

CAPÍTULO 6: PANDEO

6.1 Introducción

Hasta ahora se ha visto que los elementos de máquinas y de estructuras pueden fallar de una gran variedad de formas de acuerdo a los materiales (dúctiles o frágiles), a los tipos de carga (estática o casi estática y variable) y a las condiciones de apoyo. Así, los elementos dúctiles pueden deformarse excesivamente (por ejemplo debido a flexión) cuando son sobrecargados ocasionando el colapso de la máquina o estructura de la cual forman parte y los elementos frágiles pueden fracturarse debido a sobrecarga. Se ha visto también que un elemento sometido a ciclos repetidos de carga puede fallar por fatiga.

En general se puede evitar la falla por resistencia diseñando los elementos “por resistencia”, es decir de tal manera que sus esfuerzos máximos permanezcan dentro de límites de resistencia admisibles. Del mismo modo se pueden diseñar los elementos “por rigidez”, es decir haciendo que las deflexiones o deformaciones máximas no sobrepasen límites admisibles.

Otro tipo de falla es la pérdida de estabilidad. Este fenómeno ocurre en ciertos casos particulares de carga como por ejemplo elementos esbeltos (columnas) sometidos a cargas de compresión, cilindros de paredes delgadas sometidos a compresión (abolladura o pandeo de cilindros) o en elementos cilíndricos sometidos a una gran presión exterior. En este capítulo se analizará exclusivamente la falla por estabilidad o pandeo de elementos de máquinas y estructurales esbeltos. En general se dice que un sistema es estable si mantiene su estado durante la acción de fuerzas externas. Será inestable si carece de esta propiedad.

En la figura Fig. 6.1 se muestra un ejemplo típico de sistema (elemento esbelto sometido a carga de compresión axial), el cual debido a ciertas causas “podrían perder su estabilidad”. Ello significa que la carga P puede alcanzar un límite para el cual el elemento se deforma bruscamente (“pandea”) con lo cual se considera que falla pues ya no puede seguir cumpliendo la función para la cual fue diseñado.

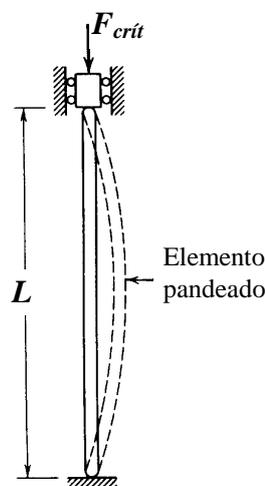


Fig. 6.1 Columna esbelta sometida a carga de compresión axial.

Al perder la estabilidad tiene lugar el paso a un nuevo estado de equilibrio, que generalmente va acompañado de grandes deformaciones elásticas, deformaciones plásticas o incluso de rotura completa. En el caso mostrado se llega a la deformación plástica, llegando los esfuerzos a estar muy por encima del esfuerzo de fluencia.

6.2 Falla por pandeo

Es el tipo de falla por estabilidad que se presenta en barras esbeltas sometidas a fuerzas axiales de compresión. En la figura Fig. 6.2 se muestran algunos ejemplos de este tipo de elementos en los cuales puede presentarse pandeo.

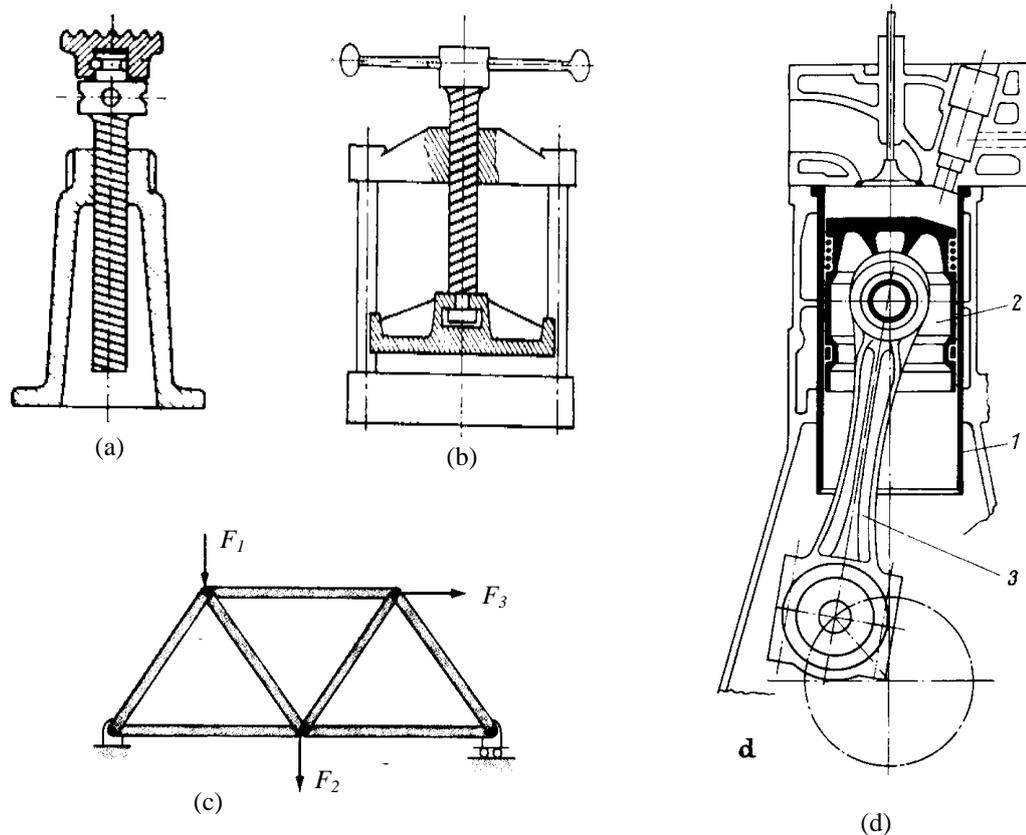


Fig 6.2 Algunos ejemplos de elementos esbeltos que pueden pandear: a) Gato de tornillo, b) Prensa de tornillo, c) Elementos estructurales y d) Biela de motor.

Si la fuerza aplicada sobre una barra recta “perfecta” sigue la dirección exacta del lugar geométrico de los centros de gravedad de la sección no se producirá el pandeo. Pero en las condiciones reales en que actúa el sistema pueden existir una o más de las siguientes causas que determina el pandeo, como por ejemplo:

- Irregularidades en la forma
- Irregularidades en la estructura
- Excentricidad de la carga respecto al centroide geométrico
- Pequeña flexión del eje

6.3 Análisis de Euler

En este análisis se parte de un sistema ideal al que se comunica cierta desviación frente a la posición de equilibrio. En la figura Fig. 6.3 se muestra una barra que se ha flexionado y se mantiene flexionada por acción de una fuerza axial F . Para el análisis de Euler se considera que la barra está articulada en ambos extremos.

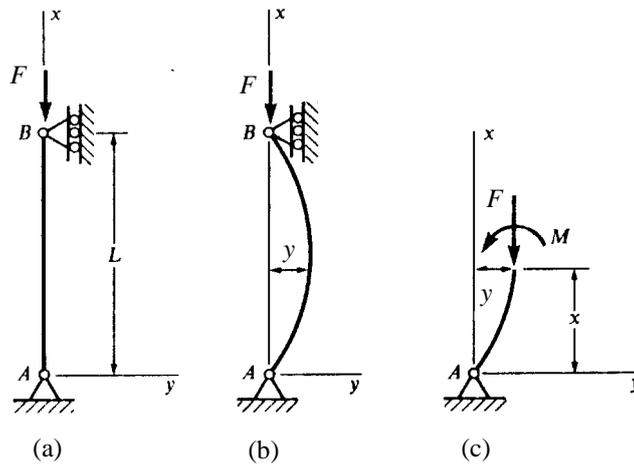


Fig. 6.3 Elemento esbelto articulado en ambos extremos: a) elemento ideal, b) elemento deformado (pandeado) y c) diagrama de cuerpo libre para el análisis de una sección cualquiera del elemento.

El momento flector M originado por la fuerza F a una distancia genérica x (Fig. 6.3 c) será:

$$M(x) = F y \tag{6.1}$$

Por otra parte, el radio de curvatura ρ de la elástica está dado por:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \tag{6.2}$$

En nuestro caso la curva elástica es tal que $\frac{dy}{dx} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho} \cong \frac{d^2 y}{dx^2}$ (6.3)

De la teoría clásica de flexión tenemos: $\frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EI}$ (6.4)

De (6.3) y (6.4): $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$ (6.5)

y con (6.1): $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{F y}{EI}$

Reescribiendo:
$$y'' + \frac{F}{EI} y = 0. \quad (6.6)$$

Se define un parámetro auxiliar a tal que:

$$a^2 = \frac{F}{EI} \quad (6.7)$$

entonces (6.6) se puede reescribir:
$$y'' + a^2 y = 0 \quad (6.8)$$

la cual es una ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes. Su solución es:

$$y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax \quad (6.9)$$

Las constantes C_1 y C_2 se pueden hallar a partir de las condiciones de borde:

Para $x = 0$, $y = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

para $x = h$, $y = 0 \Rightarrow C_2 \sin aL = 0 \xrightarrow{C_2 \neq 0} \sin aL = 0$

$$aL = k \pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$a = \frac{k\pi}{L}$$

en (6.7)
$$F = \frac{k^2 \pi^2 EI}{L^2} \quad (6.10)$$

Para $k = 0$ está claro que la expresión encontrada no tiene interés práctico. Para $k = 1$ se obtiene:

$$F_p = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (6.11)$$

Esta fuerza F_p es la denominada fuerza crítica de pandeo o fuerza de Euler¹⁾, denominada así en honor al gran matemático.

Para $k \geq 2$ las respectivas fuerzas F de la ecuación (6.10) no tienen significado físico práctico alguno, pues sus valores son mayores que F_p (ecuación 6.11) que representa la carga de pandeo bajo la cual ya falló el sistema.

La ecuación de la elástica será:
$$y = C_2 \sin \left(\frac{\pi}{L} x \right) \quad (6.12)$$

la cual representa una senoide con flecha máxima igual a C_2 .

¹⁾ Leonhard Euler (1707 - 1793), célebre matemático suizo que hizo grandes aportes a la mecánica como el genial principio de las secciones para determinar fuerzas internas, la ley del impulso en la dinámica y el análisis matemático del pandeo.

6.4 Esfuerzo de pandeo de Euler

Es la fuerza de pandeo específica o fuerza de pandeo por unidad de área correspondiente a la carga crítica de pandeo:

$$\sigma_p = \frac{F_p}{A}$$

de (6.11)

$$\sigma_p = \frac{\pi^2 EI}{L^2 A} \tag{6.13}$$

Sabemos que

$$I = i^2 A \quad \text{donde: } i \text{ radio de giro}$$

$$I \text{ momento de inercia}$$

en (6.13):

$$\sigma_p = \frac{\pi^2 E i^2}{L^2} \tag{6.14}$$

Se define grado de esbeltez de la barra (λ) de la siguiente manera: $\lambda = \frac{L}{i}$.

Reordenando (6.14):

$$\sigma_p = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \tag{6.15}$$

Esfuerzo de pandeo de Euler

A continuación se muestra la gráfica de la ecuación (6.15) y que es denominada curva o hipérbola de Euler. Observar que a medida que crece el factor de esbeltez (λ), crece también el peligro de pandeo pues σ_p disminuye.

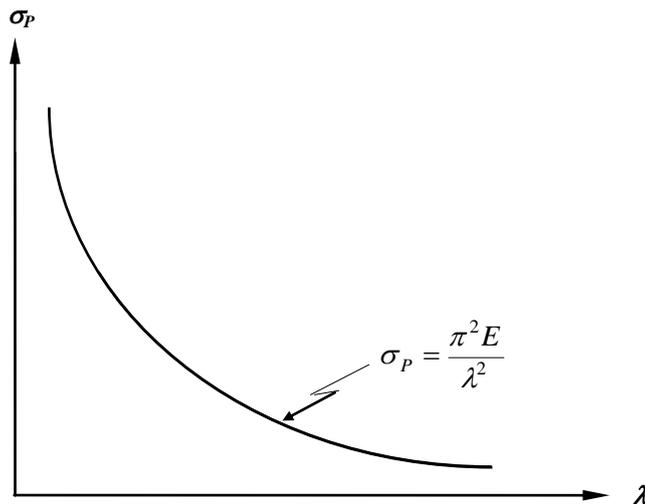


Fig. 6.4 Variación del esfuerzo de pandeo en función del grado de esbeltez según Euler. La gráfica recibe el nombre de “hipérbola” de Euler.

6.5 Plano probable de pandeo

En la expresión (6.13) se puede observar que si la sección transversal de una barra presenta distintos momentos de inercia respecto de diferentes ejes, el pandeo será más probable en un plano transversal al eje que tenga mínimo momento de inercia, debido a que σ_p será menor.

En la figura Fig. 6.5 se observan diferentes secciones de barras. En los casos (a) y (b) ambas secciones tienen el momento de inercia mínimo en el eje $x-x$, por lo tanto el pandeo probable estará en el plano (yz) perpendicular a este eje. En el caso de sección circular (c) el pandeo será igualmente probable para cualquier eje diametral. En el caso del perfil angular (d) el momento de inercia de la sección, y por consiguiente el radio de giro respectivo, son mínimos alrededor de $n-n$.

