CUESTIONARIO N° 8–*Estática*

- **Equilibrio de los cuerpos vinculados**

Podríamos sintetizar lo que hemos hecho hasta aquí diciendo que se ha tratado, básicamente, de trabajar de modo didáctico con los problemas de Equivalencia y de Equilibrio de los Sistemas de Fuerzas, haciendo uso de las herramientas conceptuales establecidas previamente: fuerza, momento de una fuerza, par de fuerzas, principios de la Estática y Teorema de Varignon.

Nos corresponde iniciar, ahora, su **aplicación a casos concretos** de cuerpos en equilibrio, lo que haremos estudiando el ***Equilibrio de los Cuerpos Vinculados***.

❖ Pregunta Nº 8.01: ¿A QUÉ DENOMINAMOS CUERPO VINCULADO?

Llamamos ***cuerpo vinculado*** a aquel que está ***unido*** **directamente a Tierra, o bien a otros cuerpos que se hallan en condición de reposo,** con la intención de ***inmovilizarlo***. Este tipo de **vinculación** se denomina ***externa***, *absoluta* en el primer caso y *relativa* en el segundo.

Fig. 8.01.01-CUERPOS VINCULADOS: Ejemplos de *vinculación absoluta*

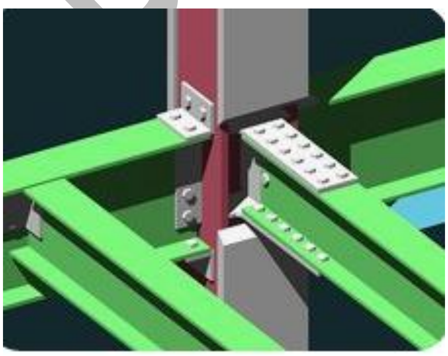


Fig. 8.01.02-CUERPOS VINCULADOS: Ejemplos de *vinculación relativa*

❖ Pregunta Nº 8.02: ¿CÓMO SE LOGRA LA VINCULACIÓN EXTERNA?

La *vinculación externa* del cuerpo que se desea inmovilizar se lleva a cabo por medio de los denominados ***dispositivos de apoyo*** o, simplemente, ***apoyos***.

❖ Pregunta Nº 8.03: ¿CUÁL ES LA FUNCIÓN DE LOS DISPOSITIVOS DE APOYO?

Son dos los puntos de vista que debemos tener en cuenta al responder: el ***cinemático*** y el ***estático***. En principio, debemos decir que la *función de los dispositivos de apoyo* es ***cinemática***, ya que **imponen al cuerpo determinadas *restricciones de movimiento* en ciertas direcciones y lugares del mismo**, acordes con la naturaleza del apoyo aplicado. Pero, si recordamos que hemos justificado el *desplazamiento* de un punto material mediante la idea de *fuerza*, desde el punto de vista ***estático*** debemos decir que la función de los dispositivos de apoyo es la de **desarrollar las *fuerzas* que son requeridas para equilibrar a las fuerzas exteriores que actúan sobre el cuerpo**.

❖ Pregunta Nº 8.04: ¿QUÉ NOMBRE RECIBE LA RESTRICCIÓN IMPUESTA?

La restricción impuesta al cuerpo por un apoyo en una dirección determinada recibe el nombre de ***vínculo o condición de vínculo***.

❖ Pregunta Nº 8.05: ¿CUÁL ES LA DEFINICIÓN TEÓRICA DE VÍNCULO?

Desde el punto de vista teórico **denominamos *vínculo* o *condición de vínculo* a toda condición geométrica impuesta en la dirección de una determinada coordenada**.

A modo de ejemplo, consideremos el caso de la figura 8.05.01, en la que se muestra la situación de dos puntos materiales A y B unidos entre sí por medio de una barra rígida (indeformable), que a su vez se halla articulada a Tierra en A (puede rotar alrededor del punto A). Por encontrarse fijo este extremo de la barra y ser ésta rígida, el punto B está condicionado a moverse sobre un arco de circunferencia, si el hecho físico tiene lugar en el plano, o sobre un casquete esférico, si el suceso es espacial. Decimos, entonces, que la barra AB constituye un vínculo para el punto B, impuesto en la dirección de su eje.

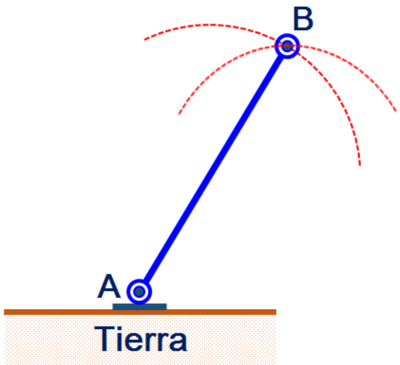


Fig. 8.05.01-CUERPOS VINCULADOS: Idea de *vínculo* o *condición de vínculo*

- **Pregunta Nº 8.06: ¿CÓMO SE CLASIFICAN LOS VÍNCULOS?**

Desde un punto de vista genérico, los *vínculos* se clasifican en ***bilaterales*** y ***unilaterales***. Los *primeros* imponen, según la dirección de una determinada coordenada, *restricciones cinemáticas en ambos sentidos* (p.e. una barra rígida), mientras que *los segundos lo hacen en uno solo* (p.e. un cable o una cadena). *Nosotros, a lo largo de todo el curso, sólo emplearemos vínculos bilaterales*.

Fig. 8.06.01-CUERPOS VINCULADOS: Un ejemplo de vínculo *bilateral* y otro de vínculo *unilateral*

- **Pregunta Nº 8.07: ¿CÓMO SE DENOMINAN LOS DESPLAZAMIENTOS ASOCIADOS CON CADA CLASE DE VÍNCULO?**

Llamaremos ***reversibles*** a los *desplazamientos impedidos* por los *vínculos bilaterales* e ***irreversibles*** a los que van asociados con los *vínculos unilaterales*.

- **Pregunta Nº 8.08: ¿CUÁNTOS TIPOS DE APOYOS DIFERENTES EXISTEN?**

Si bien son variados los detalles constructivos que pueden emplease en la práctica para materializar un apoyo, *desde el punto de vista teórico es posible clasificarlos* y establecer una *tipificación*. Así, si se trata de un *cuerpo general en el*

espacio, existen ***seis*** *tipos de dispositivos de apoyo* diferentes, denominados de *primera, segunda, tercera, cuarta, quinta* y *sexta especie*, en función de la cantidad de condiciones de vínculo que impone, mientras que en el caso de los *cuerpos con un **plano** de simetría*, el número se reduce a ***tres*** (*primera, segunda* y *tercera especie*).

❖ **Pregunta Nº 8.09: ¿A QUÉ SE DENOMINA CHAPA?**

En el capítulo precedente, al tratar los Sistemas de Fuerzas Distribuidas, dijimos que es muy frecuente en la práctica tener que resolver estructuras que presentan un claro plano de simetría, tanto en lo que se refiere a su geometría como así también en lo atinente a la distribución de las cargas exteriores y a las condiciones de vínculo, y que como consecuencia de ello nos resulta posible llevar a cabo el análisis estructural suponiendo que todo el hecho físico tiene lugar en dicho plano de simetría, lo que facilita de manera evidente tanto el dibujo de los esquemas de análisis como la realización de las operaciones matemáticas correspondientes.

A este sistema plano, que sólo constituye una concepción lógica sin existencia real, lo denominaremos ***chapa*** y diremos que, desde el punto de vista cinemático, una **chapa es un conjunto plano de puntos materiales vinculados entre sí por la condición de la rigidez**.

Es evidente, por tanto, que se trata de un sistema *indeformable*, es decir, que su geometría (forma) no cambia a pesar de que hayan actuado sobre él las acciones exteriores, que nosotros representamos por medio de lo que hemos denominado cargas (fuerzas distribuidas y/o concentradas).

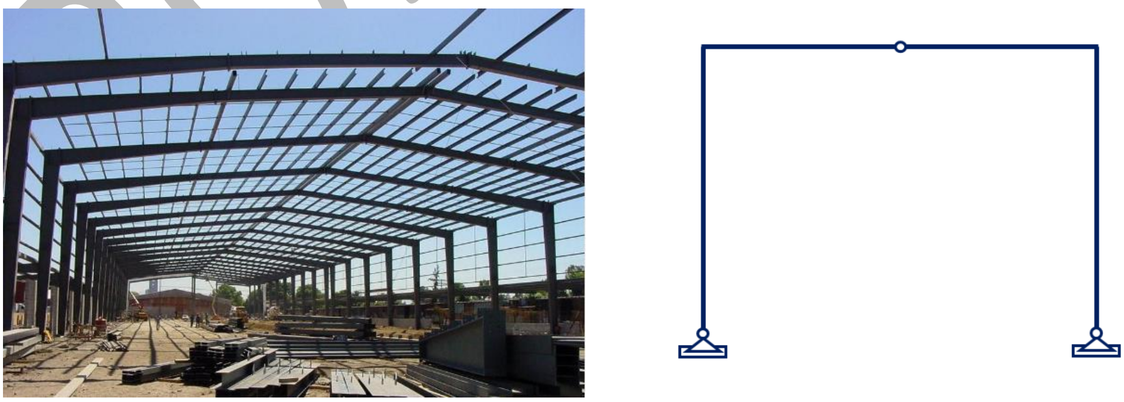


Fig. 8.09.01- CUERPOS VINCULADOS: Pórticos de una nave industrial (foto) y un posible modelo plano para resolverlos, formado por dos chapas

En este capítulo, mientras no hagamos referencia a una estructura concreta, como los pórticos de la figura 8.09.01, *representaremos a una chapa mediante una figura con una forma cualquiera*, por ejemplo:

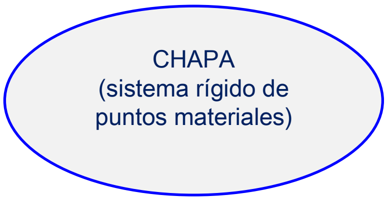


Fig. 8.09.02- CUERPOS VINCULADOS: Habitualmente, una chapa se grafica con una forma cualquiera

- **Pregunta Nº 8.10: ¿A QUÉ SE DENOMINA GRADOS DE LIBERTAD DE UN SISTEMA DE PUNTOS MATERIALES?**

Denominamos ***grados de libertad*** de un sistema de puntos materiales, plano o espacial, al **número de coordenadas libres** que posee, es decir, a la *cantidad de movimientos* (desplazamientos y giros) *independientes* que puede experimentar cuando no está vinculado.

- **Pregunta Nº 8.11: ¿CUÁNTOS GRADOS DE LIBERTAD POSEE UN CUERPO EN EL ESPACIO?**

Hemos mencionado ya que, tanto en el plano como en el espacio, el *movimiento más general* que un cuerpo puede experimentar cuando está libre es *roto-traslatorio*. Por lo tanto, cuando se trata de un *sistema material espacial* (o cuerpo) *rígido*, tanto el vector que mide la componente de *desplazamiento* como el que lo hace con la *rotación* pueden tener, en el caso más general, 3 (tres) componentes cada uno (una sobre cada eje de la terna de referencia). Colegimos, por lo tanto, que **un cuerpo en el espacio posee 6 (seis) grados de libertad**. Diremos, entonces, que **posee 6 (seis) coordenadas libres**.

