RESISTENCIA DE MATERIALES

CUESTIONARIO N° 15

- ## Casos puros de solicitación– Generalidades / Proyecto y verificación de secciones

A partir de este capítulo, recorreremos los *diferentes casos de solicitaciones puras*, estableciendo para cada uno las *expresiones matemáticas* que nos permitirán resolver tanto el *aspecto resistente* de las diferentes situaciones problemáticas como así también lo que se refiere a la *evaluación de las deformaciones* que tienen lugar, finalizando nuestro curso con el estudio del fenómeno de *inestabilidad del equilibrio* (pandeo), limitándolo sólo al caso de barras de eje recto comprimidas o flexo-comprimidas .

- **Pregunta 15.01: ¿QUÉ SON LAS SOLICITACIONES PURAS?**

Se denominan *casos puros de solicitación* a aquellos en los cuales la sección transversal de la barra que se analiza está sometida, exclusivamente, a *un solo esfuerzo característico (N, M o Mt)*. Con estos casos simples la Resistencia de Materiales trata de dar la solución básica para el dimensionamiento de las barras de eje recto. Así, tendremos:

- ***Solicitación axil:*** caso de solicitación en el cual sobre la sección que se analiza *sólo actúa un esfuerzo normal* o *axil **N***.
- ***Flexión pura:*** caso de solicitación en el cual sobre la sección que se analiza *sólo actúa un par flexor **M***.
- ***Torsión pura:*** caso de solicitación en el cual sobre la sección que se analiza *sólo actúa un par torsor **Mt***.

- **Pregunta 15.02: ¿Y QUÉ SUCEDE EN LA PRÁCTICA?**

Dejando de lado situaciones específicas, como la de las barras de un reticulado (sometidas sólo a esfuerzos normales) o la de un eje de transmisión (sometido sólo a torsión), casos en los cuales podemos admitir que las solicitaciones son puras, si despreciamos el efecto secundario del peso propio, en la práctica profesional, las secciones transversales de las barras suelen estar solicitadas por más de un esfuerzo, tal como ya lo hemos visto en el Capítulo 10, al tratar los Sistemas de Alma Llena y, de modo particular, el trazado de los Diagramas de Características que, justamente, nos dan las leyes de variación de esos esfuerzos a lo largo de cada una de las barras que componen la estructura.

- **Pregunta 15.03: ¿POR QUÉ, ENTONCES, ESTUDIAMOS, BÁSICAMENTE, LOS CASOS QUE HEMOS LLAMADO PUROS?**

Hemos dicho ya que el objetivo de la Resistencia de los Materiales es decididamente aplicado, es decir, que trata de poner en manos del proyectista de estructuras procedimientos relativamente simples, respaldados por un análisis teórico simplificado y por resultados de ensayos de laboratorio. Dado que básicamente son tres los ensayos que pueden llevarse a cabo con cierta simpleza y que instalar y equipar un laboratorio es oneroso, *sólo queda como recurso estudiar primero los casos simples y luego hacer uso del Principio de Superposición de Efectos cuando las solicitaciones se presentan combinadas*.

Es preciso aclarar que bajo *estados tensionales complejos* no todos los materiales fallan de la misma manera, por lo que a lo largo del tiempo, diferentes investigadores, han tratado de solucionar el inconveniente proponiendo teorías, denominadas *Teorías de Falla* o *de Rotura*. Si bien podríamos decir que a cada material le corresponde su propia teoría de falla, puede hacerse una primera clasificación de los *materiales* en *dúctiles* y *frágiles*, encontrándose que, de todas las teorías que se conocen, existen, dentro de las más representativas, algunas que explican mejor la falla de los primeros, mientras que otras lo hacen con la de los segundos.

❖ Pregunta 15.04: ¿CÓMO ESTUDIAREMOS ESTOS CASOS PUROS?