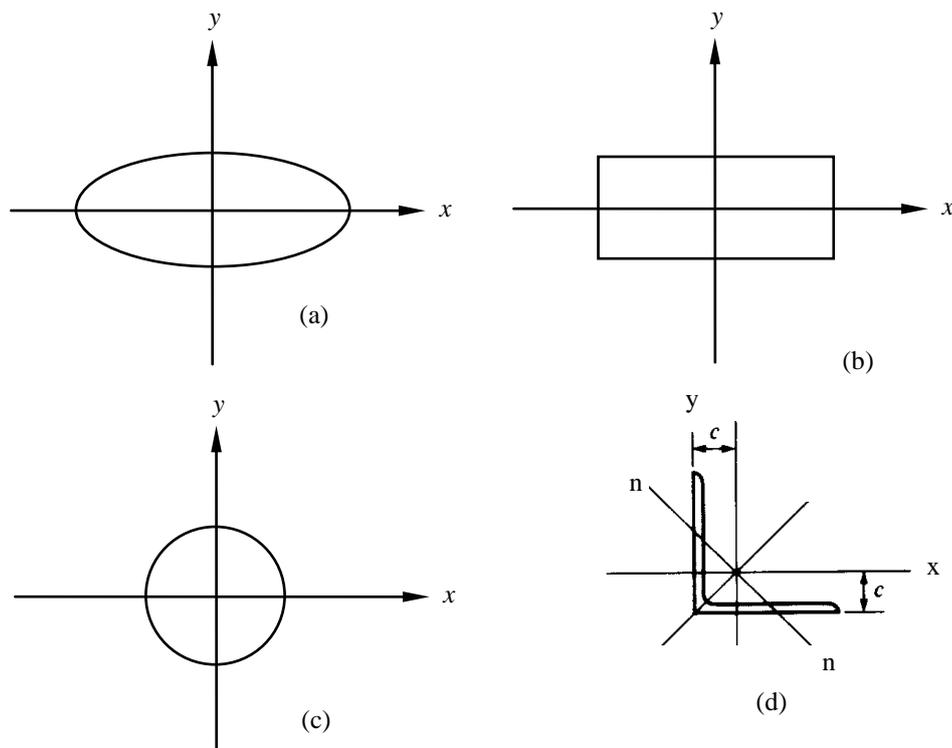


Fig. 6.5 Diferentes secciones de barras para el análisis de plano probable de pandeo.

6.6 Efecto del apoyo en los extremos

La fuerza de Euler se ha deducido para una barra con ambos extremos pivoteados. En la figura Fig. 6.6 se observan elementos esbeltos con apoyos diferentes a los del caso analizado (articulado-articulado) y la forma en que pandearían. Es evidente que la fuerza de pandeo para los otros casos será diferente a la encontrada líneas arriba. Para cada caso diferente al analizado se puede encontrar matemáticamente la fuerza crítica F_P que causaría el pandeo. A manera de ejemplo mostraremos el análisis correspondiente al de un elemento esbelto articulado empotrado. En cualquier otro caso el análisis será completamente análogo.

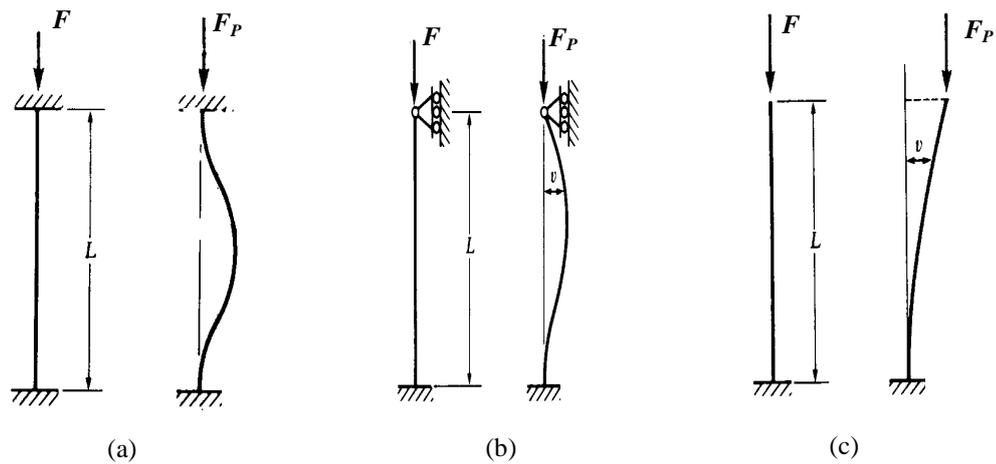


Fig. 6.6 Barras con diferentes tipos de apoyo: a) Barra con doble empotramiento, b) Barra con un extremo pivoteado y el otro empotrado y c) Barra con un extremo libre y el otro empotrado.

A continuación y a manera de ejemplo se realizará el análisis matemático para una barra con extremos empotrado-articulado (Fig. 6.7)

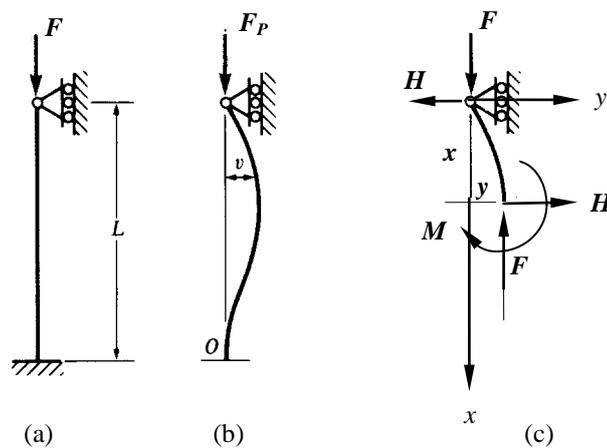


Fig. 6.7 a) Barra con extremos empotrado-articulado, b) Perfil modal de pandeo y c) Diagrama de cuerpo libre para el análisis de una sección cualquiera del elemento.

En una sección cualquiera de la columna (Fig. 6.7 c) se tendrá:

$$M = F y + H x \tag{6.16}$$

de (6.5) tenemos:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M}{EI}$$

Con (6.16)
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{F y}{EI} - \frac{H x}{EI}$$
ordenando:
$$y'' + \frac{F}{EI} y = -\frac{H}{EI} x \tag{6.17}$$

Si hacemos $a^2 = \frac{F}{EI} \Rightarrow y'' + a^2 y = -\frac{H}{EI} x \tag{6.18}$

Esta es una ecuación diferencial inhomogénea de coeficientes constantes. Su solución está dada por: $y = y_h + y_p$

donde la solución homogénea es: $y_h = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax$
y una solución particular es: $y_p = -\frac{H}{F} x$
Por tanto, la solución general es: $y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax - \frac{H}{F} x. \tag{6.19}$

Aplicando las condiciones de borde para obtener las constantes C_1 y C_2 :

Si $x = 0, y = 0 \Rightarrow C_1 = 0$
Si $x = L, y = 0 \Rightarrow 0 = C_2 \sin aL - \frac{HL}{F}$

$$C_2 \sin aL = \frac{HL}{F} \tag{6.20}$$

Derivando (6.19): $\frac{dy}{dx} = a C_2 \cos ax - \frac{H}{F}$
Si $x = L, \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow a C_2 \cos aL = \frac{H}{F} \tag{6.21}$

de (6.20) y (6.21): $\frac{\tan aL}{a} = L \Rightarrow \tan aL = aL.$

La solución de esta ecuación no lineal es: $aL = 4,4934 \Rightarrow a^2 = \left(\frac{4,4934}{L}\right)^2$

y como $a^2 = \frac{F}{EI}$ entonces: $F_P = 20,19 \frac{EI}{L^2}. \tag{6.22}$

La fuerza así deducida lleva el subíndice P pues es la crítica de pandeo para el caso analizado. Si se la quiere poner en la forma de la expresión (6.11) deducida para el caso de ambos extremos pivoteados, es decir:

$$F_P = \frac{\pi^2 EI}{L^2},$$

entonces habrá que definir un nuevo parámetro L_P que será denominado como longitud efectiva o longitud equivalente de pandeo y que nos permitirá generalizar la fórmula de Euler para cualquier tipo de apoyos.

Reescribimos la expresión (6.22) como
$$F_p = \frac{\pi^2 EI}{L_p^2} \tag{6.23}$$

donde la longitud efectiva o equivalente de pandeo será: $L_p \cong 0,7 L$.

Ahora sí podemos generalizar la expresión (6.23) para cualquier caso de extremos del elemento analizado. Es decir, para barras que no están doblemente pivoteadas se utilizará la expresión (6.23), pero no con la longitud real L sino con la equivalente o efectiva L_p :

$$F_p = \frac{\pi^2 EI}{L_p^2} \tag{6.24}$$

El esfuerzo correspondiente será:
$$\sigma_p = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \tag{6.25}$$

y el factor de esbeltez queda redefinido como:
$$\lambda = \frac{L_p}{i} \tag{6.26}$$

En lugar de deducir una expresión matemática para cada caso se puede decir que cada uno de ellos tiene un equivalente doblemente pivoteado; pero de diferente longitud. Así por ejemplo, el sistema equivalente para una barra pivoteada-empotrada de longitud L (Fig.6.8), es una barra doblemente pivoteada de longitud $L_p = 0,7 L$.

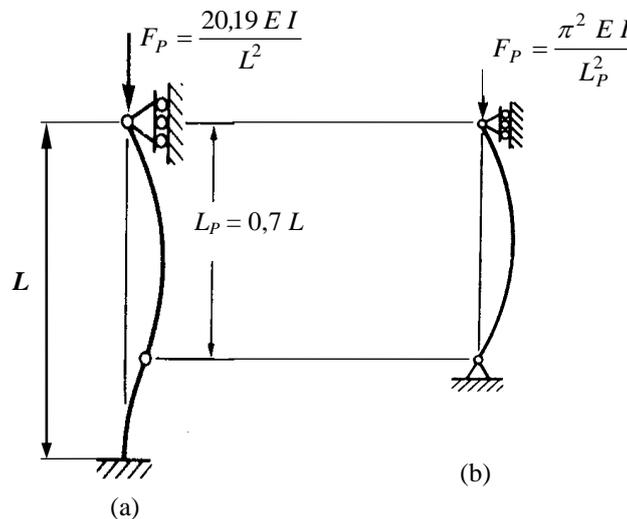
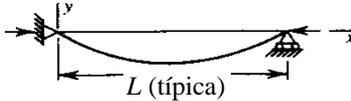


Fig. 6.8 Sistema equivalente para una barra empotrada-articulada: a) Sistema real y b) Sistema equivalente: barra doblemente articulada de longitud ideal L_p .

En la Tabla 6.1 se muestran longitudes efectivas o equivalentes para barras con diferentes tipos de apoyo o condiciones de borde.

Tabla 6.1 Comparación de longitudes efectivas o de pandeo para barras con diferentes tipos de apoyo.

Condiciones de borde	Barra deformada	Carga crítica F_P	Longitud efectiva L_P
articulada-articulada		$F_P = \frac{\pi^2 E I}{L^2}$	L
empotrada-empotrada		$F_P = \frac{4 \pi^2 E I}{L^2}$	$\frac{L}{2}$
empotrada-articulada		$F_P = \frac{2,04 \pi^2 E I}{L^2}$	$0,7 L$
empotrada-libre		$F_P = \frac{\pi^2 E I}{4 L^2}$	$2 L$
empotrada-empotrada monodeslizante		$F_P = \frac{\pi^2 E I}{L^2}$	L
articulada-empotrada monodeslizante		$F_P = \frac{\pi^2 E I}{4 L^2}$	$2 L$

6.7 Plano crítico de pandeo

Es el plano en el cual es más probable que se produzca el pandeo teniendo en cuenta no sólo el tipo de apoyo en las distintas direcciones sino también el momento de inercia en los ejes correspondientes a cada una de estas direcciones. En muchos casos el plano crítico de pandeo no es fácil de identificar y por ello se deberán realizar cálculos previos considerando los dos aspectos que se acaban de mencionar. El plano para el que se obtenga el mayor coeficiente de esbeltez λ_P será el crítico.

6.8 Restricciones de la fórmula de Euler

Para la deducción de la fuerza crítica de pandeo se ha empleado la fórmula de la línea elástica del elemento deformado; luego, el resultado obtenido sólo podrá ser empleado en el rango elástico del material.