Es importante destacar que el *vector desplazamiento* tiene como *origen* y como *extremo* los puntos correspondientes a las *posiciones inicial* y *final* del cuerpo, o sea que es absolutamente *independiente de la trayectoria* que ha seguido para pasar de una posición a otra.

- **Pregunta Nº 8.12: ¿CUÁNTOS GRADOS DE LIBERTAD POSEE UNA CHAPA?**

Tratándose ahora de un "*cuerpo rígido plano*" o *chapa*, el *movimiento roto-traslatorio* que el sistema podrá experimentar si está libre tendrá lugar en el mismo plano al que pertenece. Por lo tanto, el vector que mide la componente de *desplazamiento* podrá tener, como máximo, 2 (dos) componentes (una sobre cada eje del sistema de referencia) y sólo 1 (una) componente de *rotación* (sobre el eje restante, que es perpendicular al plano al que pertenece la chapa). Podemos concluir, entonces, que **una chapa posee 3 (tres) grados de libertad** y diremos, entonces, que **posee 3 (tres) coordenadas libres**.

- **Pregunta Nº 8.13: ¿QUÉ CONCLUSIÓN IMPORTANTÍSIMA SE OBTIENE CUANDO SE ESTUDIA EL MOVIMIENTO DE UNA UNA CHAPA?**

Si analizamos detenidamente el *movimiento roto-traslatorio de una chapa,* superponiendo los movimientos componentes de traslación y de rotación, obtenemos la siguiente conclusión: **todo movimiento roto-traslatorio de una chapa libre puede reducirse a *una única rotación*, alrededor de un punto propio o impropio**, lo que nos permitirá afirmar que:

Todo desplazamiento de una chapa libre en el plano al que pertenece se reduce a una rotación alrededor de un punto de su plano, propio o impropio, denominado polo de rotación. *Si el polo es propio, la chapa experimenta una rotación propiamente dicha, y si es impropio, una traslación*.

- **Pregunta Nº 8.13: ¿CUÁLES SON LOS DIFERENTES TIPOS DE APOYOS QUE PUEDEN APLICARSE A UN SISTEMA PLANO?**

Hemos adelantado ya, al responder la pregunta 8.08, que en el caso de los *sistemas planos* existen *3 (tres) tipos diferentes de dispositivos de apoyo* que pueden serles aplicados para restringir su capacidad de movimiento. Ahora, los veremos en detalle y mostraremos tanto el modo de simbolizarlos cuando se establece el modelo matemático con el que se encara la resolución de la estructura como así también un posible detalle constructivo para materializarlo en la práctica.

a) En primer lugar, mencionaremos el *apoyo simple* o de *primera especie*, denominado habitualmente ***apoyo móvil***. Sólo **restringe un grado de libertad**, es decir, que *impone al punto en el que se aplica una sola condición de vínculo en una dirección determinada (a-a en la figura 8.13.01), permitiendo en consecuencia el desplazamiento de la chapa en la dirección ortogonal (b-b), así como su rotación alrededor del punto A.*

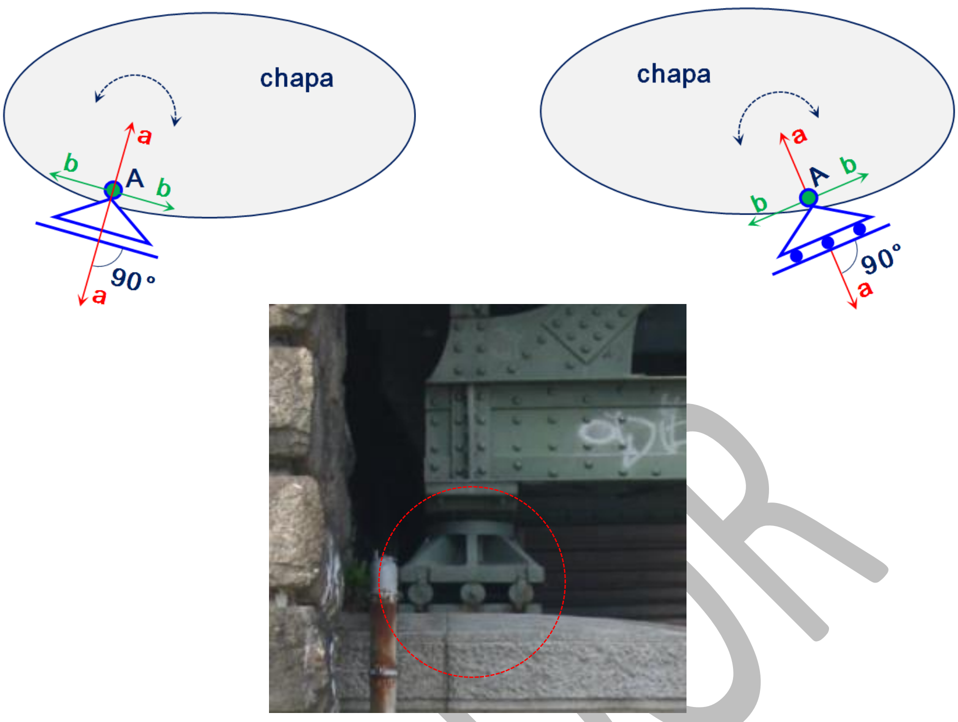


Fig. 8.13.01-CUERPOS VINCULADOS: dos formas de simbolizar el *apoyo móvil* y un caso real de apoyo móvil de un puente

Debemos destacar que *la vinculación de primera especie puede lograrse también mediante otro dispositivo* que se denomina ***biela**,* que será analizado en detalle al desarrollar el capítulo 9. Se trata, en definitiva, de una *barra rígida*, que en los casos de *vinculación externa* se halla *articulada a Tierra en uno de sus extremos y a la chapa que sustenta en el otro*, y que, lógicamente, también *impone una sola condición de vínculo, que tiene lugar en la dirección de su eje*:

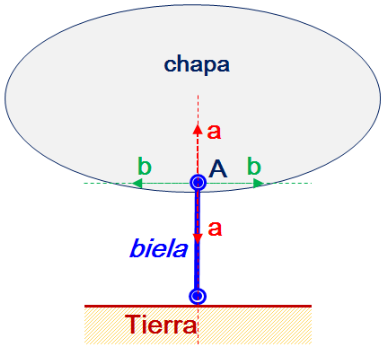


Fig. 8.13.02- CUERPOS VINCULADOS: Esquema representativo del funcionamiento de una *biela*

Referencias

1) A: punto de la chapa en el que se aplica el vínculo.
2) a-a: dirección en la que el *apoyo móvil* o la *biela* imponen su condición de vínculo (o bien restringen los desplazamientos del punto A).
3) b-b: dirección en la que el apoyo móvil le permite al punto A pequeños desplazamientos.

b) En segunda instancia, haremos mención al *apoyo doble* o de *segunda especie*, denominado habitualmente ***apoyo fijo***, que **restringe dos grados de libertad**, es decir, que *impone dos condiciones de vínculo*. Este tipo de vinculación se conoce, también, con el nombre de *articulación*.

En este caso, *el punto* A *está fijo*, es decir que *carece de posibilidades de desplazamiento*, ya que el dispositivo de apoyo se encuentra rígidamente vinculado a Tierra, mientras que la chapa a la que le es aplicado sólo posee, entonces, capacidad de rotar en torno al punto A.

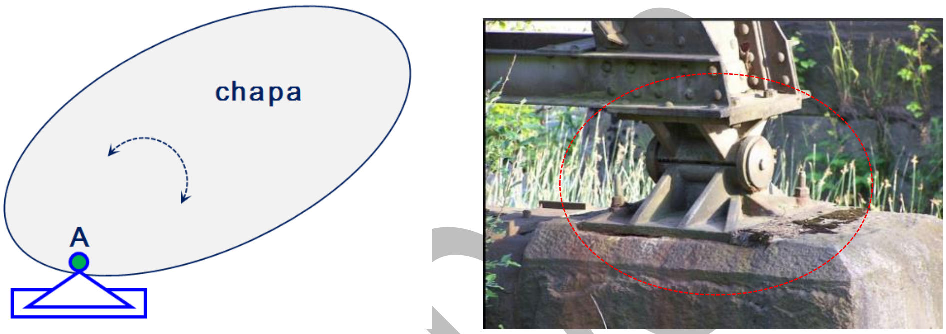


Fig. 8.13.03: *apoyo fijo:* forma habitual de simbolizarlo y un caso real de apoyo fijo de un puente

Cabe aclarar en este caso que *la vinculación de segunda especie puede lograrse también mediante la aplicación de dos bielas cuyas direcciones concurran a un punto propio. Dicho punto de concurrencia funcionará, cinemáticamente, como articulación real o virtual:*

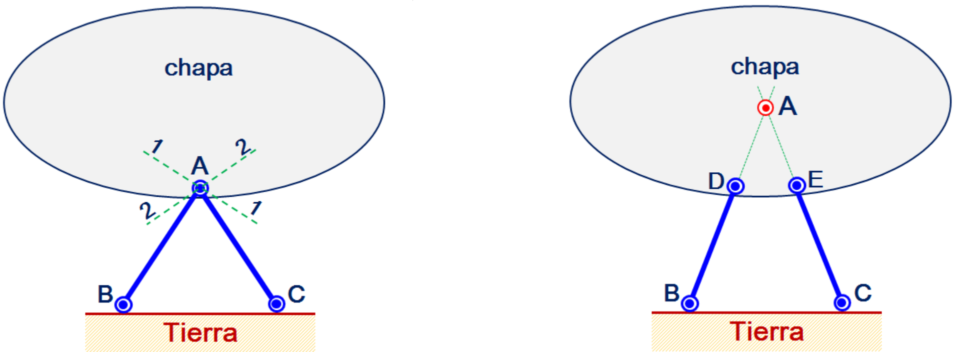


Fig. 8.13.04: *vínculo de segunda especie (articulación):* mediante dos bielas concurrentes a un punto propio

c) Por último, presentamos al *apoyo triple* o de *tercera especie*, denominado habitualmente ***empotramiento***, que tiene capacidad de **restringir tres grados de libertad**, es decir, que *impone tres condiciones de vínculo*.

En este caso, el punto A está fijo y la sección de la chapa a la cual pertenece carece de capacidad para rotar, lo que implica, entonces, que **toda la chapa está fija** (por el vínculo de rigidez).

Fig. 8.13.05: *vínculo de tercera especie:* dos modos de simbolizarlo y un caso práctico de "viga en voladizo"

En este tercer caso debemos destacar que también es posible resolver *la vinculación de tercera especie o empotramiento aplicando a dos puntos de la misma sección de la chapa un vínculo de segunda especie y otro de primera especie,* ya que su efecto resulta equivalente. Ver figura 8.13.06.

