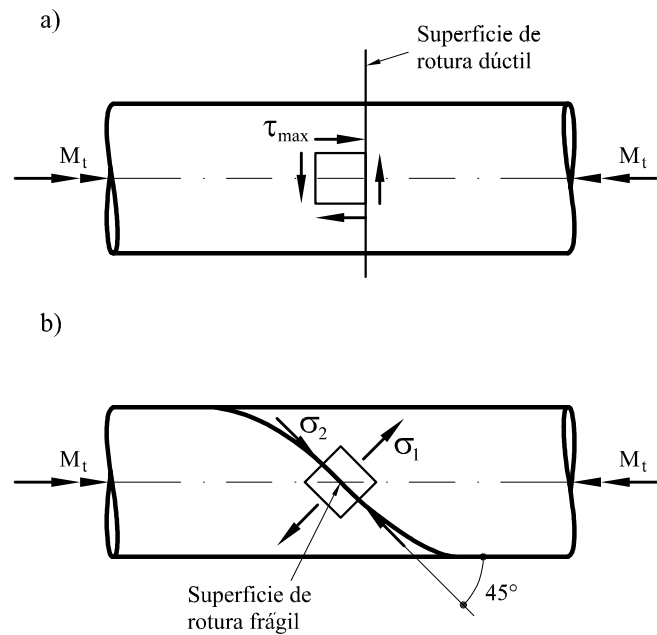


Fig. 7.4: Superficies de rotura de pieza sometida a torsión de Coulomb: (a) rotura dúctil, (b) rotura frágil

NO

### 7.2.2 Sección circular de varios materiales

Consideremos una sección circular formada por varios materiales dispuestos de forma concéntrica, esto es, consideremos que la sección recta de la pieza está dividida en varias zonas  $\Omega_i$ , cada una de las cuales corresponde a un material que tiene un módulo de rigidez transversal  $G_i$ , tal como se muestra en la Figura 7.5a.

Consideremos también un *material de referencia*, que puede ser o no igual a uno de los materiales componentes de la pieza, y que tiene un módulo de rigidez transversal  $\bar{G}$ . Para cada material de la sección se puede definir un *coeficiente de equivalencia* con el material de referencia de la forma  $n_i = G_i / \bar{G}$ .

Las consideraciones geométricas que conducen a la hipótesis de Coulomb y la expresión de las distorsiones angulares derivada de ella, ecuación (7.5), obtenida en la Sección anterior, es obviamente aplicable también en este caso. Así, de acuerdo con la ley de Hooke, la tensión tangencial en un punto de la sección es proporcional a las deformaciones, de la forma:

$$\tau = G \gamma = n \bar{G} \gamma = n \bar{G} \rho \theta \quad (7.12)$$

El momento resultante de las tensiones tangenciales debe ser igual al momento torsor actuante  $M_t$ :

$$M_t = \int_S \rho \tau \, dS = \int_S n \bar{G} \theta \rho^2 \, dS = \bar{G} \theta \int_S \rho^2 n \, dS = \bar{G} \theta \bar{I}_p \quad (7.13)$$

donde  $\bar{I}_p$  es el momento polar de inercia *mecánica* de la sección circular. Por tanto, el giro de torsión por unidad de longitud  $\theta$  vale:

$$\theta = \frac{M_t}{\bar{G} \bar{I}_p} \quad (7.14)$$

Sustituyendo este valor en la expresión (7.12) de las tensiones tangenciales se obtiene:

$$\tau = n \frac{M_t \rho}{\bar{I}_p} \quad (7.15)$$

La distribución correspondiente de tensiones tangenciales es lineal “a trozos”. En la Figura 7.5a se muestra esta distribución para una sección compuesta de dos materiales tales que  $G_1 < G_2$ .