Por consiguiente los puntos de la curva de Euler por encima del esfuerzo de fluencia σ_F no tienen validez matemática ni práctica. La zona de validez de la expresión de Euler estará entonces determinada para valores de λ mayores que λ_{FE} (ver Fig. 6.9), donde

$$\lambda_{FE} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_F}}$$

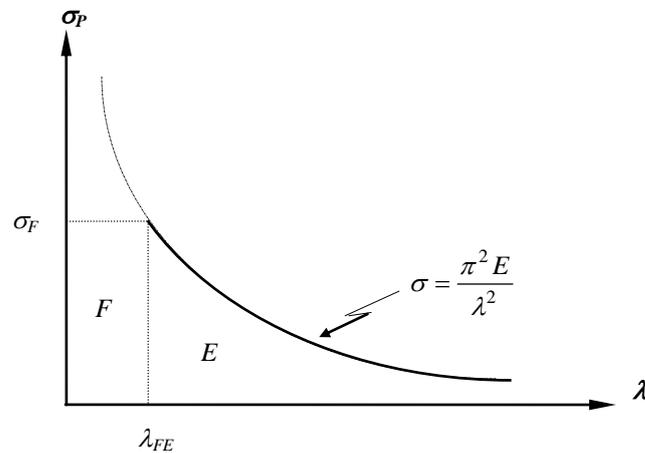


Fig. 6.9 Zonas de pandeo según Euler (*F*: Fluencia, *E*: Euler).

6.9 Validez práctica de la fórmula de Euler

En la figura 6.10 se pueden observar la curva de Euler y puntos que representan resultados experimentales. Para valores $\lambda > \lambda_{FE}$ se nota que hay buena aproximación entre ellos, sin embargo, para valores cercanos a λ_{FE} la diferencia entre los mencionados valores es evidente. Diversos investigadores (Tetmajer, Johnson, etc.) han propuesto aproximaciones para dicha zona mediante diversas funciones que dan lugar a los diversos métodos para el cálculo por pandeo.

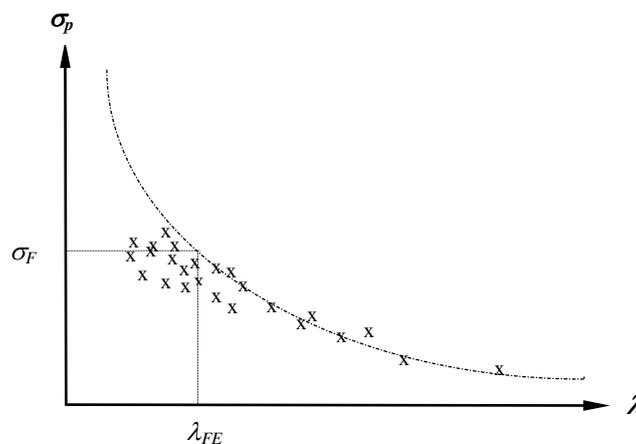


Fig. 6.10 Comparación de la curva de Euler con valores obtenidos experimentalmente (representados por x).

6.10 Métodos de cálculo

En las siguientes páginas se mostrarán algunos métodos de cálculo por pandeo para elementos esbeltos sometidos a compresión:

- a) Método de Tetmajer
- b) Método europeo (Tetmajer modificado)
- c) Método de Johnson
- d) Fórmula de la secante
- e) Método omega (ω)

Estos métodos se aplican según se trate de elementos de máquinas o de elementos estructurales:

- En el caso de elementos de máquinas se puede usar el método de Tetmajer, el europeo o el de Johnson. En cuanto a los factores de seguridad a utilizar hay que señalar que se toman de acuerdo a recomendaciones como por ejemplo las que se dan en la tabla 6.2. Es evidente que estos factores de seguridad son mayores que los hasta ahora utilizados en los cálculos por resistencia. Además, estos factores de seguridad deben ser utilizados de tal manera que deberán ser mayores cuanto mayor sea el grado de esbeltez λ , puesto que con λ aumenta el peligro al pandeo.

Tabla 6.2 Factores de seguridad al pandeo recomendados para elementos de máquinas.

FS	Elementos de máquinas	según
5...8		Tochtermann
5...10	para máquinas pequeñas	Rögnitz
10...20	para máquinas grandes	Rögnitz
8...10		Rotscher
3,5...5	teniendo en cuenta el efecto de cargas adicionales	ten Bosch

- En el caso de elementos estructurales se han normalizado diversos métodos para su cálculo por pandeo. Por ejemplo el método de Johnson está normalizado por la AISC (American Institute of Steel Construction) mientras que el método omega está normalizado por la DIN (Deutsches Institut für Normung). Los factores de seguridad están fijados por las mencionadas normas y son funciones del factor de esbeltez λ del elemento. Estos métodos se aplicarán también para el caso específico de columnas compuestas, aunque en nuestro caso estudiaremos sólo la norma DIN 4114.

6.10.1 Método de Tetmajer (1886)

Este método aproxima con una línea recta (Fig. 6.11) los puntos no contenidos en Euler mediante la siguiente expresión:

$$\sigma_p = C_1 - C_2 \lambda . \tag{6.27}$$

Las constantes C_1 y C_2 son propias de cada material y en la Tabla 6.3 se muestran valores de ellas para algunos materiales de frecuente uso en ingeniería.

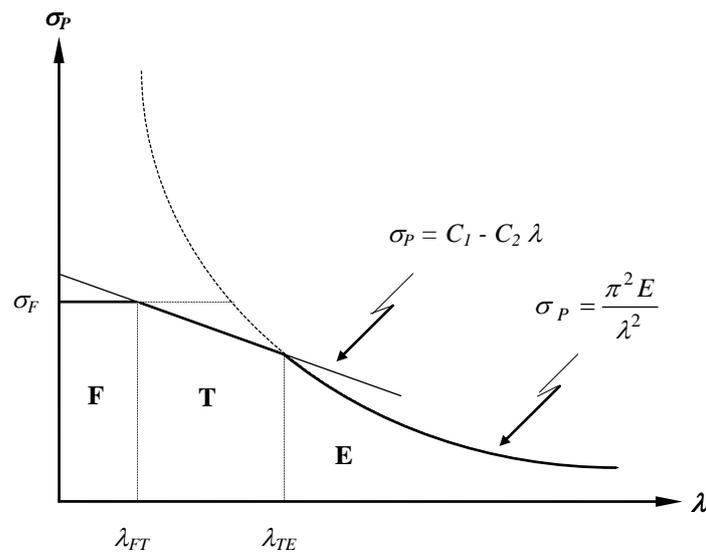


Fig. 6.11 Zonas de pandeo según Tetmajer (F: zona de fluencia, T: zona de Tetmajer y E: zona de Euler).

Tabla 6.3 Constantes para la expresión de Tetmajer.

Material	C_1 (N/mm ²)	C_2 (N/mm ²)
Acero St 37	310	1,14
Acero St 60	335	0,62
Acero al Niquel	470	2,30
Madera de Pino Resinoso	23,9	0,194

Para el Hierro Fundido Gris: $\sigma_p = 776 - 12 \lambda + 0,053 \lambda^2$

El método de cálculo, empleando la Fórmula de Tetmajer consiste en definir primero los rangos de validez (λ) para cada una de las curvas de falla.

En la figura 6.12 se pueden ver los tres rangos que se pueden presentar:

- F:** zona de falla por fluencia $0 \leq \lambda \leq \lambda_{FT}$
- T:** zona de falla por pandeo según Tetmajer $\lambda_{FT} \leq \lambda \leq \lambda_{TE}$
- E:** zona de falla por pandeo según Euler $\lambda \geq \lambda_{TE}$

La curva σ_{Lim} representa la resistencia límite del material, es decir, su resistencia al pandeo. Si los valores de esta curva son afectados por el factor de seguridad FS correspondiente (en general FS es función de λ), entonces se obtiene la curva de esfuerzo admisible (σ_{Adm}).

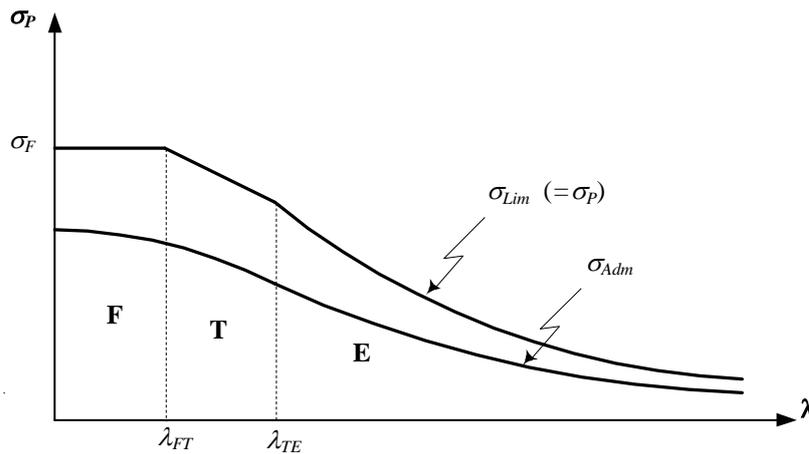


Fig. 6.12 Curvas de esfuerzo límite al pandeo σ_{Lim} y de esfuerzo admisible σ_{Adm} en función del grado de esbeltez del elemento.

Dichas curvas pueden expresarse analíticamente de la siguiente manera:

$$\sigma_{Lim} = \begin{cases} \sigma_F & \text{si } \lambda \leq \lambda_{FT} \\ C_1 - C_2\lambda & \text{si } \lambda_{FT} \leq \lambda \leq \lambda_{TE} \\ \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} & \text{si } \lambda \geq \lambda_{TE} \end{cases} \quad (6.28)$$

$$\sigma_{Adm} = \begin{cases} \frac{\sigma_F}{FS} & \text{si } \lambda \leq \lambda_{FT} \\ \frac{C_1 - C_2\lambda}{FS} & \text{si } \lambda_{FT} \leq \lambda \leq \lambda_{TE} \\ \frac{\pi^2 E}{FS\lambda^2} & \text{si } \lambda \geq \lambda_{TE} \end{cases} \quad (6.29)$$

El esfuerzo de trabajo σ debe ser tal que:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \sigma_{Adm} = \frac{\sigma_{Lim}}{FS} \quad (6.30)$$

Relación fundamental para el diseño por pandeo.

6.10.2 Método europeo (Tetmajer modificado)

Este método está basado en la recta de Tetmajer; pero en forma simplificada y generalizada. Como se vió, el uso de la Fórmula de Tetmajer está supeditado a conocer los valores de C_1 y C_2 que definen la recta. Conociendo estos valores se pueden hallar los rangos de validez de cada tipo de falla (fluencia, pandeo según Tetmajer, pandeo según Euler), rangos que difieren de un material a otro.

El método europeo establece unos valores fijos de λ para cualquier material y que limitan estos rangos de la siguiente manera:

- F:** Falla por fluencia $0 \leq \lambda \leq 60$
- R:** Falla por pandeo según una “recta” $60 \leq \lambda \leq 100$
- E:** Falla por pandeo según Euler $\lambda \geq 100$

En la figura 6.13 se muestran dichos rangos y las curvas de falla por pandeo. La recta inclinada queda definida por los puntos A y B para $\lambda = 60$ y $\lambda = 100$ respectivamente.

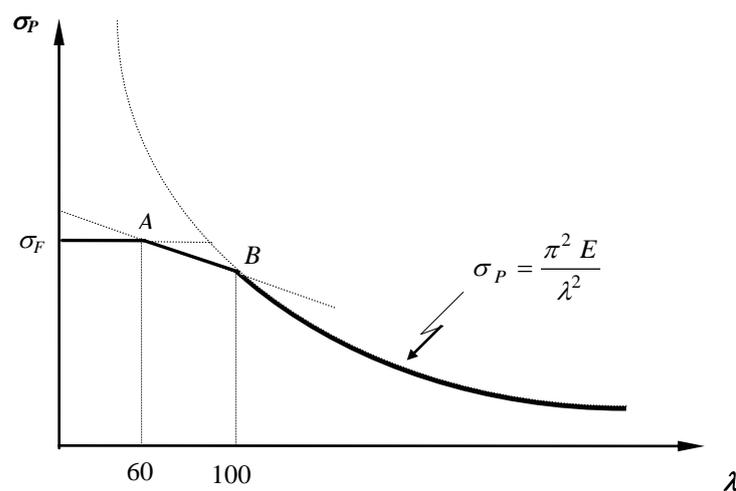


Fig. 6.13 Zonas de pandeo según el método europeo.

Dichas curvas pueden expresarse analíticamente de la siguiente manera:

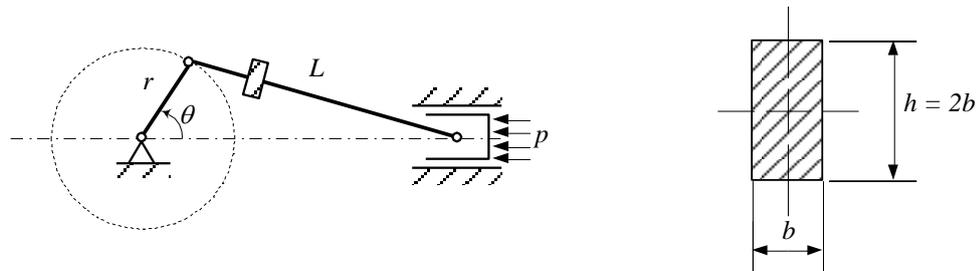
$$\sigma_{Lim} = \begin{cases} \sigma_F & \text{si } \lambda \leq 60 \\ a_1 - a_2 \lambda & \text{si } 60 \leq \lambda \leq 100 \\ \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} & \text{si } \lambda \geq 100 \end{cases} \quad (6.31)$$

$$\sigma_{Adm} = \begin{cases} \frac{\sigma_F}{FS} & \text{si } \lambda \leq 60 \\ \frac{a_1 - a_2 \lambda}{FS} & \text{si } 60 \leq \lambda \leq 100 \\ \frac{\pi^2 E}{\lambda^2 (FS)} & \text{si } \lambda \geq 100 \end{cases} \quad (6.32)$$

El esfuerzo de trabajo σ debe ser tal que: $\sigma = \frac{F}{A} \leq \sigma_{Adm} = \frac{\sigma_{Lim}}{FS}$ (6.33)

Ejemplo 6.1

En la figura se muestra el esquema de un mecanismo biela-manivela utilizado para mover el pistón de una bomba alternativa. Se sabe que la fuerza de compresión en la biela toma su valor máximo cuando el ángulo de la manivela es $\theta = 15^\circ$ y en esa posición la presión al interior del cilindro es $p_{max} = 0,78 \text{ N/mm}^2$. Sabiendo que el material de la biela es un acero St 60, para el cual $\sigma_F = 380 \text{ N/mm}^2$, se pide dimensionar la sección necesaria de ella.