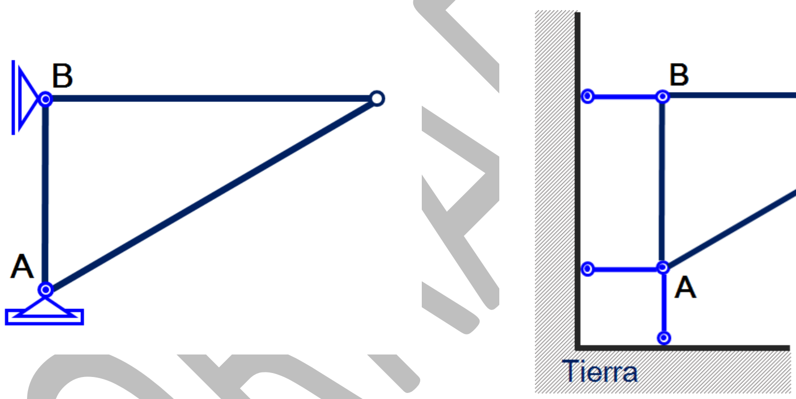


Fig. 8.13.06: *vínculo de tercera especie: dos modos alternativos* y *equivalentes* de materialización

❖ **Pregunta Nº 8.14: ¿CÓMO SE LOGRA, ENTONCES, LA INMOVILIZACIÓN DE UNA CHAPA?**

Teniendo en cuenta que una chapa posee tres grados de libertad y considerando el número de condiciones de vínculo que cada uno de los tres tipos de apoyo es capaz de suministrar, podemos inferir que *la inmovilización de una chapa pude lograrse de las tres siguientes maneras*:

a) Aplicándole *tres apoyos de primera especie*.
b) Aplicándole *un apoyo de primera especie y otro de segunda especie.*
c) Aplicándole *un apoyo de tercera especie*.

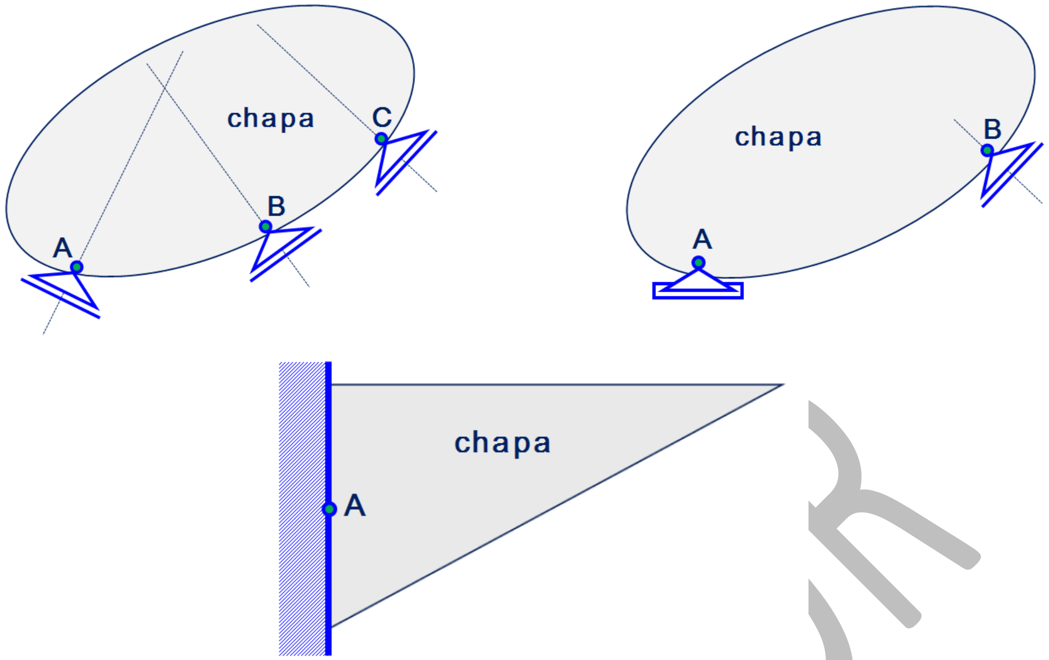
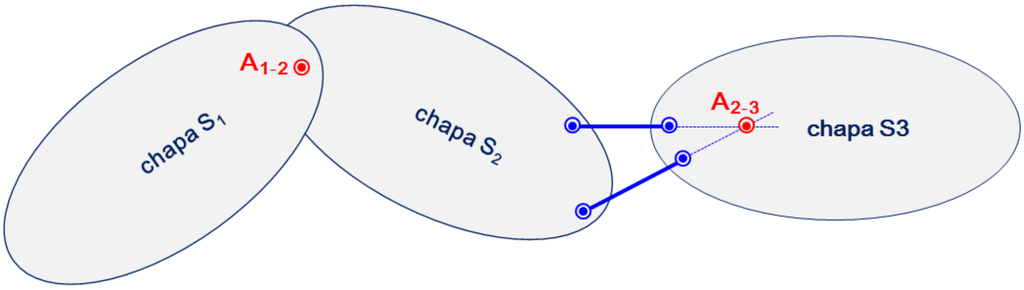


Fig. 8.14.01: Chapa: los *tres modos posibles de sustentación* isostática

❖ **<u>Pregunta Nº 8.15</u>: ¿A QUÉ SE DENOMINA <u>CADENA CINEMÁTICA</u> DE CHAPAS?**

Es frecuente en la vida profesional tener que resolver situaciones en las cuales el empleo de una única chapa no se adecua a la geometría del problema o bien no constituye la solución más apropiada. Surgen, entonces, las ***cadenas cinemáticas***, *que conforman un sistema plano más complejo, compuesto por dos o más chapas vinculadas entre sí mediante articulaciones, que cuando la cadena cinemática está libre permiten, únicamente, la rotación relativa entre las dos chapas que vinculan*. Estas *articulaciones*, que se denominan *relativas*, constituyen, entonces, una vinculación interna entre las chapas, que reduce su capacidad de movimiento, *restringiendo*, como toda articulación *dos grados de libertad*.

Las *articulaciones entre chapas* pueden materializarse de *dos modos* diferentes; uno de ellos da lugar a una *articulación real*, que es *siempre propia* (digamos que podríamos lograrla perforando ambas chapas y abulonándolas luego de tal manera que no exista fricción alguna en dicha unión, p.e., lubricándola); el otro, tiene lugar *mediante bielas*, caso en el cual *la articulación relativa se encuentra en el punto de intersección de los ejes de las bielas*, dando lugar a una *articulación virtual*, ya sea *propia* o *impropia* (cuando las bielas son paralelas).



A_{1-2}: articulación relativa *propia* y *real* entre las chapas S_1 y S_2
A_{2-3}: articulación relativa *propia* y *virtual* entre las chapas S_2 y S_3

Fig. 8.15.01: *Cadena cinemática de tres chapas: dos modos* de materializar las articulaciones relativas

De acuerdo con su configuración, las cadenas cinemáticas se clasifican en *abiertas* y *cerradas*. En las abiertas, la primera y última chapas no están vinculadas entre sí, mientras que en las cerradas sí lo están. En nuestro curso sólo abordaremos la resolución de las cadenas cinemáticas abiertas.

❖ **Pregunta Nº 8.16: ¿CUÁNTOS GRADOS DE LIBERTAD POSEE UNA CADENA CINEMÁTICA?**

Si denominamos **n** al *número de chapas que componen la cadena cinemática*, antes de vincular a las chapas para formar la cadena, el *número de grados de libertad GL del sistema será igual 3.n*, ya que cada una de las chapas posee tres grados de libertad. Teniendo en cuenta a continuación que *cada articulación relativa impone dos condiciones de vínculo*, podremos deducir que:

a) Cadenas cinemáticas *abiertas:*

- Antes de vincular a las chapas entre sí, GL = 3n
- Cantidad de articulaciones = n-1
- **Grados de libertad de la cadena abierta = GLCA =** 3n-2.(n-1) **= n+2**

b) Cadenas cinemáticas *cerradas:*

- Antes de vincular a las chapas entre sí, GL = 3n
- Cantidad de articulaciones = n
- **Grados de libertad de la cadena cerrada = GLCC =** 3n-2n **= n**

❖ **Pregunta Nº 8.17: ¿QUÉ SUCEDE SI EL NÚMERO DE CONDICIONES DE VÍNCULO QUE SE APLICAN AL SISTEMA DIFIERE DEL DE GRADOS DE LIBERTAD?**

Lógicamente, el *número* de *condiciones de vínculo* CV que se aplican a un sistema de puntos materiales *puede diferir del de grados de libertad* GL que este posee, es decir, que puede ser también *menor* o *mayor*. Esto nos permite establecer la siguiente *clasificación*:

a) *Sistemas **isostáticamente** sustentados*, cuando **CV = GL**
b) *Sistemas **hipostáticamente** sustentados*, cuando **CV < GL**
c) *Sistemas **hiperestáticamente** sustentados*, cuando **CV > GL**

En los sistemas *hipostáticamente* sustentados, siendo CV < GL, *existe* aún *capacidad de movimiento*. Constituyen lo que se denomina *mecanismos* y, dado que nuestro interés está puesto en los cuerpos que se hallan en condición de reposo (en equilibrio, desde el punto de vista estático), no los estudiamos. Suelen presentarse frecuentemente en problemas de Ingeniería Mecánica (p.e., el mecanismo biela-manivela).

En los sistemas *hiperestáticamente* sustentados, es CV > GL, es decir, que se han impuesto al sistema más condiciones de vínculo que las estrictamente necesarias como para que no se mueva, pero si bien estos sistemas satisfacen el requisito de hallarse en reposo, *no pueden ser resueltos dentro del ámbito de la Estática del cuerpo rígido, ya que el número de ecuaciones que pueden plantearse es menor que el que se requiere para que el sistema de ecuaciones sea determinado*. Por este motivo, los sistemas hiperestáticos reciben también el nombre de *sistemas indeterminados*. Su resolución se aborda en cursos superiores de la Teoría de las Estructuras.

Por lo visto, *en nuestro curso de Estática y Resistencia de Materiales sólo estudiamos los sistemas isostáticos*, tal como lo dijimos al responder la pregunta 1.01.

❖ Pregunta Nº 8.18: ¿A QUÉ SE DENOMINA VINCULACIÓN APARENTE?

Se dice que un *sistema de puntos materiales* (chapa, cadena cinemática o cuerpo) presenta *vinculación aparente* cuando, después de haberle aplicado la cantidad mínima de condiciones de vínculo que son necesarias para inmovilizarlo, se verifica que aún posee *capacidad de movimiento*, en el denominado *campo de los pequeños desplazamientos*. Si esta *situación anómala* tiene lugar lo es porque las condiciones de vínculo han sido aplicadas de manera inconveniente y, lógicamente, *requiere ser corregida,* aplicando los vínculos de otro modo.

NOTA: es importante destacar que lo que puede ser aparente, llegado el caso, es la vinculación, pero no pueden serlo los apoyos (*no existen los vínculos aparentes*).