### 7.2.3 Sección circular hueca

La distribución lineal de tensiones tangenciales obtenida para una sección circular maciza permite observar que en dicha sección el material está poco aprovechado, ya que si el radio de la sección se dimensiona para que las fibras exteriores trabajen a la

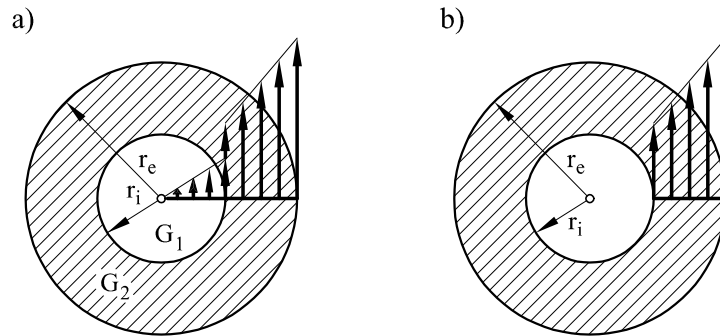


Fig. 7.5: Distribución de tensiones: (a) sección circular de varios materiales  
(b) sección circular hueca



tensión admisible, las fibras interiores trabajarán a una tensión considerablemente inferior. Puede conseguirse un mejor aprovechamiento del material utilizando una sección circular hueca.

Consideremos una sección circular hueca, con  $r_e$  y  $r_i$  como radios exterior e interior de la sección, respectivamente, tal como se muestra en la Figura 7.5b. Las consideraciones geométricas y las expresiones obtenidas en las dos Secciones anteriores son, obviamente, aplicables también en este caso. De hecho, la sección hueca puede considerarse “compuesta” por dos materiales, de los cuales el material “interior” tiene un coeficiente de equivalencia nulo, y la distribución de tensiones en una sección tubular es la representada en la Figura 7.5b.

El momento de inercia polar  $I_p$  y el módulo de torsión de la sección hueca valen:

$$I_p = \frac{\pi (r_e^4 - r_i^4)}{2} \quad \text{y} \quad W_t = \frac{I_p}{r_e} = \frac{\pi (r_e^4 - r_i^4)}{2 r_e} \quad (7.16)$$

Además, si el espesor de la sección es pequeño en relación al radio exterior se tiene:

$$r_e^4 - r_i^4 = (r_e^2 + r_i^2)(r_e + r_i)(r_e - r_i) \simeq 4 r_m^3 e \quad (7.17)$$

donde  $r_m$  es el radio de la línea media de la sección ( $r_m = (r_e + r_i)/2$ ) y  $e$  es el espesor ( $e = r_e - r_i$ ). Ahora, se puede aproximar

$$I_p \simeq 2\pi r_m^3 e = A r_m^2 \quad \text{y} \quad W_t = \frac{I_p}{r_m} \simeq A r_m \quad (7.18)$$

con  $A = 2\pi r_m e$ , igual al área de la sección. De esta manera, en una sección circular hueca de pequeño espesor, la tensión tangencial debida al momento torsor  $M_t$  se puede considerar *uniforme* en toda la sección y de valor:

$$\tau_{med} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{A r_m} \quad (7.19)$$

Se observa así que el material está muy bien aprovechado en las secciones tubulares de pequeño espesor solicitadas a torsión, ya que todo el material está sometido a tensión prácticamente uniforme.

## 7.3 Torsión de Saint-Venant

### 7.3.1 Formulación general

Como hemos visto, la solución del problema de la torsión de una pieza de sección circular se obtiene admitiendo como hipótesis de deformación que las secciones rectas de la pieza

nula en dichos puntos, y las trayectorias de tensión son como las de la Figura 7.10a; las tensiones máximas se dan en los puntos medios de los lados más largos,  $E_1$  y  $F_1$ , donde la pendiente de la membrana es máxima. Por consideraciones análogas se deduce que en una sección como la de la Figura 7.10b, la tensión es nula en los ángulos salientes ( $A_2, B_2, C_2, D_2, E_2$ ) e infinita en los ángulos entrantes ( $F_2$ ). En la práctica, se evita este tipo de singularidad redondeando los ángulos entrantes. En la Figura 7.10c se muestran las trayectorias de tensión para una sección circular hueca; por simetría central, éstas resultan ser circunferencias concéntricas, resultado coincidente con la teoría de Coulomb.