Se sabe además que: Diámetro interior del cilindro: $D_c = 100 \text{ mm}$
 Longitud de la biela: $L = 350 \text{ mm}$
 Radio de la manivela: $r = 75 \text{ mm}$

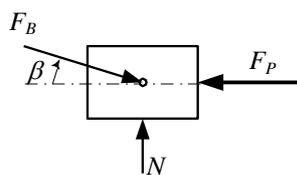
$$FS = \begin{cases} 2 + 0,172 \lambda - 9,2 \cdot 10^{-4} \lambda^2 & \text{si } 0 \leq \lambda \leq 100 \\ 10 & \text{si } \lambda > 100 \end{cases}$$

Solución:



Equilibrio en el pistón:

$$F_P - F_B \cos \beta = m_P a_P$$



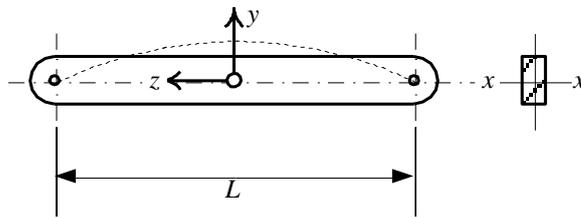
Despreciando la fuerza de inercia (m_P muy pequeña):

$$F_P = F_B \cos \beta \quad \text{con} \quad F_P = p A_p = 0,78 \frac{\pi}{4} (100)^2 = 6\,126,10 \text{ N}$$

$$\rightarrow F_B = \frac{F_P}{\cos \beta} = 6135,5 \text{ N}$$

Ubicación del plano crítico de pandeo:

- Plano y-z (alrededor de x-x)

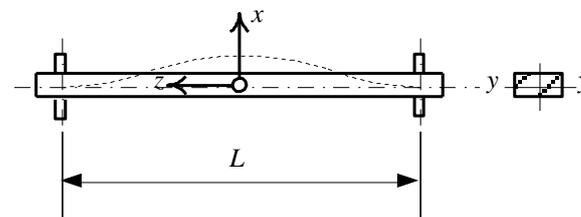


$$L_p = L$$

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3/12}{bh}} = \frac{h}{2\sqrt{3}} = \frac{b}{\sqrt{3}}$$

$$\rightarrow \lambda_x = \frac{L_p}{i_x} = \frac{\sqrt{3} L}{b}$$

- Plano x-z (alrededor de y-y)



$$L_p = 0,5 L$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{hb^3/12}{bh}} = \frac{b}{2\sqrt{3}}$$

$$\rightarrow \lambda_y = \frac{L_p}{i_y} = \frac{0,5L}{b/2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}L}{b}$$

∴ ambos planos son igualmente críticos pues $\lambda_x = \lambda_y$. → Tomamos: $\lambda = \sqrt{3} \frac{L}{b}$.

Cálculos previos al dimensionamiento:

$$\lambda = \sqrt{3} \frac{L}{b} = \frac{\sqrt{3} (350)}{b} = \frac{606,22}{b} \rightarrow b = \frac{606,22}{\lambda}$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{6135,50}{b(2b)} = \frac{3067,75}{b^2} \rightarrow \sigma = \frac{3067,75}{\left(\frac{606,22}{\lambda}\right)^2} \rightarrow \sigma = 8,348 \cdot 10^{-3} \lambda^2$$

Dimensionamiento mediante el método europeo:

A partir de aquí se puede proceder de dos maneras diferentes: puesto que no sabemos en cual de las zonas se producirá el pandeo (desconocemos b y por consiguiente no podemos evaluar el radio de giro de la sección y por ende tampoco el grado de esbeltez λ), entonces debemos iterar para encontrar el resultado adecuado.

1er. Método:

- Suponemos falla en zona de fluencia ($\lambda \leq 60$)

Entonces deberá cumplirse que: $\sigma = 8,348 \cdot 10^{-3} \lambda^2 \leq \frac{\sigma_P}{FS} = \frac{380}{2 + 0,172 \lambda - 9,2 \cdot 10^{-4} \lambda^2}$

de donde, en la igualdad se daría que $\lambda = 69,12$. Como este valor no cumple el requisito supuesto de $\lambda \leq 60$, entonces no nos sirve.

- Suponemos falla en zona de recta modificada de Tetmajer ($60 \leq \lambda \leq 100$)

Entonces deberá cumplirse que:
$$\sigma = 8,348 \cdot 10^{-3} \lambda^2 \leq \frac{\sigma_P}{FS} = \frac{639,11 - 4,32 \lambda}{2 + 0,172 \lambda - 9,2 \cdot 10^{-4} \lambda^2}$$

De donde, en la igualdad obtenemos $\lambda = 66,89$ (ok!, pues está en el rango supuesto).

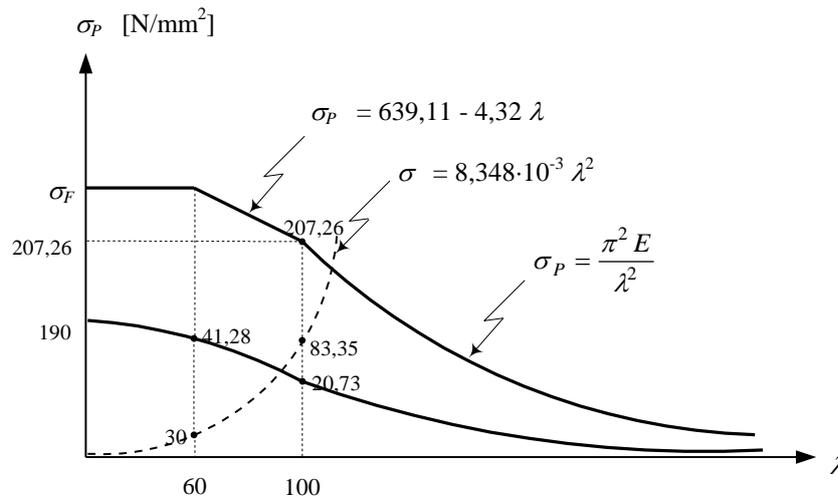
En consecuencia: $b = \frac{606,22}{\lambda} = 9,06 \text{ mm} \rightarrow \boxed{b = 9 \text{ mm}}$

Es pertinente mencionar que si en esta segunda iteración hubiéramos obtenido un valor que tampoco se ajustaba al rango supuesto, entonces tendríamos que haber ido a la zona de falla según Euler ($\lambda \geq 100$), para la cual debiera cumplirse que:

$$\sigma = \frac{F}{A} = 8,348 \cdot 10^{-3} \lambda^2 \leq \frac{\sigma_P}{FS} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2 (FS)} = \frac{\pi^2 (2,1 \cdot 10^5)}{\lambda^2 (10)}$$

2do. Método:

Una manera de averiguar la zona en que se producirá la falla es realizando el siguiente esquema:



de donde se puede ver que la intersección de la curva de σ_{Adm} y $\sigma = F/A$ se produce en la zona de la recta modificada de Tetmajer. Puesto que en esa zona se producirá la falla, entonces se deberá cumplir que:

$$\sigma = 8,348 \cdot 10^{-3} \lambda^2 \leq \frac{\sigma_P}{FS} = \frac{639,11 - 4,32 \lambda}{2 + 0,172 \lambda - 9,2 \cdot 10^{-4} \lambda^2}$$

de donde, en la igualdad: $\lambda = 66,89 \rightarrow b = 9,06 \text{ mm} \rightarrow \boxed{b = 9 \text{ mm}}$

6.10.3 Método de Johnson (1892):

Esta fórmula establece una parábola para la zona no válida para Euler (Fig. 6.14).

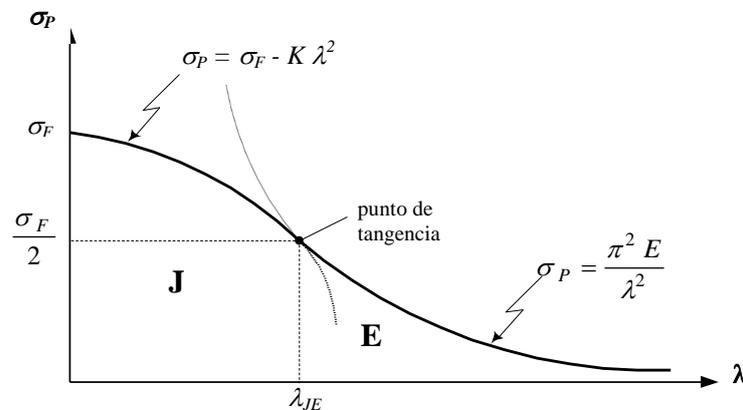


Fig. 6.14 Zonas de pandeo según Johnson (**J**: zona de Johnson, **E**: zona de Euler)

Dicha parábola con eje σ_P tiene vértice en $(0, \sigma_F)$ y es tangente a la curva de Euler. La forma matemática de esta parábola es:

$$\sigma_P = \sigma_F - K\lambda^2 \tag{6.34}$$

A continuación se determinarán el valor de K y el valor de λ para el punto común a las dos curvas, es decir, se definirán los rangos de validez de las curvas de Johnson y Euler.

- J:** Falla por Pandeo según Johnson $0 < \lambda < \lambda_{JE}$
- E:** Falla por pandeo según Euler $\lambda > \lambda_{JE}$

Los valores de K y λ_{JE} se determinan igualando los valores de σ_P en el punto de intersección (tangencia) de ambas curvas y de las pendientes en dicho punto.

igualando ordenadas:

$$\sigma_{P,J} \Big|_{\lambda=\lambda_{JE}} = \sigma_{P,E} \Big|_{\lambda=\lambda_{JE}} \tag{6.35}$$

$$\sigma_F - K\lambda_{JE}^2 = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{JE}^2}$$

$$\Rightarrow K\lambda_{JE}^4 - \sigma_F\lambda_{JE}^2 = -\pi^2 E \tag{6.36}$$

Igualando pendientes :

$$\frac{d}{d\lambda}\sigma_{P,J} \Big|_{\lambda=\lambda_{JE}} = \frac{d}{d\lambda}\sigma_{P,E} \Big|_{\lambda=\lambda_{JE}} \tag{6.37}$$

$$-2K\lambda_{JE} = \frac{-2\pi^2 E}{\lambda_{JE}^3}$$

$$\Rightarrow K\lambda_{JE}^4 = \pi^2 E \tag{6.38}$$

de (6.36) y (6.38):

$$\lambda_{JE} = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_F}} \tag{6.39}$$

y

$$K = \frac{\sigma_F^2}{4\pi^2 E} \tag{6.40}$$

Análogamente a lo descrito en el método anterior, aquí se puede hablar también de esfuerzo límite y de esfuerzo admisible (Fig. 6.15). La curva σ_{Lim} representa la curva de esfuerzo límite al pandeo mientras que la curva σ_{Adm} representa el esfuerzo admisible.

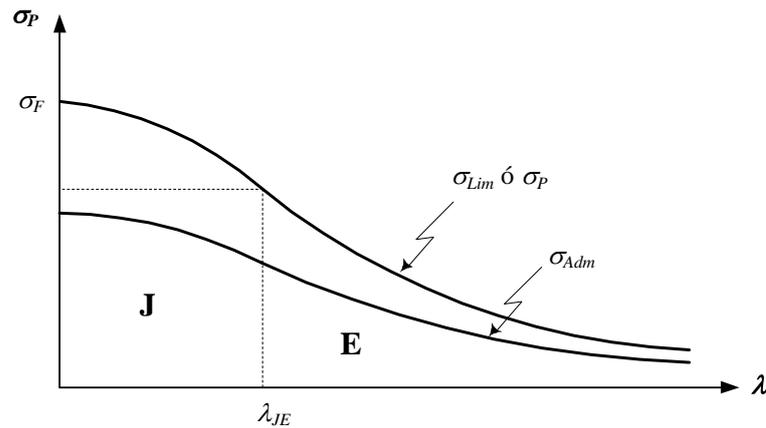


Fig. 6.15 Curvas de esfuerzo límite al pandeo σ_{Lim} y de esfuerzo admisible σ_{Adm} en función del grado de esbeltez del elemento según Johnson.