❖ Pregunta Nº 8.19: ¿A QUÉ SE DENOMINA PEQUEÑOS DESPLAZAMIENTOS?

Cuando un sistema rígido de puntos materiales posee capacidad de movimiento y los desplazamientos que tienen lugar son *muy pequeños frente a la menor de sus dimensiones* (en el caso de una barra será la menor dimensión de la sección transversal), decimos que nos hallamos en el *campo de los pequeños desplazamientos*. Se trata de desplazamientos muy pequeños pero finitos. Suele denominárselos también desplazamientos *infinitésimos* y, si recordamos que una chapa con capacidad de movimiento rota alrededor de un punto llamado *polo de rotación*, el *corrimiento de cualquier punto* del sistema podrá expresarse, directamente, como el *producto entre el valor del giro medido en radianes por la distancia que media entre el polo de rotación y dicho punto.*

Para aclarar lo que hemos dicho, consideremos la chapa de la figura 8.19.01, articulada en A, punto que constituye su polo de rotación. Ahora, pensemos que, a partir de su posición original (sin sombrear), la chapa experimenta una *rotación* de sentido horario e intensidad θ. Un punto cualquiera de ella, tal como el B, ocupará, a posteriori, una posición B', por lo que el corrimiento que habrá experimentado será a_B, dado que, por tratarse de una rotación infinitésima, podemos confundir el movimiento del punto sobre su trayectoria circular de radio *r* con un movimiento sobre la tangente al arco de circunferencia que ha descrito. Para que la rotación θ pueda considerarse infinitésima debe verificarse que $\theta\,(rad) \approx sen\,\theta \approx tan\,\theta$, que es lo que permite calcular el corrimiento a_B como $a_B \approx r\,.\,\theta\,(rad)$. Este requisito se satisface para ángulos menores o iguales que 5°. En la práctica profesional, las rotaciones debidas a las deformaciones elásticas suelen ser mucho menores (del orden de 1°).

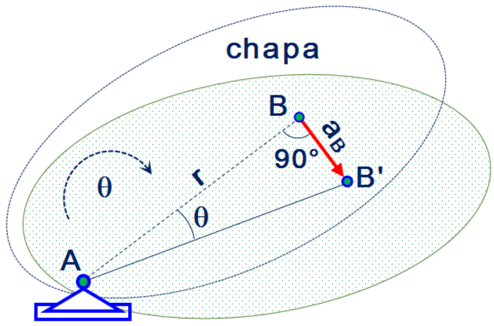


Fig. 8.19.01-CUERPOS VINCULADOS: Idea de *desplazamiento infinitésimo*

❖ Pregunta Nº 8.20: ¿CUÁNDO PRESENTA VINCULACIÓN APARENTE UN SISTEMA FORMADO POR UNA SOLA CHAPA?

Cuando el sistema a resolver está constituido por *una sola chapa*, existen *sólo dos situaciones con vinculación aparente*:

a) Cuando la chapa está sustentada mediante la aplicación de *tres apoyos móviles* y *las rectas normales a las direcciones en las que los apoyos permiten corrimientos concurren a un punto común, propio o impropio*.

b) Cuando la chapa está sustentada mediante la aplicación de *un apoyo fijo y otro móvil* y *la recta normal a la dirección en la que éste permite corrimientos pasa por el punto en el que se ha aplicado el apoyo fijo*.

En ambas situaciones, decimos que el sistema se encuentra *isostáticamente sustentado*, pero que es *cinemáticamente inestable*, dado que su configuración geométrica puede cambiar bajo la acción de fuerzas exteriores.

El primer caso es el que se muestra la figura 8.20.01, donde se observa claramente que si las tres normales a los apoyos móviles concurren simultáneamente al punto O, éste se transforma en el polo de rotación de la chapa, para el caso de desplazamientos infinitésimos. Efectivamente, si consideramos al punto O como polo de rotación, los puntos A, B y C en los que están aplicados los apoyos móviles podrían experimentar pequeños corrimientos en la dirección de las respectivas normales a los radios OA, OB y OC, ya que el vínculo aplicado lo permitiría. El sistema se volvería, entonces, cinemáticamente inestable.

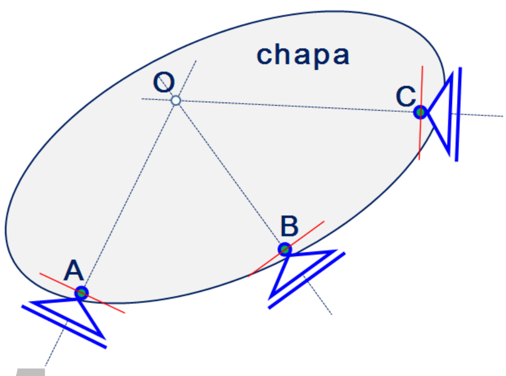


Fig. 8.20.01: Chapa aislada-Primer caso de *vinculación aparente*

El segundo, se muestra la figura 8.20.02, donde se observa claramente lo siguiente: si el apoyo móvil no existiese, el punto A sería el polo de rotación de la chapa. Al incorporarlo, el sistema pasa a estar isostáticamente sustentado, ya que tiene aplicadas las tres condiciones de vínculo que son necesarias para inmovilizarlo, pero sucede que, si la normal al apoyo móvil pasa por el punto A, el punto B podría experimentar desplazamientos infinitésimos en la dirección de la normal al radio AB, ya que el vínculo aplicado lo permite. También aquí el sistema es cinemáticamente inestable.

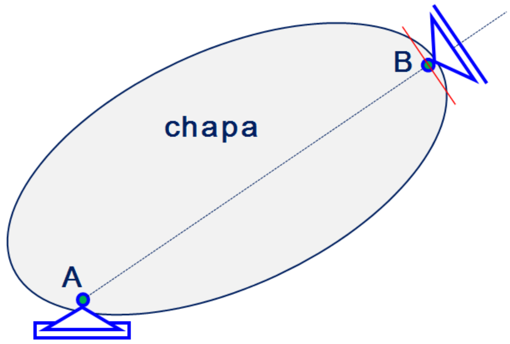


Fig. 8.20.02: Chapa aislada-Segundo caso de *vinculación aparente*

- **Pregunta Nº 8.21: ¿CÓMO SE DETECTA LA VINCULACIÓN APARENTE EN LAS CADENAS CINEMÁTICAS?**

Cuando el sistema a resolver es una *cadena cinemática*, la detección de una posible *vinculación aparente* se realiza llevando a cabo lo que denominamos **análisis cinemático** del sistema.

El *análisis cinemático* de una *cadena cinemática* consiste en *probar que cada una de las chapas que la componen posee, correctamente aplicadas, las tres condiciones de vínculo que se necesitan para inmovilizarla*.

Puede ocurrir que alguna de las chapas tenga aplicadas de por sí las tres condiciones, lo que implica que esa chapa está fija y no requiere de la presencia de las otras para hallarse inmóvil. Las chapas restantes si la necesitarán, y habrá que demostrar, entonces, que entre la vinculación externa que cada una puede tener aplicada y la interna que le aportan las chapas adyacentes, cada chapa se encuentra *isostáticamente sustentada* y es *cinemáticamente estable*.

- **Pregunta Nº 8.22: ¿CÓMO SE LLEVA A CABO EL ANÁLISIS CINEMÁTICO DE UNA CADENA CINEMÁTICA?**

El *análisis cinemático* de una *cadena cinemática abierta* lo llevamos a cabo teniendo en cuenta las siguientes *premisas*:

a) *Si una chapa posee capacidad de moverse, lo hará rotando alrededor de su polo de rotación*. En consecuencia, será necesario comenzar el análisis cinemático determinando para cada chapa su posible polo de rotación.

b) *Los polos de rotación de dos chapas consecutivas están alineados con la articulación relativa correspondiente.* (Esto significa que los tres puntos pertenecen a la misma recta).

c) *Cada una de las chapas que componen la cadena se comporta con respecto a las que están vinculadas a ella como una biela virtual, cuya dirección viene dada por la de la recta que surge de unir su polo de rotación con la articulación relativa correspondiente.*

- **Pregunta Nº 8.23: ¿QUÉ ES UN ARCO A TRES ARTICULACIONES O ARCO TRIARTICULADO?**

El ***arco a tres articulaciones*** (o *arco triarticulado,* como también se lo conoce) es un *caso particular de cadena cinemática de dos chapas*, en el que *cada una tiene aplicadas dos condiciones de vínculo externo*, ya sea mediante sendos apoyos fijos o bien mediante la aplicación de bielas, como ya se ha visto que puede hacerse. La condición de vínculo faltante se la aportan, mutuamente, las chapas que componen la cadena, siendo evidente que cada una de ellas no puede ser estable sin la presencia de la otra.

En lo atinente a la *articulación relativa*, podrá lograrse de alguna de las dos maneras que se muestran en la figura 8.15.01 (articulación *real* o *virtual*).

- **Pregunta Nº 8.24: ¿CÓMO FUNCIONA UN ARCO A TRES ARTICULACIONES?**

Analizaremos el ***esquema lógico de funcionamiento*** **del arco a tres articulaciones** estudiando el modelo matemático que se muestra en la figura 8.24.01, que es el más habitual y que permite, a la vez, el análisis de cualquier otra variante, tanto en lo atinente a su vinculación exterior como su articulación relativa.

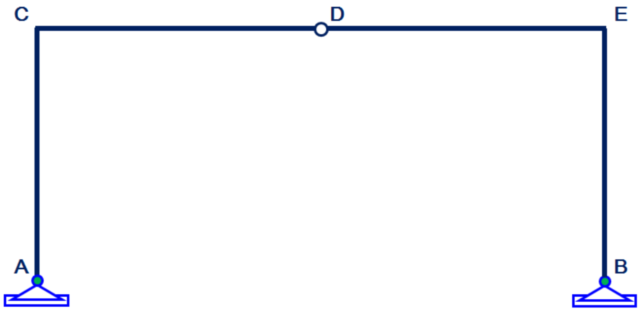


Fig. 8.24.01: *Arco a tres articulaciones:* un modelo matemático

Observamos claramente en la figura que al establecer el modelo matemático de una estructura, las chapas que la componen cobran forma, dado que debemos respetar su geometría. Por tal motivo, en la figura 8.24.02, repetimos el modelo pero individualizando sobre él, en línea entrecortada, a las dos chapas que lo forman:

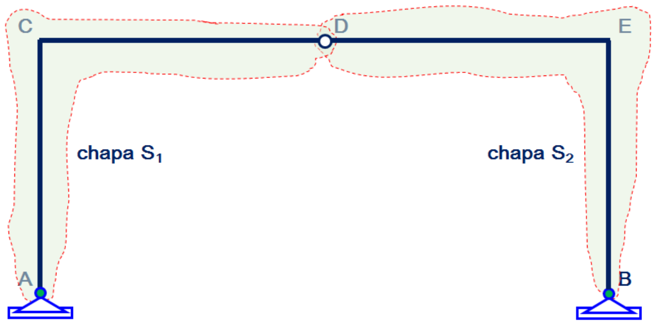


Fig. 8.24.02: *Arco a tres articulaciones:* individualización de las chapas en el modelo

Ahora, en base a todos los conocimientos que hemos incorporado acerca de los sistemas vinculados, podemos realizar las siguientes consideraciones inmediatas:

- Tipo de cadena cinemática: *abierta*
- Cantidad de chapas que la componen = n = 2
- Cantidad de grados de libertad = GL = n+2 = 4
- Número de condiciones de vínculo aplicadas = CV = 2+2 = 4 (2 apoyos fijos)
- Dado que *CV = GL*, la estructura se halla *isostáticamente sustentada*

Nos resta, por tanto, demostrar que el sistema es *cinemáticamente estable*, es decir, probar que no existe vinculación aparente, lo que haremos empleando las premisas que hemos dado al responder la pregunta 8.22, así como la figura 8.24.03.