El análisis de cada uno de los tres casos puros mencionados en la pregunta N°1 lo llevaremos a cabo apoyándonos sobre tres puntos, dos que son recurrentes y un tercero que es propio del caso que se estudia:

a) **Validez de la Ley de Hooke** (para ambos tipos de tensiones).
b) **Ecuaciones de equivalencia**.
c) **Una hipótesis referida al aspecto geométrico del problema** (propia de cada caso de solicitación que se analiza).

❖ Pregunta 15.05: ¿QUÉ SIGNIFICA PROYECTAR Y QUÉ VERIFICAR UN ELEMENTO ESTRUCTURAL?

El *proyecto o dimensionamiento* y la *verificación* de secciones constituyen los dos aspectos del *diseño resistente* de un elemento estructural que se le pueden presentar al ingeniero estructuralista.

Proyectar o dimensionar una pieza es la tarea que se realiza cuando su resolución estructural se lleva a cabo por primera vez. Previamente, el elemento estructural no existía y es esta la instancia en la que *se dimensiona su sección transversal*, lo que significa *asignarle forma y dimensiones* determinadas, de modo tal que las zonas más solicitadas resistan adecuadamente los esfuerzos máximos que surgen de los diagramas de características.

La *verificación,* en cambio, significa *probar* que un *elemento estructural existente*, de *material*, *forma y dimensiones* determinados, está capacitado para resistir, con el margen de seguridad que corresponde, las solicitaciones máximas que surgen de los diagramas de características. Habitualmente, lo que motiva la necesidad de llevar a cabo una verificación estructural es un incremento o un cambio de las fuerzas exteriores actuantes.

----oOo----

CUESTIONARIO N° 16

- Solicitación axil

La *Solicitación Axil* constituye, sin lugar a dudas, el caso más sencillo de solicitación, dado que someter a una barra a esfuerzos exteriores tales que sólo traten de aumentar o disminuir su longitud es un hecho físico simple.
Dentro del ámbito de nuestra asignatura, son dos los elementos estructurales que presentan este tipo de solicitación: las *barras de un reticulado*, que pueden estar solicitadas a tracción o a compresión, y las denominadas *columnas*, que siempre están comprimidas o, llegado el caso, flexo-comprimidas, dada la función que les toca cumplir en la composición de una estructura.
Si bien la expresión matemática que domina el aspecto resistente del problema es válida tanto para esfuerzos de tracción como de compresión, veremos en el último capítulo que las barras comprimidas requieren un estudio especial que involucre a toda la barra y no sólo a la sección más comprometida.

❖ **Pregunta 16.01: ¿CUÁNDO EXISTE SOLICITACIÓN AXIL PURA?**

Ampliando lo que hemos expresado al responder la pregunta N° 15.01, diremos que *una sección transversal de una barra en equilibrio está sometida a Solicitación Axil cuando al reducir al baricentro de la sección las fuerzas ubicadas a uno y otro lado de la misma sólo se obtienen como resultado dos fuerzas opuestas perpendiculares al plano que contiene a la sección*. Según ya sabemos, estos esfuerzos pueden ser de *tracción* o de *compresión*.

Si bien nos hemos referido, con carácter general, al esfuerzo en una sección, admitiremos en lo que sigue (y es lo que se da habitualmente en la práctica) que el esfuerzo normal se mantiene constante a lo largo de toda la barra o, al menos, en diferentes zonas de la misma (ver nota al pie).

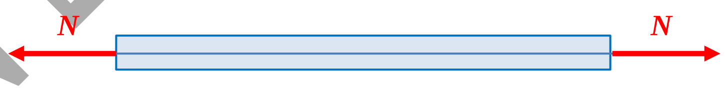

Fig. 16.01.01-SOLICITACIÓN AXIL: barra sometida a un esfuerzo de *tracción*

NOTA: No suele ser habitual que este caso de solicitación se presente aislado en una única sección de la barra, sino que lo que ocurre a menudo es que todas sus secciones presentan el mismo esfuerzo normal (p.e. las barras de un reticulado), o bien, éste varía linealmente a lo largo del eje (p.e. en una columna, en la que el esfuerzo de compresión crece hacia abajo debido al peso propio de la misma, aunque su valor frente al esfuerzo propiamente dicho suele ser despreciable).