Dichas curvas pueden expresarse analíticamente de la siguiente manera:

$$\sigma_{Lim} = \begin{cases} \sigma_F - K \lambda^2 & \text{si } \lambda < \lambda_{JE} \\ \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} & \text{si } \lambda \geq \lambda_{JE} \end{cases} \tag{6.41}$$

$$\sigma_{Adm} = \begin{cases} \frac{\sigma_F - K \lambda^2}{FS} & \text{si } \lambda < \lambda_{JE} \\ \frac{\pi^2 E}{FS \lambda^2} & \text{si } \lambda \geq \lambda_{JE} \end{cases} \tag{6.42}$$

El esfuerzo de trabajo σ deberá ser tal que:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \sigma_{Adm} = \frac{\sigma_{Lim}}{FS} \tag{6.43}$$

Ejemplo 6.2 Aquí resolveremos el anterior problema (ejemplo 6.1) según el método de Johnson. La diferencia entre ambos procedimientos se da sólo en la parte del dimensionamiento, de tal manera que utilizaremos los resultados ya obtenidos en la parte inicial del mencionado ejemplo (ubicación del plano crítico de pandeo y cálculos previos al dimensionamiento).

Dimensionamiento mediante el método de Johnson: En general, se debe cumplir que:

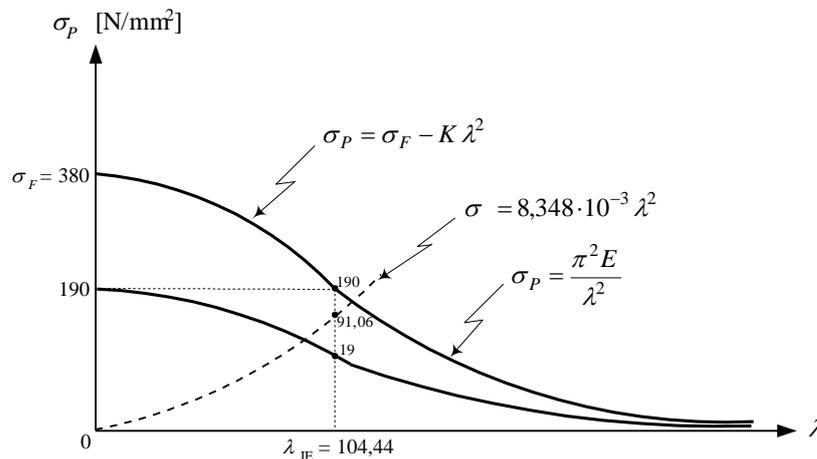
$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \sigma_{Adm} = \frac{\sigma_{Lim}}{FS} \quad \text{donde} \quad \sigma_{Adm} = \begin{cases} \frac{\sigma_F - K\lambda^2}{FS} & \text{si } \lambda < \lambda_{JE} \\ \frac{\pi^2 E}{(FS) \lambda^2} & \text{si } \lambda \geq \lambda_{JE} \end{cases}$$

Aquí:
$$K = \frac{\sigma_F^2}{4\pi^2 E} = \frac{(380)^2}{4\pi^2 (2,1 \cdot 10^5)} = 1,742 \cdot 10^{-2} \text{ N/mm}^2$$

$$\lambda_{JE} = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_F}} = \sqrt{\frac{2\pi^2 (2,1 \cdot 10^5)}{380}} = 104,44$$

además:
$$\sigma = 8,348 \cdot 10^{-3} \lambda^2 \quad \text{y} \quad FS = \begin{cases} 2 + 0,172 \lambda - 9,2 \cdot 10^{-4} \lambda^2 & \text{si } 0 \leq \lambda \leq 100 \\ 10 & \text{si } \lambda > 100 \end{cases}$$

A continuación utilizaremos la segunda técnica para realizar el dimensionamiento mostrada en el anterior problema. Graficamos las curvas de esfuerzo admisible y esfuerzo de trabajo ($\sigma = F/A$):



La intersección se producirá en la zona de Johnson, en consecuencia podemos escribir directamente que se debe cumplir que:

$$\sigma = 8,348 \cdot 10^{-3} \lambda^2 \leq \frac{\sigma_p}{FS} = \frac{6380 - 1,742 \cdot 10^{-2} \lambda^2}{2 + 0,172 \lambda - 9,2 \cdot 10^{-4} \lambda^2}$$

de donde, en la igualdad: $\lambda = 63,48 \rightarrow b = 9,55 \text{ mm} \rightarrow \boxed{b = 10 \text{ mm}}$

La organización norteamericana AISC (American Institute of Steel Construction), que establece normas para el diseño con acero estructural, especifica los factores de seguridad de la siguiente manera:

$$FS = \begin{cases} \frac{5}{3} + \frac{3}{8} \frac{\lambda}{\lambda_{JE}} - \frac{\lambda^3}{8 \lambda_{JE}^3} & \text{para } \lambda < \lambda_{JE} \\ 1,92 & \text{para } \lambda \geq \lambda_{JE} \end{cases} \quad (6.44)$$

6.10.4 Fórmula de la secante

Es una solución particular para el caso de columna con carga excéntrica. El análisis de un tal elemento (columna) presupone conocer el valor de la excentricidad de la carga y se hace de la siguiente manera.

Siendo e la excentricidad de la carga F con respecto al eje de la columna (Fig. 6.16 a) se puede reemplazar dicha carga excéntrica F por una carga centrada F y por un par M_A de momento $M = F e$ (Fig. 6.16 b), el cual causa flexión de la columna. Si aumenta F entonces aumenta el par M_A y ambos causan flexión adicional sobre la columna. Luego, el problema de pandeo consiste en determinar cuánta flexión puede permitirse bajo la acción de la carga F si es que no debe excederse de un esfuerzo σ_{max} y si la deflexión y_{max} no debe ser excesiva.

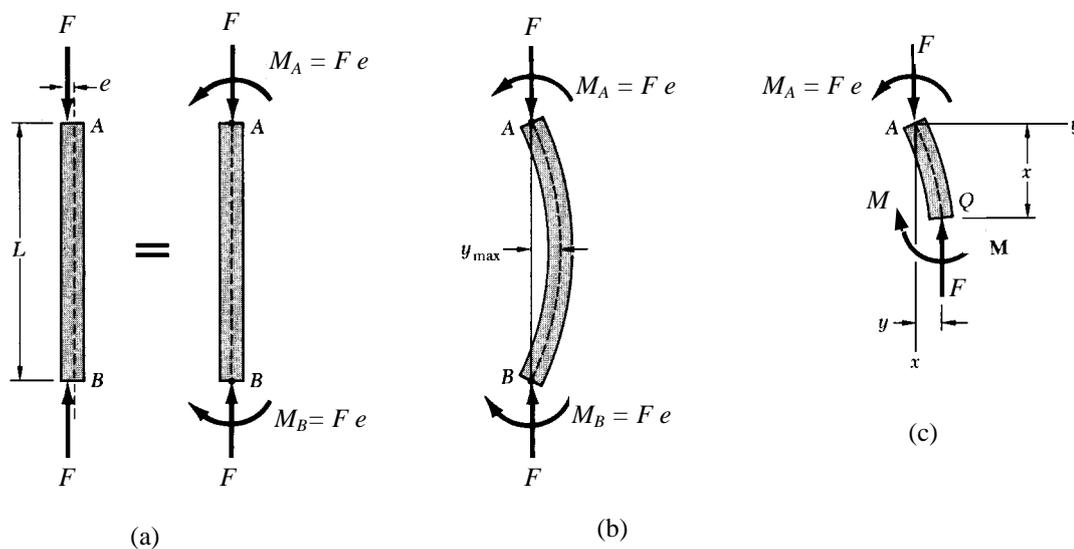


Fig. 6.16 Elemento esbelto doblemente articulado sometido a una carga de compresión excéntrica F . La excentricidad viene dada por la distancia e .

En una sección cualquiera de la columna (Fig. 6.16 c) se tendrá:

$$\begin{aligned} M &= M_A + F y \\ M &= F e + F y \end{aligned} \quad (6.45)$$

Ahora se puede escribir para la ecuación diferencial de la curva de deflexión:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = -\frac{F e}{EI} - \frac{F y}{EI}$$

$$y'' + \frac{F}{EI} y = -\frac{F e}{EI}$$

Si hacemos $a^2 = \frac{F}{EI} \Rightarrow y'' + a^2 y = -a^2 e$ (6.46)

La solución de esta ecuación (6.46) está dada por: $y = y_h + y_p$

donde la solución homogénea es: $y_h = c_1 \cos ax + c_2 \operatorname{sen} ax$

y una solución particular es: $y_p = -e$

Por tanto, la solución general es: $y = c_1 \cos ax + c_2 \operatorname{sen} ax - e$. (6.47)

Ahora podemos aplicar las condiciones de borde para determinar c_1 y c_2 :

- Si $x = 0, y = 0 \Rightarrow c_1 = e$
- Si $x = L, y = 0 \Rightarrow 0 = e \cos aL + c_2 \operatorname{sen} aL - e$
 $e(1 + \cos aL) = c_2 \operatorname{sen} aL$
 $e(2 \operatorname{sen}^2 \frac{aL}{2}) = c_2 2 \operatorname{sen} \frac{aL}{2} \cos \frac{aL}{2}$
 $\Rightarrow c_2 = e \tan \frac{aL}{2}$

La ecuación de la curva elástica será: $y = e (\cos ax + \tan \frac{aL}{2} \operatorname{sen} ax - 1)$ (6.48)

Máxima deflexión en $x = \frac{L}{2}$: $y_{max} = e (\cos \frac{aL}{2} + \tan \frac{aL}{2} \operatorname{sen} \frac{aL}{2} - 1)$

$$y_{max} = e \left(\frac{\cos^2 \frac{aL}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{aL}{2}}{\cos \frac{aL}{2}} - 1 \right)$$

$$y_{max} = e (\sec \frac{aL}{2} - 1)$$

es decir: $y_{max} = e (\sec \sqrt{\frac{F}{EI}} \frac{L}{2} - 1)$ (6.49)

El esfuerzo máximo se presenta en la sección en que el momento M es máximo, es decir cuando $x = L/2$:

$$M_{max} = F y_{max} + M_A$$

$$M_{max} = F y_{max} + F e$$

$$M_{max} = F (y_{max} + e)$$

El esfuerzo máximo de compresión será entonces:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \frac{M_{max} c}{I}$$

es decir:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \frac{F(y_{max} + e) c}{i^2 A}$$

Reemplazando el valor de y_{max} y ordenando:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} \left[1 + \frac{ec}{i^2} \sec \left(\sqrt{\frac{F}{EI}} \frac{L}{2} \right) \right] \tag{6.50}$$

En esta expresión se puede notar que σ_{max} no varía linealmente con la carga F y por consiguiente no se puede aplicar el principio de superposición para la determinación del esfuerzo en el caso de aplicación simultánea de varias cargas.

En dicho caso lo que debe hacerse es determinar primero la resultante de las cargas y luego aplicar la ecuación (6.50). Del mismo modo, cualquier factor de seguridad FS debe aplicarse a la carga F y no al esfuerzo σ_{max} .

Recordando que $I = A i^2$ se obtiene:

$$\frac{F}{A} = \frac{\sigma_{max}}{1 + \frac{ec}{i^2} \sec \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{F}{EA}} \frac{L}{i} \right)}$$

El análisis se ha realizado considerando extremos articulados, pero el resultado puede hacerse extensivo a otros casos reemplazando L por la longitud efectiva de pandeo L_P . Reemplazando $\lambda = L_P / i$ en la anterior expresión se obtiene:

$$\boxed{\frac{F}{A} = \frac{\sigma_{max}}{1 + \frac{ec}{i^2} \sec \left(\frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{F}{EA}} \right)}} \tag{6.51}$$

Esta expresión es la denominada fórmula de la secante y define la fuerza por unidad de área F/A que causa un esfuerzo máximo especificado σ_{max} . Si el material del elemento esbelto es dúctil $\sigma_{max} = \sigma_F$ y si el material es frágil $\sigma_{max} = \sigma_R$. Hay que recordar que en los materiales frágiles el esfuerzo de rotura a tracción σ_{Rt} es bastante menor que el correspondiente esfuerzo a compresión σ_{Rc} y por consiguiente hay que chequear el lado de la columna a tracción considerando además que las componentes de flexión y esfuerzo directo son de signo contrario.

Suponiendo material dúctil y afectando a la carga F con un factor de seguridad FS se tiene:

$$\boxed{\frac{(FS) F_{adm}}{A} = \frac{\sigma_F}{1 + \frac{ec}{i^2} \sec \left(\frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{(FS) F_{adm}}{EA}} \right)}} \tag{6.52}$$

Esta ecuación puede ser resuelta por tanteos o gráficamente (utilizando gráficas de la ecuación (6.52) para distintos valores del coeficiente de excentricidad ec/i^2 y para un cierto material). Dichos gráficos son de la forma que muestra la Fig. 6.17.