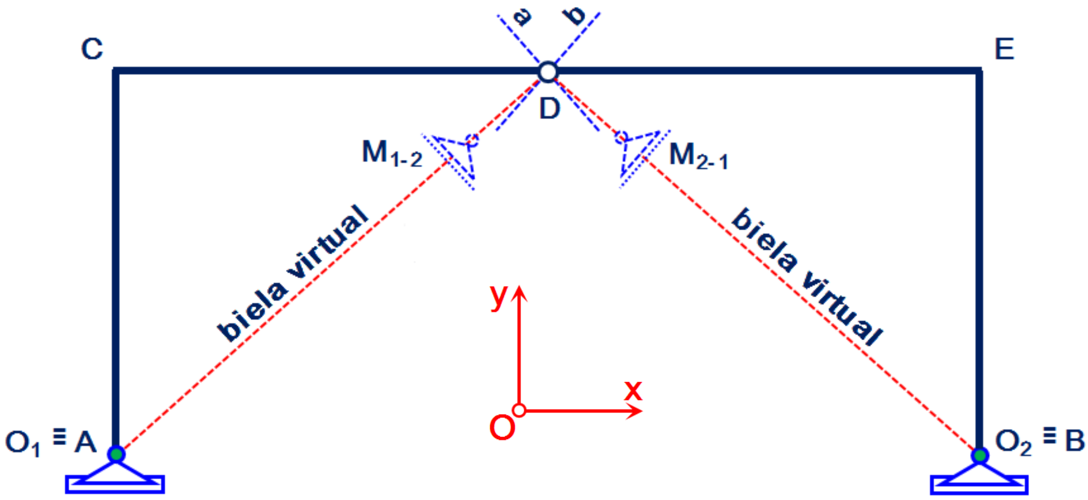


Fig. 8.24.03: *Arco a tres articulaciones:* análisis de la estabilidad cinemática del sistema

La determinación de los posibles polos de rotación O_1 y O_2 de las chapas es inmediata. Se trata de los puntos A y B, en los que están aplicados los vínculos, ya que allí las chapas están articuladas. Luego, si el sistema fuese inestable, la chapa S_1 rotaría alrededor de O_1, mientras que la chapa S_2 lo haría alrededor de O_2. En ese caso, el punto D, común a ambas chapas, porque allí se encuentra la articulación relativa, pensado como perteneciente a la chapa S_1, debería desplazarse en la dirección *a*, normal al radio AD, mientras que si se lo piensa como perteneciente a la chapa S_2, debería hacerlo según la dirección *b*, normal al radio BD. Dado que un punto no puede moverse al mismo tiempo sobre dos direcciones que no son coincidentes, concluimos que está fijo. Luego, cada una de las chapas posee un mínimo de dos puntos fijos, lo que nos garantiza la estabilidad del sistema, dada la condición de rigidez que los vincula internamente con los restantes.

Desde otro punto de vista, las direcciones *a* y *b* según las cuales debería moverse el punto D, permiten visualizar la materialización de *dos bielas virtuales*, O_1D y O_2D, que constituyen la tercera condición de vínculo, en este caso interna, que le falta externamente a cada chapa.

Por último, dado lo que hemos visto al inicio de este capítulo en lo que atañe a los vínculos de primera especie, la colaboración que la chapa S_1 le aporta a la S_2 puede ser vista como si en D estuviera aplicado un apoyo móvil virtual M_{1-2}, que en la figura ha sido desplazado por razones de dibujo. Del mismo modo puede pensarse el apoyo móvil virtual M_{2-1}, que la chapa S_2 le aporta a S_1. Como se ve, cada apoyo móvil virtual constituye, entonces, la condición de vínculo que le falta a cada chapa desde el punto de vista externo.

Pregunta Nº 8.25: ¿QUÉ NOS FALTA PARA COMPLETAR LA RESOLUCIÓN DE UNA CADENA CINEMÁTICA?

A pesar de todo lo que hemos visto hasta aquí, es evidente que realizar el análisis cinemático de cualquier estructura no nos resuelve el problema de la determinación de los esfuerzos internos que el sistema debe realizar para resistir las fuerzas exteriores que inciden sobre ella, y de las cuales no hemos dicho nada hasta ahora, dado que **el análisis cinemático es absolutamente independiente del estado de cargas**. Por lo tanto, después de probar la estabilidad cinemática del sistema, debemos dar un paso más, pasando del *ámbito cinemático* (desplazamientos) al *estático* (sistemas de fuerzas). *Es preciso, entonces, que aprendamos ahora a determinar los esfuerzos que deben realizar los vínculos para que el sistema de puntos materiales se encuentre en equilibrio* (lo que, según ya sabemos, equivale, cinemáticamente hablando, a la ausencia de desplazamientos o a la condición de reposo). Estos esfuerzos se denominan, habitualmente, ***reacciones de vínculo externo***.

- **Pregunta Nº 8.26: ¿CÓMO SE DETERMINAN LAS REACCIONES DE VÍNCULO EXTERNO?**

Dado que lo que estamos buscando es el equilibrio del sistema de puntos materiales en estudio, sometido a la acción de las fuerzas exteriores, y que los elementos que lo inmovilizan son los apoyos, es evidente que *los esfuerzos que desarrollen los vínculos serán las componentes de la equilibrante de dicho sistema de fuerzas*. Luego, *la determinación de las reacciones de vínculo externo la llevaremos a cabo aplicando todas las consideraciones generales que hemos visto en el Capítulo 6, al analizar el equilibrio de los sistemas de fuerzas,* pero debemos anticipar que en el caso de las *cadenas cinemáticas* será necesario incorporar una *idea adicional* para dar solución al asunto.

- **Pregunta Nº 8.27: ¿QUÉ ES LO QUE SUCEDE CON LAS CADENAS CINEMÁTICAS?**

Observando atentamente el caso más simple de cadena cinemática posible, como lo es la que está compuesta solamente por dos chapas, nos encontramos con el siguiente problema: el sistema requiere la aplicación de cuatro condiciones de vínculo para estar isostáticamente sustentado, lo que desde el punto de vista estático implica la determinación de cuatro incógnitas (las cuatro fuerzas que se desarrollan en las coordenadas según las cuales se han impuesto las condiciones de vínculo) y la Estática nos provee sólo tres ecuaciones de condición (sistemas coplanares de fuerzas no concurrentes).

Si la cadena está constituida por tres chapas, debemos imponer cinco condiciones de vínculo y serán cinco las incógnitas, etc., llegando a la conclusión de que en el caso de tratarse de una cadena de *n* chapas será *n+2* la cantidad de *condiciones de vínculo* y la de *incógnitas* del problema, disponiendo siempre únicamente de tres ecuaciones de equilibrio.

Esta aparente indeterminación analítica se soluciona al tener en cuenta lo siguiente: si bien desde el punto de vista global el equilibrio del sistema exige que la resultante total sea nula, la consideración de todas las fuerzas que están aplicadas sobre un determinado grupo de chapas ubicado a la izquierda de una articulación relativa, dará como resultado una cierta resultante parcial, que llamaremos $\boldsymbol{R_i}$, a la que le corresponderá, lógicamente, una resultante de las fuerzas ubicadas a la derecha de la articulación, que denominaremos $\boldsymbol{R_d}$, que será una fuerza opuesta a $\boldsymbol{R_i}$, de modo que se cumpla $\boldsymbol{R_i} + \boldsymbol{R_d} = 0$, para que exista equilibrio.

Por otra parte, nuestro análisis nos permitirá concluir que $\boldsymbol{R_i}$ y $\boldsymbol{R_d}$, además de constituir un *sistema de fuerzas opuestas* deben tener una *recta de acción (que es única) pasante, indefectiblemente, por el punto en el que está aplicada la articulación relativa*, ya que lo contrario implicaría que ambas fuerzas produjeran sendos momentos con respecto al mismo, lo que cinemáticamente equivaldría a la existencia de un *giro relativo* entre el grupo de chapas ubicado a la izquierda y el que lo está a la derecha, lo que evidentemente contradice la condición de reposo que deseamos establecer (pensar en lo que sucede con un par de tijeras).

La deducción anterior nos permite afirmar que, desde el punto de vista estático, *será posible plantear, con respecto a cada articulación relativa, una ecuación de momentos igualada a cero, bien sea de las fuerzas ubicadas a su izquierda o (excluyente) bien de las fuerzas ubicadas a la derecha*. Dado que si es *n* el número de chapas será *n-1* el de articulaciones relativas, el sistema que siempre podremos plantear contará con *3 (Estática) + (n-1) =* ***n+2 ecuaciones***, *igual al número de incógnitas del problema*, por lo que **todo sistema isostático y cinemáticamente estable tiene solución dentro del ámbito de la Estática**.

Dado que el planteo de las **tres ecuaciones de la Estática** exige la *participación de todas las fuerzas actuantes* sobre el sistema, es decir, tanto de las *exteriores* o *activas* como de las *reacciones de vínculo externo* o *reactivas*, se las denomina **ecuaciones de equilibrio absoluto**, mientras que a las **ecuaciones de momentos adicionales con respecto a las articulaciones relativas** se las llama, justamente, **ecuaciones de equilibrio relativo**.

Es conceptualmente muy importante que veamos el *trasfondo cinemático que implica cada ecuación que planteamos*. Para ello, volvamos a la figura 8.24.03, y supongamos que las ecuaciones de la Estática que elegimos son dos de proyecciones sobre los ejes *x* e *y* de referencia y una de momentos con respecto al origen de coordenadas, y adicionalmente, por supuesto, la ecuación de equilibrio relativo. El significado, entonces, de cada una de las cuatro ecuaciones que corresponden en este caso será el siguiente:

- $\sum \boldsymbol{Px} = \mathbf{0}$ nos dice que no debe haber fuerza alguna que pueda desplazar al arco triarticulado como conjunto en la dirección del eje *x*.
- $\sum \boldsymbol{Py} = \mathbf{0}$ nos dice que no debe haber fuerza alguna que pueda desplazar al arco triarticulado como conjunto en la dirección del eje *y*.
- $\sum \boldsymbol{M}(\boldsymbol{O}) = \mathbf{0}$ nos dice que no debe haber fuerza alguna que pueda hacer rotar al arco triarticulado como conjunto alrededor del punto O.
- $\sum \boldsymbol{Mizq}.(\boldsymbol{D}) = \sum \boldsymbol{Mder}.(\boldsymbol{D}) = \mathbf{0}$ nos dice que no debe existir rotación relativa entre las chapas que conforman el arco triarticulado.