### 7.3.3 Sección rectangular

La solución del problema de torsión uniforme en piezas de sección rectangular puede obtenerse de forma analítica resolviendo la ecuación (7.21) sobre un dominio rectangular. Sin embargo los métodos que hay que utilizar están más allá del nivel de desarrollo matemático utilizado en este libro. Sin embargo, los resultados de dicho análisis son de indudable valor práctico. A través de la analogía de la membrana se tiene una imagen cualitativa de las trayectorias de tensión obtenidas, esto es, de la dirección de las tensiones tangenciales, que son como las mostradas en la Figura 7.10a. El módulo de la tensión en cada punto de la sección es proporcional a la pendiente de la membrana en dicho punto; la Figura 7.6b muestra una imagen cualitativa del valor de las tensiones a lo largo de algunas rectas radiales.

Para una sección rectangular de lados  $b \times c$ , donde  $b$  es el lado más largo, la máxima tensión tangencial se da en los puntos medios de los lados más largos del rectángulo y vale:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\alpha bc^2} \quad (7.26)$$

donde  $\alpha$  es un valor que depende de la relación  $b/c > 1$ . El giro de torsión por unidad de longitud vale

$$\theta = \frac{M_t}{G \beta bc^3} \quad (7.27)$$

donde  $\beta$  también depende de la relación  $b/c$ . La Tabla 7.1 proporciona valores de los

$b/c$	1	1.5	2	3	6	10	$\infty$
$\alpha$	0,208	0,231	0,246	0,267	0,299	0,312	0,333
$\beta$	0,141	0,196	0,229	0,263	0,299	0,312	0,333

Tabla 7.1: Coeficientes para secciones rectangulares

coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  para varios valores de esta relación. Obsérvese que tanto  $\alpha$  como  $\beta$  tienden a valer  $1/3$  cuando el rectángulo es largo y estrecho.

### 7.3.4 Secciones rectangulares estrechas

La analogía de la membrana permite obtener una solución muy sencilla del problema de la torsión de una pieza prismática de sección rectangular estrecha de dimensiones  $b \times c$ , con  $b \gg c$ .

En efecto, si el rectángulo es suficientemente largo, se puede despreciar el efecto de los extremos de éste sobre la deformación de la membrana en zonas suficientemente alejadas de ellos. Esto equivale a decir que, salvo en las zonas próximas a los extremos, la función que describe la flecha de la membrana sólo depende de la coordenada  $z$  (ver Figura 7.11a), o sea, que es  $\phi = \phi(z)$ . Entonces la ecuación (7.22) se reduce a

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} = -\frac{q}{Q} \quad (7.28)$$

que puede integrarse fácilmente con las condiciones de contorno (ver Figura 7.11b):

$$\left(\frac{d\phi}{dz}\right)_{z=0} = 0 \quad ; \quad \left(\frac{d\phi}{dz}\right)_{z=c/2} = \tan \alpha = -\frac{q c/2}{Q} \quad (7.29)$$

para dar la solución:

$$\phi = \phi(z) = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{c}{2}\right)^2 - z^2 \right] \frac{q}{Q} \quad (7.30)$$

La membrana deformada es, por tanto, un cilindro de sección parabólica (ver Figura 7.11b), en el que la flecha máxima  $\delta$  es:

$$\delta = \phi(z=0) = \frac{c^2}{8} \frac{q}{Q} \quad (7.31)$$

Además, el volumen limitado por la membrana deformada y el plano  $yz$ , calculado como cilindro parabólico es:

$$V = \frac{2}{3} \delta c b = \frac{bc^3}{12} \frac{q}{Q} \quad (7.32)$$

Utilizando la analogía de la membrana y recordando que la relación de analogía es  $q/Q \doteq 2G\theta$ , se obtienen las siguientes expresiones válidas para el problema de torsión:

$$M_t = \frac{1}{3} bc^3 G\theta \doteq 2V \quad ; \quad \tau_{\max} = cG\theta \doteq \tan \alpha \quad (7.33)$$