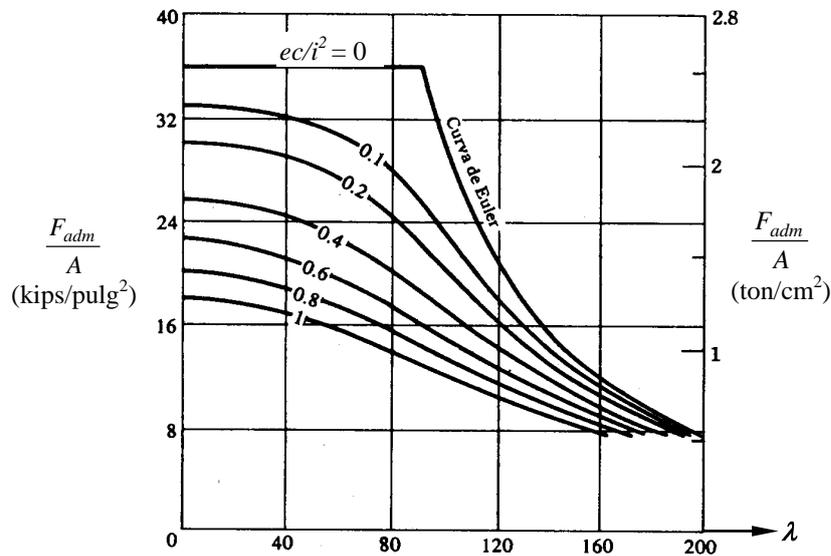
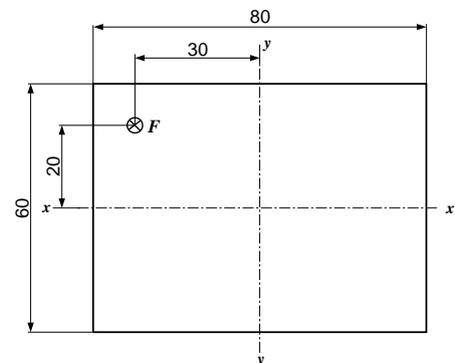


Fig. 6.17 Gráficas de la fórmula de la secante para distintos valores del coeficiente de excentricidad ec/i^2 para un acero con $\sigma_F = 2520 \text{ kgf/cm}^2$ y módulo de elasticidad $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$. (1 kip = 1000 lbf)

Ejemplo 6.3

En la figura se muestra la sección de una columna cargada excéntricamente mediante una fuerza de compresión F . La columna es de acero estructural St 37 ($\sigma_F = 240 \text{ N/mm}^2$ y $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$), tiene una longitud de 2 metros y está articulada en ambos extremos. Se pide calcular la máxima fuerza F que se puede aplicar a la columna para tener un factor de seguridad de 2,5.



Solución:

- Análisis del pandeo alrededor de x-x:

Momento de inercia:
$$I_x = \frac{1}{12} (80) (60)^3 = 1\,440\,000 \text{ mm}^4$$

radio de giro:
$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = 17,32 \text{ mm}$$

excentricidad de la carga:
$$e = 20 \text{ mm}$$

distancia a plano neutro (flexión):
$$c = 30 \text{ mm}$$

área transversal del elemento:
$$A = 4800 \text{ mm}^2$$

grado de esbeltez:
$$\lambda_x = \frac{L_p}{i_x} = \frac{2000}{17,32} = 115,47$$

Se debe cumplir:
$$\frac{(FS) F_{Adm}}{A} = \frac{\sigma_F}{1 + \frac{ec}{i^2} \sec\left(\frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{(FS) F_{Adm}}{EA}}\right)}$$

es decir:
$$\frac{(2,5) F_{Adm}}{4800} = \frac{240}{1 + \frac{(20)(30)}{(17,32)^2} \sec\left(\frac{115,47}{2} \sqrt{\frac{2,5 F_{Adm}}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 4800}}\right)}$$

de donde
$$\frac{2,5 F_{Adm}}{4800} = \frac{240}{1 + 2 \sec(0,002875 \sqrt{F_{Adm}})}$$

Resolviendo:
$$F_{Adm} = 105\,560,29 \text{ N} \tag{i}$$

- Análisis del pandeo alrededor de y-y:

Momento de inercia:
$$I_y = \frac{1}{12} (60) (80)^3 = 2\,560\,000 \text{ mm}^4$$

radio de giro:
$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 23,094 \text{ mm}$$

excentricidad de la carga:
$$e = 30 \text{ mm}$$

distancia a plano neutro (flexión):
$$c = 40 \text{ mm}$$

área transversal del elemento:
$$A = 4800 \text{ mm}^2$$

grado de esbeltez:
$$\lambda_y = \frac{L_p}{i_y} = \frac{2000}{23,094} = 86,60$$

Se debe cumplir:
$$\frac{(FS) F_{Adm}}{A} = \frac{\sigma_F}{1 + \frac{ec}{i^2} \sec\left(\frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{(FS) F_{Adm}}{EA}}\right)}$$

es decir:
$$\frac{2,5 F_{Adm}}{4800} = \frac{240}{1 + \frac{(30)(40)}{(23,094)^2} \sec\left(\frac{86,6}{2} \sqrt{\frac{2,5 F_{Adm}}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 4800}}\right)}$$

de donde
$$\frac{2,5 F_{Adm}}{4800} = \frac{240}{1 + 2,25 \sec(0,002156 \sqrt{F_{Adm}})}$$

Resolviendo:
$$F_{Adm} = 115\,387,51 \text{ N} \tag{ii}$$

De los resultados parciales (i) y (ii) se ve que el pandeo ocurriría primero alrededor del eje x, por consiguiente:

Respuesta:
$$F_{Adm} = 105\,560,29 \text{ N}$$

6.10.5 Método omega

Este método se usa exclusivamente para elementos estructurales simples o compuestos y está basado en el método europeo. Según este método el factor de seguridad está dado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 FS &= 1,71 && \text{para } \lambda = 0, && \text{falla por fluencia} \\
 FS &= 2,5 && \text{para } \lambda \geq 100, && \text{falla por pandeo según Euler}
 \end{aligned}$$

Para el rango $0 < \lambda \leq 100$ el factor de seguridad FS varía según una curva (Fig. 6.18) y los valores correspondientes se dan indirectamente a través de los llamados factores omega (ω) que se verán más adelante. Con el valor de falla por pandeo o esfuerzo límite σ_{Lim} (curva correspondiente al método europeo) y el del Factor de Seguridad FS (ver Fig. 6.18) se puede definir el valor del esfuerzo admisible a la compresión σ_{Adm} :

$$\sigma_{Adm} = \frac{\sigma_{Lim}}{FS} \tag{6.53}$$

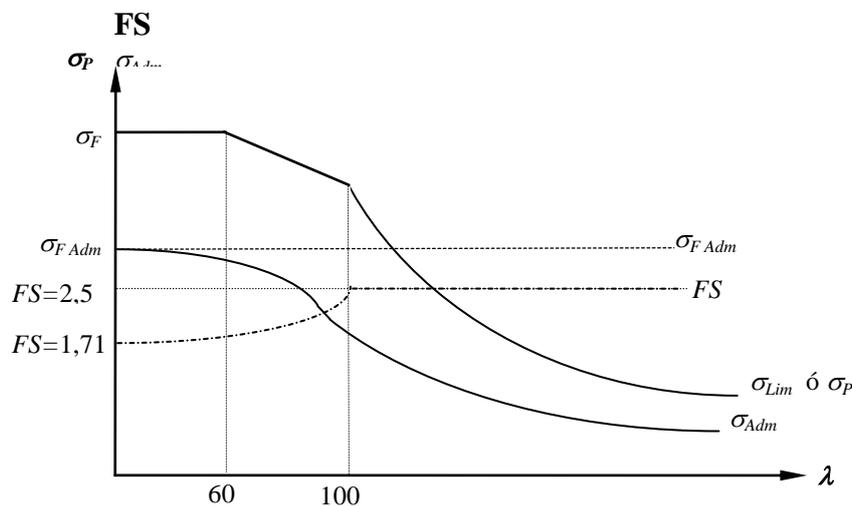


Fig. 6.18 Curvas de σ_{Lim} , FS , σ_{Adm} y $\sigma_{F Adm}$ para el método omega.

Conociendo los valores admisibles en función del grado de esbeltez se podría diseñar o calcular un elemento estructural sometido a carga de compresión, de tal manera que :

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \sigma_{Adm} \tag{6.54}$$

El método omega establece un coeficiente adimensional llamado “coeficiente ω ” definido

como :

$$\omega = \frac{\sigma_{F Adm}}{\sigma_{Adm}} \tag{6.55}$$

donde $\sigma_{F adm}$ se denomina esfuerzo admisible a la fluencia y no es otra cosa que el valor del esfuerzo de fluencia del material dividido entre el FS para $\lambda = 0$, es decir:

$$\sigma_{F Adm} = \frac{\sigma_F}{1,71} \tag{6.56}$$

(6.55) en (6.54):
$$\sigma \leq \sigma_{Adm} = \frac{\sigma_{F Adm}}{\omega}$$

de donde

$$\omega \sigma \leq \sigma_{F Adm} \tag{6.57}$$

Esta es la relación fundamental para el diseño de elementos estructurales empleando el método omega. Es decir que este método, mediante los coeficientes ω , establece un nivel de referencia constante $\sigma_{F Adm}$ para cada material e igual al valor del esfuerzo admisible a la fluencia para $\lambda = 0$. En la siguiente tabla se muestra $\sigma_{F Adm}$ para algunos aceros estructurales comúnmente empleados.

Tabla 6.4 $\sigma_{F adm}$ para algunos aceros estructurales

Acero	$\sigma_{F Adm}$ (kgf/mm ²)
St 37	14
St 52	21

En la práctica se presentan dos tipos de problemas: se tiene un elemento y se quiere verificar su resistencia al pandeo o se quiere diseñar (seleccionar) un perfil para que no pandee bajo determinadas condiciones de carga y geometría.

- Verificación de un elemento estructural: Como el elemento es dado, entonces se conocen el área de su sección transversal (A), momentos de inercia (I) y radios de giro (i) respecto a ejes de pandeo característicos y longitud (L). Entonces se pueden calcular las siguientes variables:

esfuerzo de trabajo: $\sigma = \frac{F}{A}$

grado de esbeltez: $\lambda = \frac{L}{i}$ $\xRightarrow{\text{tablas}}$ $\omega = \omega(\lambda)$.

En el caso de cálculo de elementos estructurales se considera que sus extremos están pivoteados o articulados ($L_p = L$) con la única excepción de que uno de los extremos esté libre. En este último caso habrá que tener en cuenta que la longitud efectiva de pandeo respectiva es $L_p = 2L$.

Con el valor de λ se encuentra en las tablas 6.5 a 6.8 el valor respectivo del coeficiente omega.

Para que el elemento sea aceptable, es decir, que no falle por pandeo, debe cumplirse la expresión (6.57):

$$\omega \sigma < \sigma_{F Adm}$$

- **Diseño o selección de un elemento estructural:** En este caso se conocen la fuerza de compresión F y la longitud del elemento L . Como no se conoce el perfil entonces no se conocen los parámetros geométricos de su sección. Por consiguiente no es posible el cálculo directo del perfil, pues para conocer ω se necesita conocer primero el grado de esbeltez del elemento, valor que no es posible de calcular si no se conoce el radio de giro.

El proceso de cálculo consistirá en asumir un perfil y verificar si cumple las condiciones de resistencia al pandeo. Este proceso de cálculo se repetirá hasta llegar a un perfil adecuado tanto por resistencia como por economía.

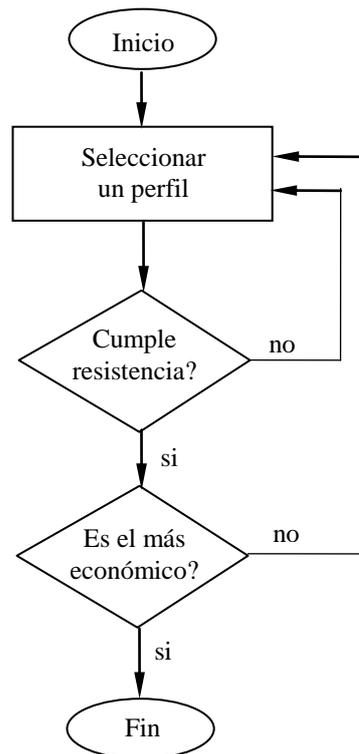


Fig. 6.19 Proceso de selección de un perfil sometido a pandeo.

Ejemplo 6.4

Seleccionar el perfil angular de alas iguales (según DIN 1028) más económico para una columna que soportará 7500 kgf y que tendrá una longitud de 1,3 m. El material es acero estructural St 37 ($\sigma_{F Adm} = 1400 \text{ kgf/cm}^2$).