Como se ve, **las *ecuaciones* constituyen la traducción simbólica, desde el punto de vista *estático* (o de las fuerzas), de lo que NO deseamos que suceda, esto es, que la estructura se mueva (punto de vista *cinemático*)**.

Por último, corresponde que pongamos de relieve que cuando la *articulación entre dos chapas viene dada por dos bielas paralelas*, el contratiempo que plantea el hecho de que la articulación sea impropia puede salvarse considerando que, si las resultantes R_i y R_d deben pasar por la articulación relativa, su recta de acción debe ser paralela a la dirección de las bielas, por lo que su proyección sobre un eje que les sea perpendicular debe ser nula. Luego, *la ecuación de momentos que habitualmente puede plantearse se reemplaza, en los casos de articulaciones dadas por dos bielas paralelas por una ecuación de proyección igualada a cero de todas las fuerzas (activas y reactivas) ubicadas a la izquierda o a la derecha de la articulación relativa*.

- **Pregunta Nº 8.28: ¿QUÉ ES EL MODELO MATEMÁTICO DE UNA ESTRUCTURA?**

En el ámbito de nuestra asignatura, llamaremos ***modelo matemático*** de una estructura al *esquema que la representa simbólicamente* y que contiene todos los *datos* (geometría, fuerzas exteriores o cargas y condiciones de sustentación) e *incógnitas* (reacciones de vínculo externo e interno) que es preciso poner de manifiesto para poder determinar (nosotros lo haremos mediante procedimientos analíticos) el valor de estas últimas.

- **Pregunta Nº 8.29: ¿QUÉ PASOS DEBEN SEGUIRSE PARA RESOLVER UNA ESTRUCTURA?**

La resolución de una estructura implica, básicamente, seguir los siguientes pasos:

a) Establecer la *geometría del modelo*. (En nuestro curso será un dato.)
b) Llevar a cabo el *análisis de cargas*. (También serán dato del problema.)
c) Establecer las *condiciones de sustentación del modelo*. (Idem.)
d) **Realizar el análisis cinemático** del modelo.
e) **Realizar el esquema de cuerpo libre inicial** del modelo.
f) **Plantear las ecuaciones de equilibrio** (*absoluto* y *relativo*).
g) **Resolver el sistema de ecuaciones**.
h) **Interpretar los resultados**.
i) **Realizar el esquema de cuerpo libre final** del modelo.

- **Pregunta Nº 8.30: ¿PODEMOS RESOLVER UN EJERCICIO DE APLICACIÓN?**

Con la intención de afianzar los conceptos que hemos visto durante el desarrollo de este capítulo, resolveremos a continuación un ejercicio con el que le daremos cierre. Recorreremos, por tanto, la realización de los pasos (d) a (i) de la pregunta anterior, recibiendo como dato el modelo matemático correspondiente, lo que implica tener resueltos los pasos (a), (b) y (c).

1. Modelo matemático:

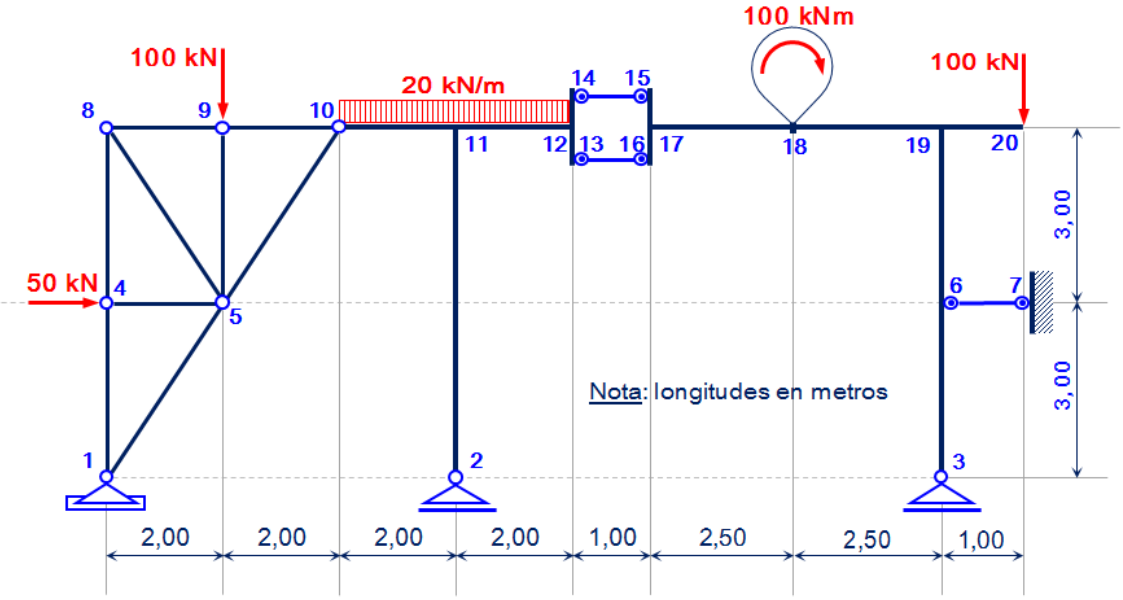


Fig. 8.30.01: Ejercicio de aplicación: *modelo matemático*

2. Identificación de las chapas:

Si bien este punto quedará mucho más claro después de haber visto los dos próximos capítulos, aceptaremos por ahora que la estructura a resolver es una cadena cinemática abierta, constituida por las tres chapas que se muestran a continuación en línea entrecortada y sombreadas:

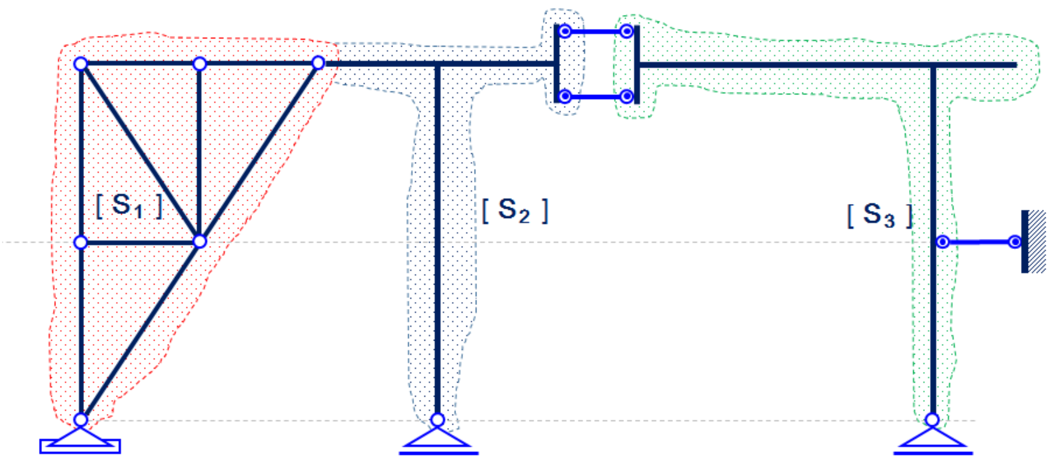


Fig. 8.30.02: Ejercicio de aplicación: *identificación de las chapas*

Sólo anticiparemos que la chapa *[S_1]* es lo que en el Capítulo 9 denominaremos *Sistema Reticulado,* mientras que las chapas *[S_2]* y *[S_3]* constituyen lo que llamaremos *Sistemas de Alma Llena*, en el Capítulo 10, destacando que la tipología estructural a la que responde cada chapa no cambia en absoluto las características de las reacciones de vínculo externo.

3. Análisis cinemático: (paso *d*)

De acuerdo con lo que hemos dicho más arriba, el análisis cinemático consiste en demostrar que la cadena cinemática está *isostáticamente sustentada* y es *cinemáticamente estable*. Es importante recordar que *esta verificación es totalmente independiente del estado de cargas aplicado*.

3.1. *Isostaticidad* del sistema:

El sistema que debemos resolver presenta las siguientes características:

- *Tipo* de cadena cinemática: *abierta*
- *Cantidad* de chapas = n = 3
- Número de *grados de libertad*: GL = n+2 = 3+2 = 5
- Número de *condiciones de vínculo*: CV = 2 (apoyo fijo aplicado en 1) + 1 (apoyo móvil aplicado en 2) + 1 (apoyo móvil aplicado en 3) + 1 (biela aplicada en 6) = 5

- **GL = CV => el sistema está isostáticamente sustentado**

3.2. Comprobación de que el sistema es *cinemáticamente estable*:

Ahora, debemos comprobar que el sistema no presenta vinculación aparente. Lo haremos mostrando que cada una de las tres chapas posee sus tres condiciones de vínculo, sin vinculación aparente. Previamente, pondremos de manifiesto aquellos elementos que pueden determinarse de manera inmediata (ver figura 8.30.03).

- **Polo O_1 de la chapa S_1:** coincide con el punto 1 de la chapa, ya que ésta tiene aplicado allí un apoyo fijo o articulación (punto fijo).

- **Polo O_3 de la chapa S_3:** se trata en este caso de un polo virtual, coincidente con el punto 6, donde se intersectan la normal al apoyo móvil aplicado en 3 y el eje de la biela.

- **Articulación relativa A_{1-2} entre las chapas S_1 y S_2:** coincide con el punto 10, común a ambas chapas.

- **Articulación relativa $A_{2\text{-}3}$ entre las chapas S_2 y S_3:** debe ubicarse en el punto de intersección de los ejes de las bielas, que en este caso son paralelas, por lo que la articulación es impropia.