Esta ecuación es, obviamente, análoga a la que define a la *función de tensión* de Prandtl en el problema de torsión uniforme. De dicha analogía se deduce que en un punto dado la velocidad del fluido y la tensión tangencial tienen la misma dirección y valores proporcionales. Por tanto, las líneas de corriente del problema hidrodinámico son idénticas a las trayectorias de tensión del problema de torsión. En particular, como la velocidad en los puntos del contorno es tangente a éste, lo mismo ocurre con las tensiones tangenciales. Además, si el contorno del dominio tiene ángulos convexos en ellos la velocidad es nula y, por consiguiente, la tensión también lo es. Esto concuerda con cuantos resultados hemos obtenido con la analogía de la membrana (ver Figuras 7.18 y 7.10).

### 7.3.7 Secciones cerradas de pequeño espesor

Sea una rebanada de una pieza de sección cerrada de pequeño espesor sometida a torsión uniforme y consideremos el equilibrio de un elemento diferencial como el de la Figura 7.19. Por ser el espesor pequeño y según nos sugiere la analogía hidrodinámica para este caso, admitiremos que la distribución de tensiones tangenciales (velocidades) a través del espesor es uniforme. Nótese la diferencia sustancial de esta hipótesis respecto de la distribución de tensiones tangenciales supuesta a través del espesor en perfiles abiertos.

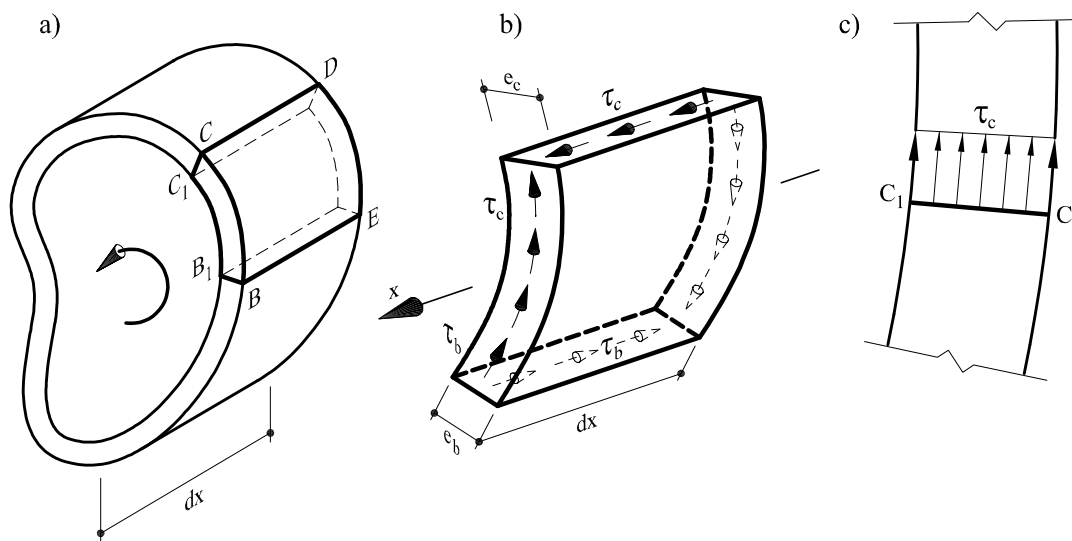


Fig. 7.19: Sección cerrada de pequeño espesor

Por equilibrio de fuerzas según la dirección del eje  $x$ , debe ser:

$$\tau_b e_b dx - \tau_c e_c dx = 0 \quad (7.45)$$

donde  $e$  es el espesor en un punto dado de la sección. De la expresión anterior, se deduce que:

$$\tau_b e_b = \tau_c e_c = q = cte \quad (7.46)$$

Lo que significa que *el flujo de tensiones tangenciales es constante a través del espesor*,  $q = \tau e$  (*hipótesis de Bredt*). La misma conclusión se extrae de la analogía hidrodinámica por continuidad (conservación) de flujo.