❖ **Pregunta 16.02: ¿CUÁL ES EL CONCEPTO DE FIBRA?**

Antes de proseguir, introduciremos el concepto de **fibra**. Se trata de una idea general, que emplearemos en lo sucesivo en todos los casos de solicitación.

En el capítulo 10, mostramos cómo se concibe intelectualmente un *sólido de alma llena*. Si en la figura que da origen a su sección transversal se considera un punto cualquiera y se adopta en torno de él un elemento dA, denominaremos *fibra* (ver figura 16.02.01) al *paralelepípedo elemental que éste origina durante el desplazamiento de la figura a lo largo de toda la longitud de la línea directriz*. De este modo, podremos pensar al sólido de alma llena como una sucesión infinita de fibras, ubicadas una al lado de otra y entre las cuales existe una cierta ligazón que da pie al funcionamiento del sólido como una sola pieza.

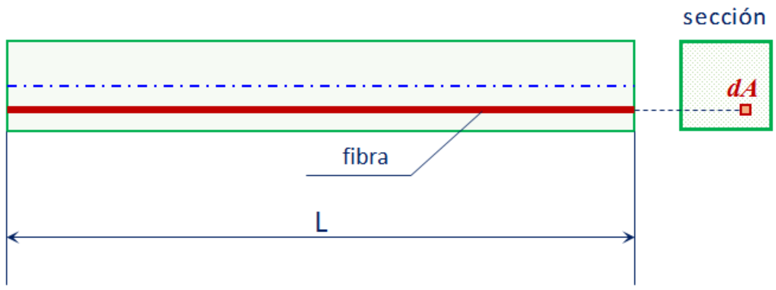

Fig. 16.02.01-SOLICITACIÓN AXIL: representación esquemática de una *fibra*

- **Pregunta 16.02: ¿CUÁL ES LA HIPÓTESIS QUE RIGE EL ASPECTO GEOMÉTRICO DE LA SOLICITACIÓN AXIL?**

La hipótesis que rige el aspecto geométrico de la solicitación axil y que junto a la Ley de Hooke y a las ecuaciones de equivalencia permite la deducción de las expresiones relacionadas con los aspectos resistente y de deformación del problema es la *hipótesis de Bernoulli (o de Bernoulli-Navier)*, que expresa que *las secciones de la barra planas y perpendiculares al eje antes de que actúen las cargas exteriores continúan siéndolo después que éstas han actuado y deformado a la pieza.*

Esta hipótesis, que ha sido verificada experimentalmente, no se cumple en las zonas de introducción de las fuerzas exteriores de manera concentrada, pero, dado que de acuerdo con el Principio de Saint Venant, la extensión de la perturbación se extenderá sobre una longitud del orden de la mayor dimensión de la sección transversal extrema, y ésta es mucho menor que la longitud de la barra, podemos concluir que en la mayor parte de la pieza (digamos, el 80% o más) tendrán validez las expresiones de la Resistencia de Materiales. En las zonas perturbadas, los estados de tensión y de deformación deberían estudiarse con otros procedimientos (p.e., con la Teoría Matemática de la Elasticidad o mediante ensayos de laboratorio), aunque habitualmente, el diseño de las uniones de la barra con los elementos con los que se vincula, siguiendo los procedimientos reglamentarios, suele eximirnos de mayores precisiones.