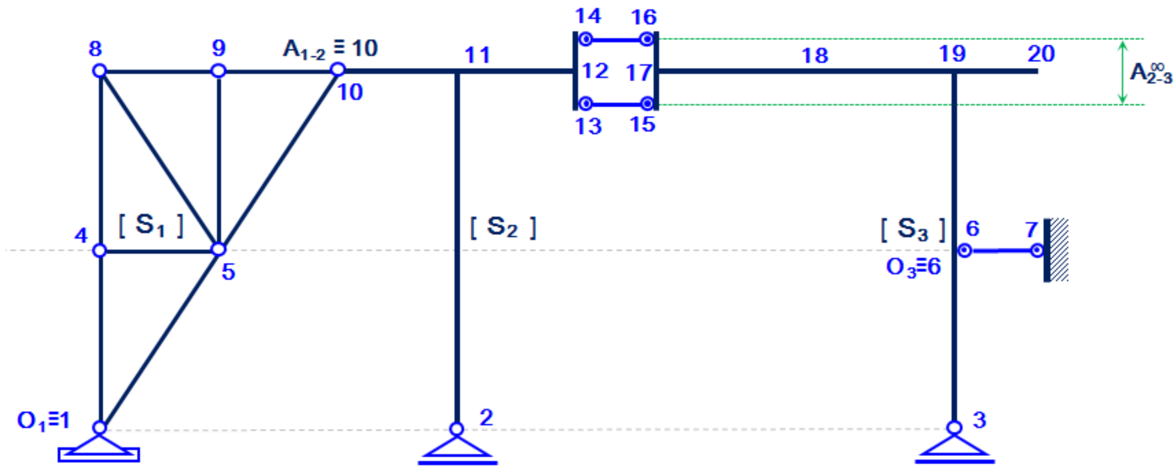


Fig. 8.30.03: Ejercicio de aplicación: *identificación de polos y articulaciones relativas*

3.2.1. Estabilidad cinemática de la Chapa S_1: esta chapa tiene aplicado en el punto 1 un apoyo fijo que, como sabemos, impone dos condiciones de vínculo. Por lo tanto, *la condición faltante deben suministrársela las otras dos chapas que integran la cadena*.

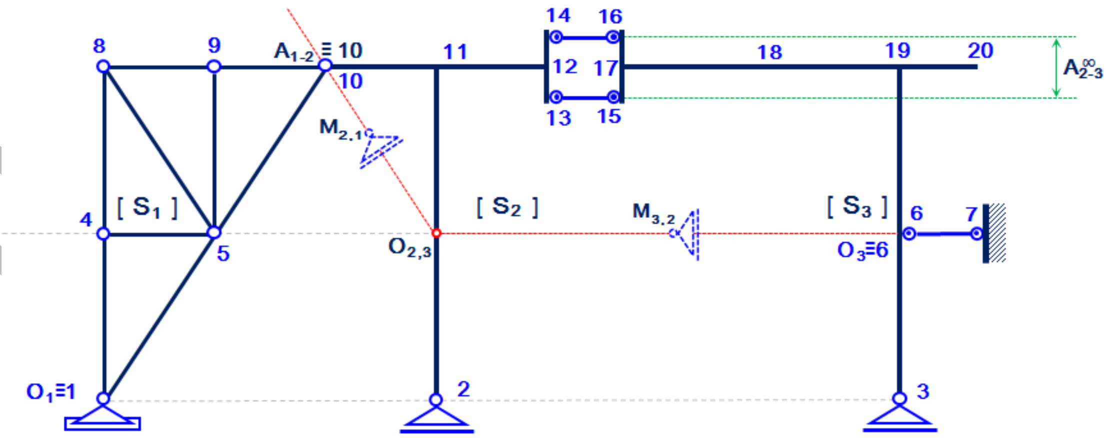


Fig. 8.30.04: Ejercicio de aplicación: *sustentación de la chapa S1*

En la figura 8.30.04 hemos puesto de manifiesto el modo de proceder. De acuerdo con lo visto al tratar el caso del arco triarticulado, la chapa S_3 constituye para la S_2 una biela virtual, cuya dirección surge de unir su polo de rotación O_3 con la articulación relativa $A_{2\text{-}3}$ entre las dos chapas. Dado que ésta se ubica en el punto impropio de la dirección horizontal, debemos trazar por O_3 una recta paralela a la dirección de las bielas que vinculan a ambas chapas. Además, dijimos en su momento que los polos de dos chapas consecutivas están alineados con la articulación relativa entre ambas, por lo que el punto $O_{2,3}$, donde la dirección de la biela (o la normal al apoyo móvil virtual $M_{3,2}$, que es equivalente) se corta con la normal al apoyo móvil de la chapa S_2, aplicado en 2, constituye el polo virtual de rotación $O_{2,3}$ de S_2, debido a S_3. Por último, uniendo este polo $O_{2,3}$ con la articulación relativa A_{1-2}, entre las chapas S_1 y S_2, obtenemos la dirección de la biela virtual (o del apoyo móvil $M_{2,1}$) en la que S_2 se transforma para S_1. Tal como podemos observar, la dirección de esta biela (o la normal al apoyo móvil $M_{2,1}$) no pasa por el posible polo de rotación O_1, lo que nos permite concluir que *la chapa S_1 posee las tres condiciones de vínculo que garantizan su isostaticidad y que es, además, cinemáticamente estable*.

3.2.2. **Estabilidad cinemática de la Chapa S_2:** la chapa S_2 tiene aplicado en el punto 2 un apoyo móvil que, como sabemos, sólo impone una condición de vínculo (en este caso, de dirección vertical). Por lo tanto, *las dos condiciones faltantes deben suministrársela las otras dos chapas que integran la cadena*.

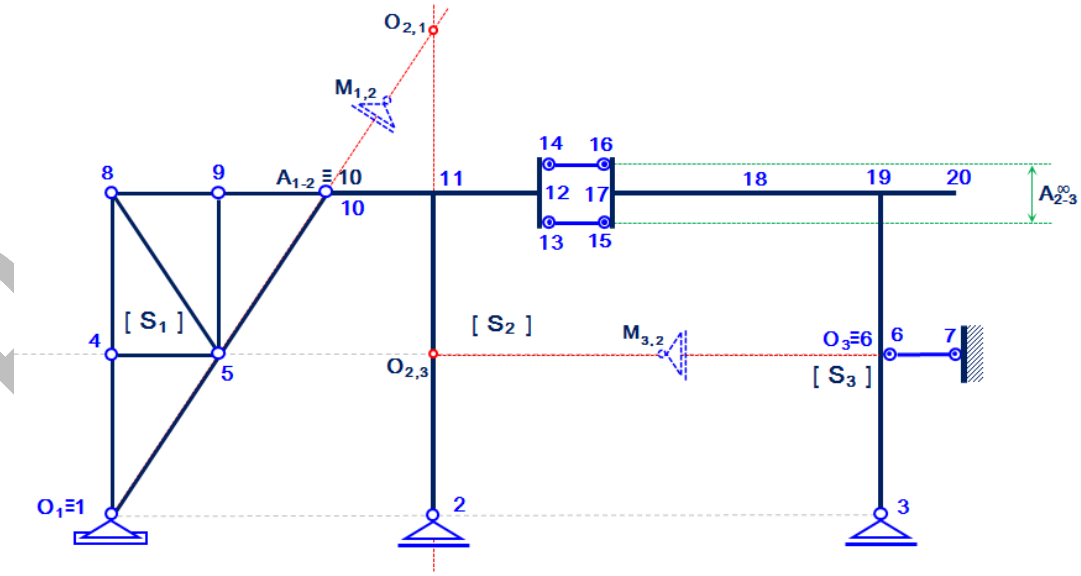


Fig. 8.30.05: Ejercicio de aplicación: *sustentación de la chapa S2*

El modo de proceder en este caso está puesto de relieve en la figura 8.30.05. De acuerdo con lo visto al tratar el caso del arco triarticulado, la chapa S_1 constituye para la S_2 una biela virtual (equivalente al apoyo móvil virtual $M_{1,2}$), cuya dirección surge de unir su polo de rotación O_1 con la articulación relativa A_{1-2} entre las dos chapas. Por otra parte, la chapa S_3 constituye para la S_2 una biela virtual, cuya dirección surge de unir su polo de rotación O_3 con la articulación relativa A_{2-3} entre las dos chapas. Dado que ésta se ubica en el punto impropio de la dirección horizontal, debemos trazar por O_3 una recta paralela a la dirección de las bielas que vinculan a ambas chapas. Podemos observar ahora que la chapa S_2 tiene aplicadas tres condiciones de vínculo, dadas por su propio apoyo móvil real aplicado en 2, por el apoyo móvil virtual $M_{1,2}$ que le aporta la chapa S_1 y por el apoyo móvil virtual $M_{3,2}$ que le aporta la chapa S_3, observándose que las tres normales correspondientes no concurren a un punto común, lo que nos permite concluir que *la chapa S_2 posee las tres condiciones de vínculo que garantizan su isostaticidad y que es, además, cinemáticamente estable*.

El caso de la chapa S_2 podemos verlo, también, de este otro modo: la normal al apoyo móvil virtual $M_{1,2}$ se corta en $O_{2,1}$ con la normal al apoyo móvil real aplicado en 2, lo que equivale a decir que la chapa S_2 posee allí un punto fijo, alrededor del cual podría rotar. Por otra parte, la normal al apoyo móvil virtual $M_{3,2}$ se corta en $O_{2,3}$ con la normal al apoyo móvil real aplicado en 2, lo que equivale a decir que la chapa S_2 posee allí un punto fijo, alrededor del cual podría rotar. Podemos extraer de lo anterior dos conclusiones. Por un lado, podemos afirmar que si la chapa S_2 posee dos puntos fijos, también está fija, debido al vínculo de la rigidez, o bien, decir que si nuestro análisis nos conduce a la verificación de que la chapa S_2 posee dos polos de rotación que no son coincidentes, es imposible que rote, lo que significa, entonces, que está fija.

3.2.3. Estabilidad cinemática de la Chapa S_3: la chapa S_3 tiene aplicados un apoyo móvil real en el punto 3 y una biela real en el punto 6, imponiéndole cada uno de ellos una condición de vínculo (de dirección vertical en el primer caso y horizontal en el segundo), que equivale a la existencia de un punto fijo en 6. Luego, a esta chapa le falta, como a la S_1, una condición adicional, que *debe ser aportada por las otras dos chapas que integran la cadena*.
Los detalles de este caso se muestran en la figura 8.30.06.

De acuerdo con lo visto al tratar el caso del arco triarticulado, la chapa S_1 constituye para la S_2 una biela virtual (equivalente al apoyo móvil virtual $M_{1,2}$), cuya dirección surge de unir su polo de rotación O_1 con la articulación relativa A_{1-2} entre las dos chapas. Dado que los polos de dos chapas consecutivas están alineados con la articulación relativa correspondiente, obtenemos la ubicación de $O_{2,1}$ en el punto de intersección de la dirección de la biela anterior con la normal al apoyo móvil real de la chapa S_2, punto que unido con la articulación $A_{2\text{-}3}$ nos dará la dirección de la biela virtual (equivalente al apoyo móvil virtual $M_{2,3}$) que la chapa S_2 le aporta, finalmente, a la chapa S_3. Dado que su dirección no concurre a la articulación virtual existente en 6, podemos concluir que *la chapa S_3 posee las tres condiciones de vínculo que garantizan su isostaticidad y que es, además, cinemáticamente estable*.