Solución:

Una expresión empírica para calcular en forma aproximada el momento de inercia (en cm^4) necesario para evitar el pandeo de un elemento esbelto es:

$$I \cong 1,2 F L^2 \quad \text{donde } F \text{ es la carga en toneladas}$$

$$L \text{ es la longitud de pandeo en metros}$$

En nuestro caso: $I \cong 1,2 \cdot 7,5 \cdot 1,3 = 15,21 \text{ cm}^4$

De la tabla para perfiles angulares según DIN 1028 el perfil L 65 x 8 tiene $I_{\eta} = 15,6 \text{ cm}^4$, por lo que empezaremos el proceso de iteración con dicho perfil:

Perfil	A	i_{η} (cm)	λ	ω	$\omega \sigma$ (kgf/cm ²)	? $\leq \sigma_{F Adm}$
65 x 8	9,85	1,26	103	1,96	1497	no
65 x 9	11,0	1,25	104	1,98	1350	ok
¿Habr� otro perfil que sea más económico?						
70 x 6	8,13	1,37	95	1,80	1660	no
70 x 7	9,40	1,37	94,9	1,80	1436	no
75 x 6	8,75	1,47	88,44	1,69	1448,6	no
75 x 7	10,10	1,45	90	1,71	1270	ok!

Elegimos finalmente el perfil 75 x 7, pues no hay otro perfil de menor área transversal que cumpla con los requerimientos de esfuerzo.

Ejemplo 6.5

Seleccionar el perfil adecuado para una columna compuesta por dos perfiles angulares de alas iguales \llcorner (según DIN 1028) que soportará 7500 kgf con una longitud de 1,3 m. El material es acero St 37 ($\sigma_{F Adm} = 1400 \text{ kgf / cm}^2$).

Solución:

Tenemos los mismos datos del ejemplo anterior. El momento de inercia total requerido será aproximadamente: $I_x \cong 1,2 F L^2 = 15,21 \text{ cm}^4$

Por consiguiente el perfil individual deberá tener: $I_l = \frac{I_x}{2} = 7,61 \text{ cm}^4$

Con este valor de I_l elegimos el perfil 45 x 5 para iniciar la iteración:

Perfil	A_l (cm ²)	i_x (cm)	λ	ω	$\omega \sigma$ (kgf / cm ²)	? $\leq \sigma_{F Adm}$
45 x 5	4,30	1,35	96,29	1,84	1604	no
45 x 6	5,09	1,34	97,0	1,84	1356	ok
¿Habr� otro perfil más económico?						
50 x 4	3,89	1,52	85,53	1,64	1581	no
50 x 5	4,80	1,51	86,09	1,64	1281	ok!

Elegimos finalmente dos perfiles 50 x 5. Notar que dichos perfiles en conjunto tienen un área de sección 5% menor que el perfil solución del ejemplo anterior y por consiguiente pesan 5% menos que un solo perfil 75 x 7, por lo que esta segunda solución al mismo problema es la más económica.

Tabla 6.5 Coeficientes de pandeo ω para los aceros St 33 y St 37 según DIN 4114, hoja 1.

λ	$\lambda+$										λ
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
20	1,04	1,04	1,04	1,05	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08	20
30	1,08	1,09	1,09	1,10	1,10	1,11	1,11	1,12	1,13	1,13	30
40	1,14	1,14	1,15	1,16	1,16	1,17	1,18	1,19	1,19	1,20	40
50	1,21	1,22	1,23	1,23	1,24	1,25	1,26	1,27	1,28	1,29	50
60	1,30	1,31	1,32	1,33	1,34	1,35	1,36	1,37	1,39	1,40	60
70	1,41	1,42	1,44	1,45	1,46	1,48	1,49	1,50	1,52	1,53	70
80	1,55	1,56	1,58	1,59	1,61	1,62	1,64	1,66	1,68	1,69	80
90	1,71	1,73	1,74	1,76	1,78	1,80	1,82	1,84	1,86	1,88	90
100	1,90	1,92	1,94	1,96	1,98	2,00	2,02	2,05	2,07	2,09	100
110	2,11	2,14	2,16	2,18	2,21	2,23	2,27	2,31	2,35	2,39	110
120	2,43	2,47	2,51	2,55	2,60	2,64	2,68	2,72	2,77	2,81	120
130	2,85	2,90	2,94	2,99	3,03	3,08	3,12	3,17	3,22	3,26	130
140	3,31	3,36	3,41	3,45	3,50	3,55	3,60	3,65	3,70	3,75	140
150	3,80	3,85	3,90	3,95	4,00	4,06	4,11	4,16	4,22	4,27	150
160	4,32	4,38	4,43	4,49	4,54	4,60	4,65	4,71	4,77	4,82	160
170	4,88	4,94	5,00	5,05	5,11	5,17	5,23	5,29	5,35	5,41	170
180	5,47	5,53	5,59	5,66	5,72	5,78	5,84	5,91	5,97	6,03	180
190	6,10	6,16	6,23	6,29	6,36	6,42	6,49	6,55	6,62	6,69	190
200	6,75	6,82	6,89	6,96	7,03	7,10	7,17	7,24	7,31	7,38	200
210	7,45	7,52	7,59	7,66	7,73	7,81	7,88	7,95	8,03	8,10	210
220	8,17	8,25	8,32	8,40	8,47	8,55	8,63	8,70	8,78	8,86	220
230	8,93	9,01	9,09	9,17	9,25	9,33	9,41	9,49	9,57	9,65	230
240	9,73	9,81	9,89	9,97	10,05	10,14	10,22	10,30	10,39	10,47	240
250	10,55										250
Valores intermedios no necesitan ser interpolados											

Tabla 6.6 Coeficientes de pandeo ω para acero St 52 según DIN 4114, hoja 1.

λ	$\lambda+$										λ
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
20	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08	1,08	1,09	1,09	1,10	1,11	20
30	1,11	1,12	1,12	1,13	1,14	1,15	1,15	1,16	1,17	1,18	30
40	1,19	1,19	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24	1,25	1,26	1,27	40
50	1,28	1,30	1,31	1,32	1,33	1,35	1,36	1,37	1,39	1,40	50
60	1,41	1,43	1,44	1,46	1,48	1,49	1,51	1,53	1,54	1,56	60
70	1,58	1,60	1,62	1,64	1,66	1,68	1,70	1,72	1,74	1,77	70
80	1,79	1,81	1,83	1,86	1,88	1,91	1,93	1,95	1,98	2,01	80
90	2,05	2,10	2,14	2,19	2,24	2,29	2,33	2,38	2,43	2,48	90
100	2,53	2,58	2,64	2,69	2,74	2,79	2,85	2,90	2,95	3,01	100
110	3,06	3,12	3,18	3,23	3,29	3,35	3,41	3,47	3,53	3,59	110
120	3,65	3,71	3,77	3,83	3,89	3,96	4,02	4,09	4,15	4,22	120
130	4,28	4,35	4,41	4,48	4,55	4,62	4,69	4,75	4,82	4,89	130
140	4,96	5,04	5,11	5,18	5,25	5,33	5,40	5,47	5,55	5,62	140
150	5,70	5,78	5,85	5,93	6,01	6,09	6,16	6,24	6,32	6,40	150
160	6,48	6,57	6,65	6,73	6,81	6,90	6,98	7,06	7,15	7,23	160
170	7,32	7,41	7,49	7,58	7,67	7,76	7,85	7,94	8,03	8,12	170
180	8,21	8,30	8,39	8,48	8,58	8,67	8,76	8,86	8,95	9,05	180
190	9,14	9,24	9,34	9,44	9,53	9,63	9,73	9,83	9,93	10,03	190
200	10,13	10,23	10,34	10,44	10,54	10,65	10,75	10,85	10,96	11,06	200
210	11,17	11,28	11,38	11,49	11,60	11,71	11,82	11,93	12,04	12,15	210
220	12,26	12,37	12,48	12,60	12,71	12,82	12,94	13,05	13,17	13,28	220
230	13,40	13,52	13,63	13,75	13,87	13,99	14,11	14,23	14,35	14,47	230
240	14,59	14,71	14,83	14,96	15,08	15,20	15,33	15,45	15,58	15,71	240
250	15,83										250
Valores intermedios no necesitan ser interpolados.											

Tabla 6.7 Coeficientes de pandeo ω para el acero St 37 en forma de tubos de sección circular según DIN 4114, hoja 1.

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	λ
20	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	20
30	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,06	1,06	30
40	1,07	1,07	1,08	1,08	1,09	1,09	1,10	1,10	1,11	1,11	40
50	1,12	1,13	1,13	1,14	1,15	1,15	1,16	1,17	1,17	1,18	50
60	1,19	1,20	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24	1,25	1,26	1,27	60
70	1,28	1,29	1,30	1,31	1,32	1,33	1,34	1,35	1,36	1,37	70
80	1,39	1,40	1,41	1,42	1,44	1,46	1,47	1,48	1,50	1,51	80
90	1,53	1,54	1,56	1,58	1,59	1,61	1,63	1,64	1,66	1,68	90
100	1,70	1,73	1,76	1,79	1,83	1,87	1,90	1,94	1,97	2,01	100
110	2,05	2,08	2,12	2,16	2,20	2,23	2,27	2,31	2,35	2,39	110
120	2,43	2,47	2,51	2,55	2,60	2,64	2,68	2,72	2,77	2,81	120
130	2,85	2,90	2,94	2,99	3,03	3,08	3,12	3,17	3,22	3,26	130
140	3,31	3,36	3,41	3,45	3,50	3,55	3,60	3,65	3,70	3,75	140
150	3,80	3,85	3,90	3,95	4,00	4,06	4,11	4,16	4,22	4,27	150
160	4,32	4,38	4,43	4,49	4,54	4,60	4,65	4,71	4,77	4,82	160
170	4,88	4,94	5,00	5,05	5,11	5,17	5,23	5,29	5,35	5,41	170
180	5,47	5,53	5,59	5,66	5,72	5,78	5,84	5,91	5,97	6,03	180
190	6,10	6,16	6,23	6,29	6,36	6,42	6,49	6,55	6,62	6,69	190
200	6,75	6,82	6,89	6,96	7,03	7,10	7,17	7,24	7,31	7,38	200
210	7,45	7,52	7,59	7,66	7,73	7,81	7,88	7,95	8,03	8,10	210
220	8,17	8,25	8,32	8,40	8,47	8,55	8,63	8,70	8,78	8,86	220
230	8,93	9,01	9,09	9,17	9,25	9,33	9,41	9,49	9,57	9,65	230
240	9,73	9,81	9,89	9,97	10,05	10,14	10,22	10,30	10,39	10,47	240
250	10,55										250

Valores intermedios no necesitan ser interpolados.

Tabla 6.8 Coeficientes de pandeo ω para el acero St 52 en forma de tubos de sección circular según DIN 4114, hoja 1.

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	λ
20	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,05	1,05	20
30	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08	1,08	1,09	1,10	1,10	30
40	1,11	1,11	1,12	1,13	1,13	1,14	1,15	1,16	1,16	1,17	40
50	1,18	1,19	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24	1,25	1,26	1,27	50
60	1,28	1,30	1,31	1,32	1,33	1,35	1,36	1,38	1,39	1,41	60
70	1,42	1,44	1,46	1,47	1,49	1,51	1,53	1,55	1,57	1,59	70
80	1,62	1,66	1,71	1,75	1,79	1,83	1,88	1,92	1,97	2,01	80
90	2,05	2,10	2,14	2,19	2,24	2,29	2,33	2,38	2,43	2,48	90
100	2,53	2,58	2,64	2,69	2,74	2,79	2,85	2,90	2,95	3,01	100
110	3,06	3,12	3,18	3,23	3,29	3,35	3,41	3,47	3,53	3,59	110
120	3,65	3,71	3,77	3,83	3,89	3,96	4,02	4,09	4,15	4,22	120
130	4,28	4,35	4,41	4,48	4,55	4,62	4,69	4,75	4,82	4,89	130
140	4,96	5,04	5,11	5,18	5,25	5,33	5,40	5,47	5,55	5,62	140
150	5,70	5,78	5,85	5,93	6,01	6,09	6,16	6,24	6,32	6,40	150
160	6,48	6,57	6,65	6,73	6,81	6,90	6,98	7,06	7,15	7,23	160
170	7,32	7,41	7,49	7,58	7,67	7,76	7,85	7,94	8,03	8,12	170
180	8,21	8,30	8,39	8,48	8,58	8,67	8,76	8,86	8,95	9,05	180
190	9,14	9,24	9,34	9,44	9,53	9,63	9,73	9,83	9,93	10,03	190
200	10,13	10,23	10,34	10,44	10,54	10,65	10,75	10,85	10,96	11,06	200
210	11,17	11,28	11,38	11,49	11,60	11,71	11,82	11,93	12,04	12,15	210
220	12,26	12,37	12,48	12,60	12,71	12,82	12,94	13,05	13,17	13,28	220
230	13,40	13,52	13,63	13,75	13,87	13,99	14,11	14,23	14,35	14,47	230
240	14,59	14,71	14,83	14,96	15,08	15,20	15,33	15,45	15,58	15,71	240
250	15,83										250

Valores intermedios no necesitan ser interpolados.

6.11 Diseño de columnas compuestas

En muchos casos, una columna compuesta por varios perfiles resulta un diseño más práctico que el uso de un solo perfil laminado. Ello ocurre normalmente cuando se requiere diseñar una columna de longitud muy grande y que debe soportar una carga relativamente grande. Una ventaja de un tal diseño radica en el hecho que el radio de giro de la sección compuesta se puede controlar de tal manera que se logre que el valor de i_x sea lo más parecido posible a i_y , con el objeto de obtener la máxima eficiencia de la sección. Esta eficiencia no se puede obtener de los perfiles laminados normales, en los cuales la relación i_x/i_y varía normalmente entre 1,5 y 5 o más. Algunos ejemplos de columna compuesta son mostrados en la fig. 6.20.