Para hallar la tensión sobre cada corte de la sección se establece la igualdad entre el momento resultante de las tensiones y el momento torsor actuante, respecto de un punto interior  $O$  cualquiera. Se tiene:

$$M_t = \int_S r \tau dS = \oint_s r \tau e ds = \oint_s q r ds = q \oint_{S_m} 2 dS_m = 2qS_m \quad (7.47)$$

donde  $r$  es la distancia al punto  $O$  (arbitrario) de la tangente en un punto dado de la línea media,  $s$  es la longitud de arco medida sobre la línea media, y  $S_m$  es la superficie encerrada por la línea media de la sección.

Por tanto, el flujo de tensiones  $q$  es igual a:

$$q = \tau e = \frac{M_t}{2S_m} \quad (7.48)$$

Esta expresión se conoce como *primera fórmula de Bredt*.

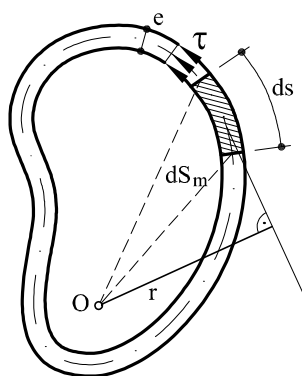


Fig. 7.20: Área encerrada por la línea media

Por consideraciones energéticas, se puede deducir que en secciones cerradas de pequeño espesor el giro de torsión por unidad de longitud,  $\theta$ , es:

$$\theta = \frac{1}{2GS_m} \oint_s \frac{q}{e} ds \quad (7.49)$$

y al sustituir  $\tau = q/e = M_t/(2S_m e)$ , se tiene:

$$\theta = \frac{M_t}{G 4 S_m^2 / \oint_s \frac{ds}{e}} = \frac{M_t}{GI_t} \quad (7.50)$$

ecuación que se conoce como *segunda fórmula de Bredt*, y de la que se obtiene el valor de la inercia a torsión en este tipo de sección:

$$I_t = \frac{4 S_m^2}{\oint_s \frac{ds}{e}} \quad (7.51)$$

Las consideraciones que permiten deducir la expresión (7.48) son puramente estáticas y, por consiguiente, válidas para secciones cerradas de pequeño espesor formadas por tramos de distintos materiales. Definiendo el coeficiente de equivalencia entre los distintos materiales como relación entre el módulo de rigidez transversal de cada material y el módulo de referencia,  $n_i = G_i/\bar{G}$ , la ecuación (7.50) se escribe como

$$\theta = \frac{M_t}{GI_t} \quad (7.52)$$

con la inercia a torsión mecánica definida como

$$\bar{I}_t = \frac{4 S_m^2}{\oint_s \frac{ds}{ne}} \quad (7.53)$$

---

### Ejemplo 7.3.7.1

---

Calcular la inercia a torsión y el máximo momento torsor que puede resistir una pieza de sección anillo circular *cerrado* de radio  $r$  y de espesor  $e$  si la tensión tangencial admisible es  $\tau^*$ .

La inercia a torsión de la sección cerrada vale (ver Ec. (7.51) y Ec. (7.18a)):

$$I_t = \frac{4S_m^2}{\oint \frac{ds}{e}} = \frac{4(\pi r^2)^2}{2\pi r} = 2\pi r^3 e = Ar^2 = I_p$$

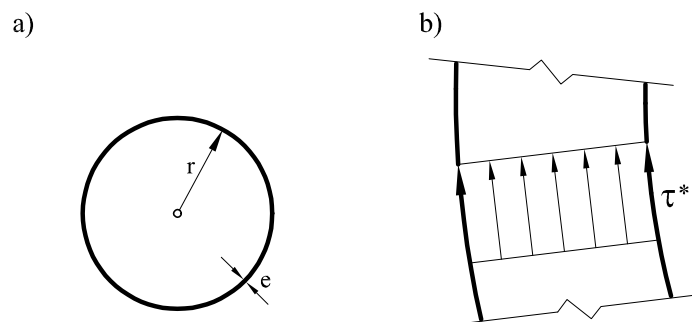


Fig. 7.21: Anillo circular cerrado

y comparando con la inercia a torsión de la misma sección abierta (ver Ejemplo 7.3.5.1) se tiene la relación:

$$\frac{(I_t)_{cc}}{(I_t)_{ab}} = \frac{Ar^2}{\frac{1}{3}Ae^2} = 3 \left(\frac{r}{e}\right)^2$$