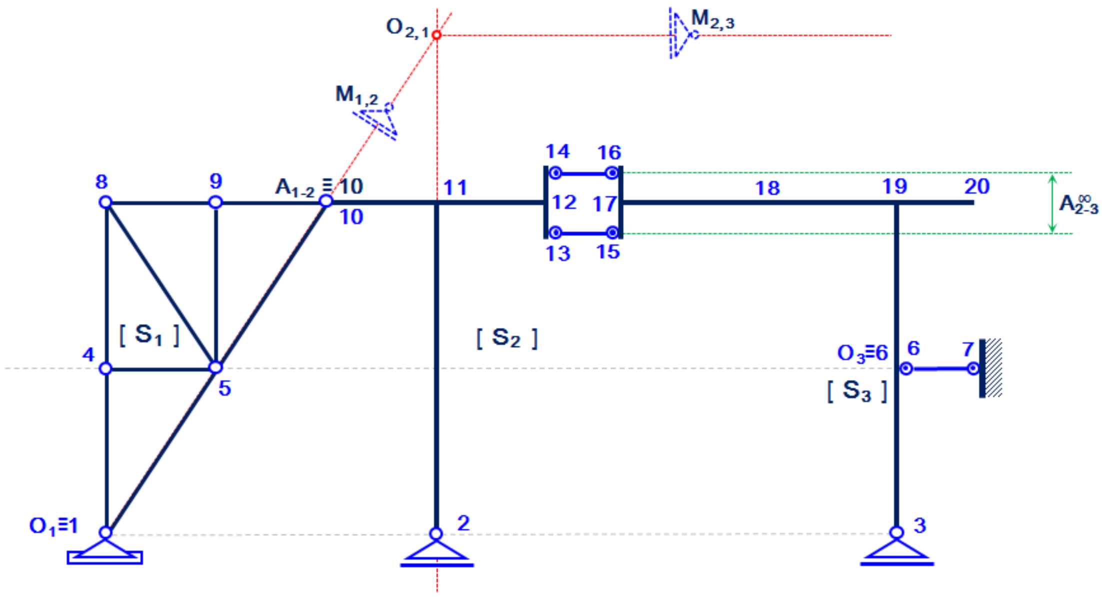


Fig. 8.30.06: Ejercicio de aplicación: *sustentación de la chapa S3*

4. <u>Determinación de las reacciones de vínculo externo (RVE)</u>: (pasos *e* a *i*)

4.1. <u>Esquema de cuerpo libre inicial</u>:

La determinación de las RVE implica, en primer lugar, el establecimiento del *esquema de cuerpo libre inicial*. Éste constituye, como su nombre lo indica, un *esquema del modelo matemático* en el que, en virtud del *Principio de Reacciones Vinculares*, **cada condición de vínculo será reemplazada por la magnitud estática que le es equivalente**. Es importante destacar que **las RVE NO coexisten con las condiciones de vínculo**.

El reemplazo de las condiciones de vínculo por las fuerzas que les son equivalentes podemos razonarlo diciendo que, si al iniciar el curso asociamos la idea de fuerza para justificar el movimiento de un punto material, es lícito ahora que, pensando a la inversa, imaginemos el desarrollo de una fuerza en correspondencia con el punto donde el vínculo está aplicado, para impedir que dicho punto se mueva, debido a la acción de las fuerzas exteriores. En cuanto al *sentido* de las *reacciones de vínculo* que son *puestas en evidencia*, puede ser *cualquiera*, ya que lo desconocemos (sólo conocemos la dirección de sus rectas de acción, dado que somos nosotros quienes hemos impuesto los vínculos). Si al resolver el sistema de ecuaciones el signo de la incógnita es positivo, lo interpretaremos como equivalente a que el sentido de la fuerza fue adoptado correctamente; en caso contrario, el sentido de la fuerza será el opuesto.

Dado que resolveremos la cuestión analíticamente, será imprescindible que adoptemos una *terna de referencia*, a la luz de la cual serán planteadas las *ecuaciones de equilibrio*.

Por último, diremos que en los puntos en los que se aplica un apoyo fijo, dado que éste puede restringir el desplazamiento del punto en cualquier dirección, en lugar de adoptar como incógnitas la intensidad y el argumento de la RVE, es habitual elegir sus dos componentes, con relación a los ejes de la terna de referencia.

El *esquema de cuerpo libre inicial* que adoptaremos se muestra en la figura 8.30.07.

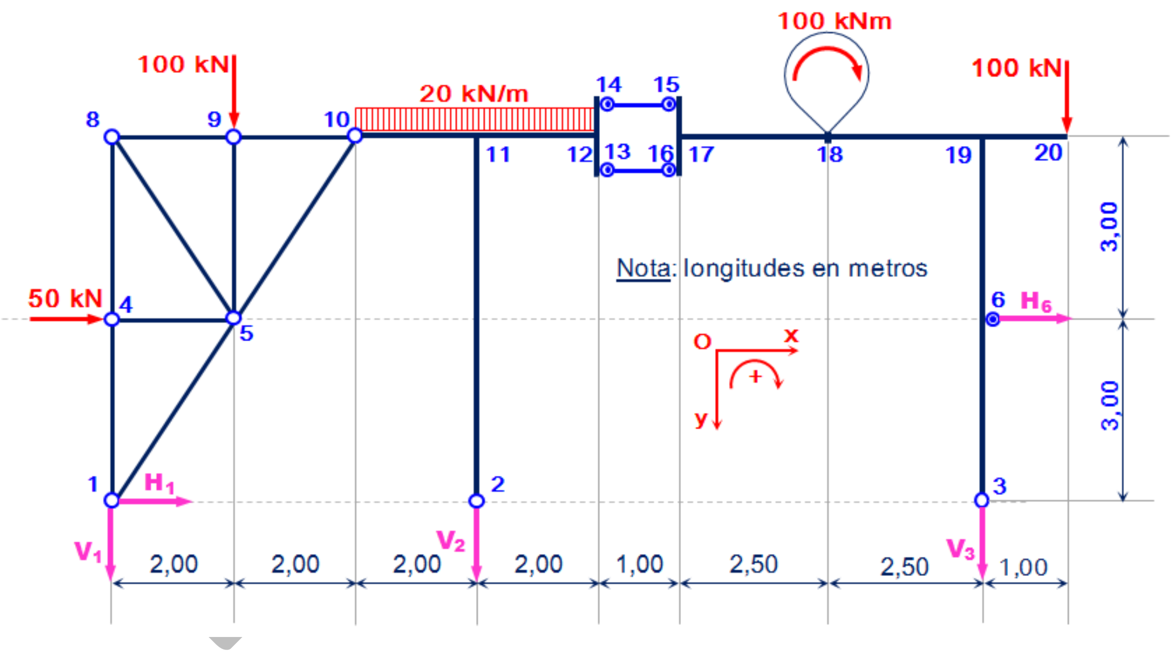


Fig. 8.30.07: Ejercicio de aplicación: *esquema de cuerpo libre inicial*

4.2. Planteo de las ecuaciones de equilibrio:

Es evidente que la resolución de nuestro problema requiere el planteo de 5 ecuaciones de condición y, dado que la Estática sólo nos brinda 3 (las de equilibrio absoluto), será necesario adicionar otras dos de equilibrio relativo (una para cada articulación relativa). Nosotros elegiremos como ecuaciones de equilibrio absoluto una de proyección sobre cada eje y una de momentos con respecto al punto 1, mientras que las de equilibrio relativo serán una de momentos de las fuerzas ubicadas a la derecha de la articulación $A_{1\text{-}2}$ y una de proyecciones de las fuerzas ubicadas a derecha de la articulación materializada por las dos bielas paralelas.

1) $\sum Px = 50\ kN + H1 + H6 = 0$

2) $\sum Py = 100\ kN + 20\ kN/m.4{,}00\ m + 100\ kN\ + V1 + V2 + V3 = 0$

3) $\sum M(1) = 50\ kN\ .3{,}00\ m + 100\ kN\ .2{,}00\ m + 20\frac{kN}{m}.4{,}00\ m\ .6{,}00\ m + 100\ kNm + 100kN\ .15{,}00\ m + H6\ .3{,}00\ m + V2\ .6{,}00\ m + +V3\ .14{,}00\ m = 0$

4) $\sum M(10)der = 20\frac{kN}{m}.4{,}00\ m\ .2{,}00\ m + 100\ kNm + 100kN\ .11{,}00\ m - -H6\ .3{,}00\ m + V2\ .2{,}00\ m + V3\ .10{,}00\ m = 0$

5) $\sum Py'\ der = 100\ kN + V3 = 0$

4.3. Resultados e interpretación:

La resolución del sistema de ecuaciones, arroja los siguientes resultados (dos decimales son suficientes):

- **H1 = -54,17 kN**
- **H6 = 4,17 kN**
- **V1 = -6,25 kN**
- **V2 = -173,75 kN**
- **V3 = -100,00 kN**

cuya interpretación es la siguiente: dado que todas las incógnitas fueron puestas en evidencia con signo positivo en el esquema de cuerpo libre (en base a la terna elegida), un resultado positivo nos indica que el sentido de la RVE fue adoptado correctamente, mientras que si es negativo, el sentido de la fuerza debe ser el opuesto.

En base a lo anterior, hemos establecido el *esquema de cuerpo libre final*, que se muestra en la figura 8.30.08.

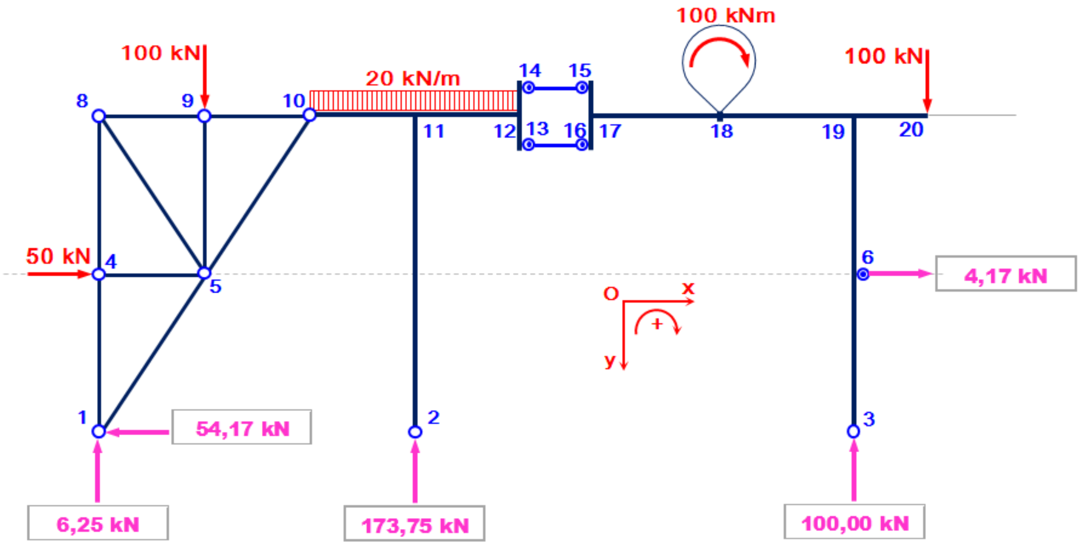


Fig. 8.30.08: Ejercicio de aplicación: *esquema de cuerpo libre final*

NOTA: se deja como propuesta para el estudiante demostrar que la resultante de las fuerzas exteriores (*R*) y la resultante de las RVE (*E*) constituyen, efectivamente, un sistema nulo.

----oOo----