- **Pregunta 16.03: ¿QUÉ CONCLUSIONES IMPORTANTES SE EXTRAEN DE LA HIPÓTESIS DE BERNOULLI-NAVIER?**

En primer lugar, recordaremos las dos expresiones correspondientes a la Ley de Hooke, así como las ecuaciones de equivalencia, adaptadas al presente caso de solicitación:

a. $\sigma = E \cdot \varepsilon$ (16.03.01) (Ley de Hooke para tensiones normales)
b. $\tau = G \cdot \gamma$ (16.03.02) (Ley de Hooke para tensiones tangenciales)

1. $Nz = \int \sigma_z \, dA$
2. $Qx = \int \tau_{zx} \, dA = 0$
3. $Qy = \int \tau_{zy} \, dA = 0$
4. $Mx = \int \sigma_z \, y \, dA = 0$
5. $My = \int \sigma_z \, x \, dA = 0$
6. $Mz = \int (\tau_{zy} \, x - \tau_{zx} \, y) \, dA = 0$

(16.03.03)
(Ecuaciones de equivalencia)

Una primera lectura de la hipótesis de Bernoulli-Navier nos permite observar que, si las secciones se mantienen planas, o bien las distorsiones γ son nulas, o, en caso de existir, deben poseer la misma intensidad y el mismo signo en todos los puntos de la sección, o sea, que deben ser constantes. En el primer caso, si $\gamma = 0$, deben ser nulas también las tensiones tangenciales τ (ver ecuación 16.03.02); en el segundo, si $\tau = cte.$, la segunda y la tercera ecuaciones de equivalencia nos conducirían al absurdo de que debe ser nula el área de la sección transversal. Podemos establecer, entonces, como primera conclusión, que ***las tensiones tangenciales*** τ ***en la solicitación axil son nulas***, quedándonos así reducido a tres (primera, cuarta y quinta) el número de ecuaciones de equivalencia.

Por otra parte, dado que la *deformación de la barra* en solicitación axil consiste en un *alargamiento* (cuando el esfuerzo es de tracción) o un *acortamiento* (cuando lo es de compresión), la hipótesis de Bernoulli-Navier implica que las secciones transversales se desplazan paralelamente a sí mismas, por lo que todos los puntos de una sección experimentan el mismo corrimiento. Si seleccionamos dos secciones cualesquiera, separadas entre sí por una distancia l, el desplazamiento relativo entre ambas, que denominaremos Δl, será igual al cambio de la longitud inicial de una cualquiera de las fibras contenidas en ese trozo de barra. Por lo tanto, la deformación específica ε_z de cada una de ellas será igual a:

$\varepsilon_z = \Delta l \, / \, l = \text{cte.}$ (16.03.04)

Este resultado nos permite deducir, de la expresión (16.03.01), que ***el valor de las tensiones normales σ en solicitación axil es el mismo para todos los puntos de la sección***.

Resumiendo, en el caso de **Solicitación Axil** se tiene que:

- **Las distorsiones son nulas**.
- **Las tensiones tangenciales son nulas**.
- **Todos los puntos de la sección transversal experimentan la misma deformación específica**.
- **Todos los puntos de la sección transversal están sometidos a la misma tensión normal**.

❖ Pregunta 16.04: ¿CUÁL ES LA EXPRESIÓN QUE RIGE EL ASPECTO RESISTENTE DE LA SOLICITACIÓN AXIL?

Teniendo en cuenta la última conclusión en la primera de las ecuaciones de equivalencia, obtenemos:

$$N_z = \sigma_z \int dA = \sigma_z\, A = \text{cte.} \qquad (16.04.01)$$

O, más genéricamente (independientemente de la terna):

$$N = \sigma\, A = \text{cte.} \qquad (16.04.02)$$

De la que, finalmente, concluimos:

$$\boldsymbol{\sigma = N / A = \text{cte.}} \qquad (16.04.03)$$

que es la **expresión que gobierna los dos aspectos posibles del problema resistente**, esto es, el *proyecto* y la *verificación* de secciones.

Si bien esta expresión puede emplearse tanto para esfuerzos normales de tracción como de *compresión*, debemos hacer notar que en el último caso tiene limitaciones, ya que *en las barras comprimidas el equilibrio puede volverse inestable, aún para tensiones menores que la admisible*. Se trata de un fenómeno repentino y global (de la barra en su conjunto), no local, que vuelve indispensable llevar a cabo una verificación denominada *verificación al pandeo*, tema que trataremos en el último capítulo de este apunte.