El momento torsor máximo es, según la ecuación (7.48):

$$M_t^{\max} = 2S_m \tau^* e = 2\pi r^2 e \tau^* = Ar \tau^*$$

y todos los puntos de la sección trabajan a tensión  $\tau^*$ , al ser el espesor uniforme.

Si se compara este resultado con el obtenido en el Ejemplo 7.3.5.1 para la sección abierta de igual área se tiene una relación:

$$\frac{(M_t^{\max})_{cc}}{(M_t^{\max})_{ab}} = \frac{Ar \tau^*}{\frac{1}{3}Ae \tau^*} = 3 \left(\frac{r}{e}\right)$$

Ambos resultados demuestran la superioridad de las secciones cerradas frente a las abiertas desde el punto de vista de la resistencia frente a la sollicitación de torsión uniforme.

### Ejemplo 7.3.7.2

Dimensionar la longitud  $a$  de la sección de la Figura 7.22, solicitada por un momento torsor  $M_t = 150 \text{ kN}\cdot\text{m}$ , sabiendo que la tensión tangencial admisible es  $\tau^* = 100 \text{ MPa}$ . Calcular el ángulo de torsión por unidad de longitud si el módulo de rigidez transversal es  $G = 100 \text{ GPa}$ .

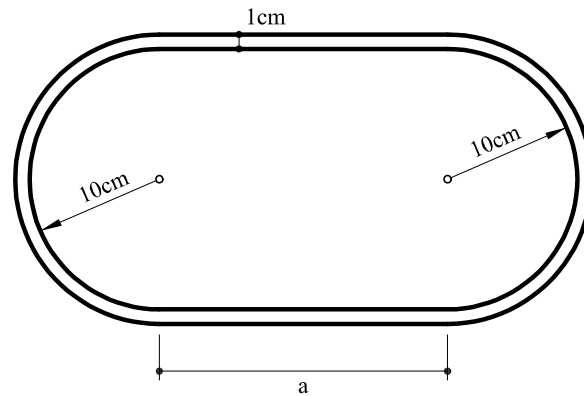


Fig. 7.22: Sección unicelular

El valor de la tensión tangencial es uniforme en toda la sección y vale:

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{M_t}{2S_m e} \\ &= \frac{150 \cdot 10^3}{2(a \cdot 21,0 + \pi \cdot 10,5^2) \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-2}} \text{ Pa} \\ &= \frac{1,5 \cdot 10^5}{42,0a + 692,72} \text{ MPa}\end{aligned}$$

Haciendo  $\tau < \tau^* = 100 \text{ MPa}$  se tiene  $a > 19,22 \text{ cm}$ . La inercia a torsión de la sección para  $a = 20 \text{ cm}$  vale:

$$\begin{aligned}I_t &= \frac{4S_m^2}{\oint \frac{ds}{e}} \\ &= \frac{4 \cdot (20,0 \cdot 21,0 + \pi \cdot 10,5^2)^2}{2 \cdot (20,0 + \pi \cdot 10,5)} \text{ cm}^4 \\ &= \frac{1,0}{22.168,14} \text{ cm}^4 \\ &= 22.168,14 \text{ cm}^4\end{aligned}$$

Luego el ángulo de torsión por unidad de longitud vale:

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{M_t}{GI_t} \\ &= \frac{150 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^9 \cdot 22.168,14 \cdot 10^{-8}} \text{ rad/m} \\ &= 6,766 \cdot 10^{-3} \text{ rad/m} \\ &= 0,387^\circ / \text{m}\end{aligned}$$