❖ Pregunta 16.05: ¿CÓMO SE PROYECTA UNA BARRA SOMETIDA A SOLICITACIÓN AXIL?

Dimensionar una barra sometida sólo a esfuerzos normales consiste en determinar primero el área necesaria de la sección transversal más solicitada y adoptar a continuación su forma y dimensiones.

La *condición de diseño* que deberá imponerse es, de acuerdo con el *método de las tensiones admisibles*, que *el valor de la tensión en el punto más exigido* (en este caso es el mismo para todos los puntos de la sección) *sea menor o igual que el de la tensión admisible*. Así, tendremos que:

$$\sigma = N / A_{nec} = \sigma_{adm} \quad \Rightarrow \quad A_{nec}\,[\,L^2\,] = N / \sigma_{adm} \qquad (16.05.01)$$

Conocida el *área de la sección* transversal, debemos adoptar su *forma* (cuadrada, circular, formada por perfiles laminados, etc.) y, en función de la misma, cerrar el tema calculando (u obteniendo de una tabla de perfiles laminados) las *dimensiones* correspondientes.

- **Pregunta 16.06: ¿EN QUÉ CONSISTE LA VERIFICACIÓN DE UNA BARRA SOMETIDA A SOLICITACIÓN AXIL?**

Verificar una barra sometida solamente a esfuerzos normales consiste en probar que la barra, de material, forma y dimensiones conocidas (lo que implica conocer la tensión admisible y las características geométricas de la sección transversal), no presenta tensiones mayores que la admisible en la sección más solicitada.

Por lo tanto, la *condición de diseño* que deberá imponerse es la misma que empleamos en el caso de proyecto, pero en este caso sólo hay que hacer la cuenta para ver si se cumple lo que deseamos probar, o sea:

$$\sigma = N / A_{exist} \leq \sigma_{adm} \qquad (16.06.01)$$

Si la expresión anterior se satisface, la pieza podrá resistir el esfuerzo que la solicita con el margen de seguridad adecuado.

- **Pregunta 16.07: ¿CUÁL ES LA EXPRESIÓN QUE RIGE EL ASPECTO DE DEFORMACIÓN DE LA SOLICITACIÓN AXIL?**

Deduciremos la expresión que nos permitirá evaluar la deformación (alargamiento o acortamiento, según corresponda) que la barra experimentará bajo la acción del esfuerzo normal a partir de la Ley de Hooke y de la expresión que rige el aspecto resistente del problema.

De acuerdo con la Ley de Hooke, se tiene que: $\sigma = E \,.\, \varepsilon$

Por otro lado, hemos deducido que $\sigma = N / A$

Igualando ambas expresiones, tendremos que: $E \,.\, \varepsilon = N / A$

y, finalmente, teniendo en cuenta que $\varepsilon = \Delta l / l$, será $\Delta l / l = N / (E \,.\, A)$

de la que podemos despejar:

$$\boxed{\Delta l = N \,.\, l / (E \,.\, A)} \qquad (16.07.01)$$

siendo:

N = esfuerzo normal de la barra o del tramo de barra considerado
l = longitud inicial de la barra o del tramo de barra considerado
E = Módulo de Elasticidad Longitudinal del material
A = área de la sección transversal de la barra o del tramo de barra considerado
$E.A$ = *rigidez axil* de la sección

Cabe destacar que, si bien el producto EA constituye lo que se denomina rigidez axil, la magnitud que mide efectivamente la *rigidez axil de la barra* es el cociente EA / l (la barra pierde rigidez a medida que aumenta su longitud).

❖ Pregunta 16.08: ¿CUÁL ES LA CONVENCIÓN DE SIGNOS?

Respetando la convención adoptada cuando se trató en Estática la resolución de los *sistemas reticulados*, se consideran *positivos* las *tensiones normales de tracción* y los *alargamientos*, y *negativos* las *tensiones normales de compresión* y los *acortamientos*. Esta convención se mantendrá al tratar los casos de solicitación de *flexión pura* y de *flexión compuesta*.

----oOo----