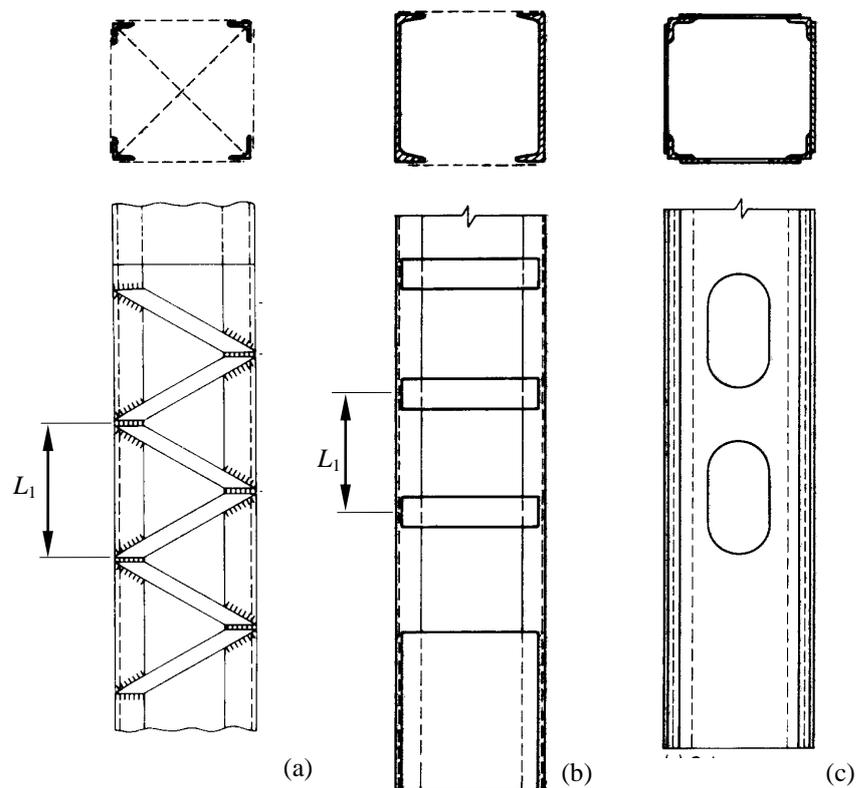


Fig. 6.20 Ejemplos de columnas compuestas: a) columna en celosía sencilla, b) columna con placas de unión soldadas y c) columna con cubreplacas perforadas.

En todos los casos es importante destacar la accesibilidad que se debe tener al interior de la columna para casos en que se deba usar, por ejemplo, pintura protectora anticorrosiva. Este requerimiento imposibilitaría el uso de secciones de cajón totalmente cerradas. En dichos casos las secciones compuestas estarán abiertas en uno o más lados y se obtendrá la continuidad en esa cara con el uso de barras en celosía (Fig. 6.20a) o usando cubreplacas perforadas (Fig. 6.20 c).

En general las barras de la celosía no soportan ninguna parte de la carga axial que debe soportar la columna, sin embargo cumplen funciones importantes como:

- mantienen en posición a las diferentes partes componentes de la columna en celosía para conservar la forma de la sección transversal de la columna compuesta,
- proporcionan soporte lateral a los segmentos componentes de las columnas en cada punto de conexión,
- actúan como un reemplazo del alma para resistir el cortante y permitir la transferencia correspondiente de las variaciones longitudinales de esfuerzos en los elementos longitudinales componentes. En una columna cargada axialmente, la fuerza cortante surge de una excentricidad accidental en el extremo cargado. La fuerza cortante es la base del diseño de las barras de la celosía y según el AISC (American Institute of Steel Construction) el cortante de diseño resultante se toma como 2% de la carga axial en el miembro.

En general el diseño de las cartelas está especificado por las normas correspondientes (AISC o DIN, por ejemplo)

6.11.1 Diseño de columnas compuestas según DIN 4114

En las figuras 6.21 y 6.22 se muestran ejemplos de diversas configuraciones para la sección de columnas compuestas. Un factor importante para el cálculo es la determinación del número de ejes libres (uno o dos) que tiene la sección compuesta. La norma especifica la siguiente definición:

Eje material es el eje que corta a todos los perfiles simples. De lo contrario se denomina **eje libre**.

Nomenclatura

F : Fuerza total sobre el elemento compuesto

A : Sección bruta (total) de todo el elemento compuesto.

A_1 : Sección de una barra simple

$$\left. \begin{array}{l} I_x = i_x^2 A \\ I_y = i_y^2 A \end{array} \right\} \text{ Momentos de inercia de la sección compuesta total}$$

L : Longitud de pandeo

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_x = \frac{L_x}{i_x} \\ \lambda_y = \frac{L_y}{i_y} \end{array} \right\} \text{ Grados de esbeltez de la barra compuesta total}$$

I_1 : Inercia mínima de una barra simple

λ_1 : Grado de esbeltez de la barra individual entre cartelas (debe ser ≤ 50)

L_1 : Máxima luz parcial de la barra (longitud libre entre cartelas)

m : Factor que depende del número de perfiles de la sección compuesta

Determinación del factor m para ejes libres (para el caso de ejes materiales no se define m y el cálculo al pandeo se realiza sin ninguna consideración adicional especial).

a) caso en que existe un eje material: m es el número total de perfiles iguales simples de igual configuración unidos por cartelas.

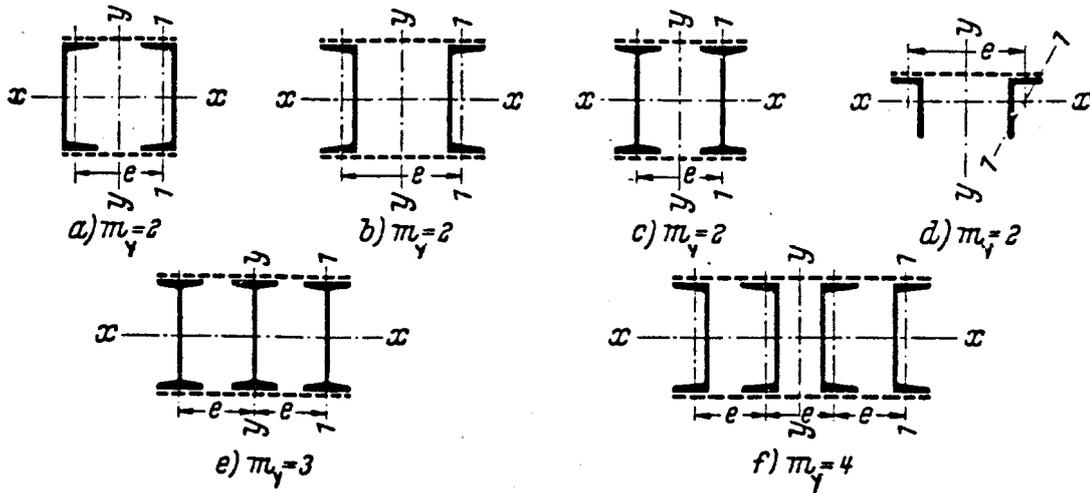


Fig. 6.21 Secciones de columnas compuestas con un eje libre.

b) caso en que no existe eje material: m es el número total de grupos de igual configuración, alineados en ejes paralelos al eje libre en estudio y unidos por cartelas.

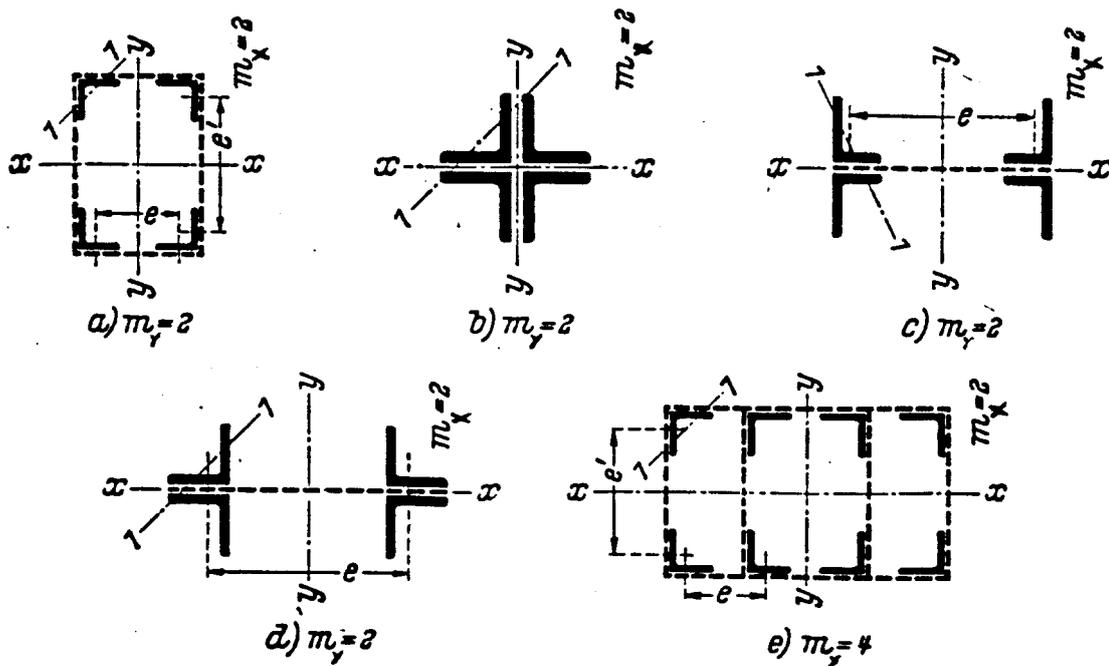


Fig. 6.22 Secciones de columnas compuestas con dos ejes libres.

6.11.2 Procedimiento de cálculo (según DIN 4114 hoja 1)

En general el procedimiento de cálculo implica dos pasos:

- I) Cálculo del conjunto
- II) Chequeo de falla individual de los perfiles entre cartelas

I) Cálculo del conjunto

a) Caso de un eje material (x-x)

a1) Alrededor de x-x: Como si fuera barra simple.

$$I_x \rightarrow i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \rightarrow \lambda_x = \frac{L_P}{i_x} \rightarrow \omega_x \Rightarrow \boxed{\omega_x \frac{F}{A} \leq \sigma_{F Adm}}$$

a2) Alrededor de y-y (eje libre): Se considera la barra compuesta como si fuera una barra simple de esbeltez ideal λ_{yi} .

$$I_y \rightarrow i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \rightarrow \lambda_y = \frac{L_P}{i_y} \rightarrow \lambda_{yi} = \sqrt{\lambda_y^2 + \frac{m_y}{2} \lambda_1^2} \rightarrow \omega_{yi}$$

λ_1 es el grado de esbeltez de la barra individual entre cartelas y debe ser $\lambda_1 \leq 50$. Se puede tomar $\lambda_1 = 50$.

Se debe cumplir que: $\boxed{\omega_{yi} \frac{F}{A} \leq \sigma_{F Adm}}$

b) Caso en que no hay eje material

b1) Pandeo alrededor de x-x:

$$I_x \rightarrow i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \rightarrow \lambda_x = \frac{L_P}{i_x} \rightarrow \lambda_{xi} = \sqrt{\lambda_x^2 + \frac{m_x}{2} \lambda_1^2} \rightarrow \omega_{xi}$$

$(\lambda_1 \leq 50 \rightarrow \text{tomar } \lambda_1 = 50)$

Se debe cumplir que: $\boxed{\omega_{xi} \frac{F}{A} \leq \sigma_{F Adm}}$

b2) Pandeo alrededor de y-y:

$$I_y \rightarrow i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \rightarrow \lambda_y = \frac{L_P}{i_y} \rightarrow \lambda_{yi} = \sqrt{\lambda_y^2 + \frac{m_y}{2} \lambda_1^2} \rightarrow \omega_{yi}$$

$(\lambda_1 \leq 50 \rightarrow \text{tomar } \lambda_1 = 50)$

Se debe cumplir que: $\boxed{\omega_{yi} \frac{F}{A} \leq \sigma_{F Adm}}$

II) Chequeo de falla individual de los perfiles entre cartelas (cálculo de la longitud entre cartelas)

En esta parte del cálculo se debe tener en cuenta que el perfil individual entre cartelas podría pandearse. Evidentemente ello ocurriría alrededor del eje de mínima inercia del área del perfil individual (ver los ejes *I-I* de las secciones compuestas mostradas en las figuras 6.21 y 6.22). En nuestro caso el cálculo de prevención del pandeo individual entre cartelas consistirá en determinar la longitud máxima entre cartelas (*L*₁) de tal manera que, por una parte, no pandee el perfil individual soportando su respectiva carga axial, y por otra parte, que no se exceda un grado de esbeltez $\lambda_1 = 50$, el cual es fijado por la norma que estamos estudiando.

Tenemos del conjunto que

$$\omega \sigma \leq \sigma_{FAdm}$$

$$\omega \frac{F}{nA_1} \leq \sigma_{FAdm}$$

$$\omega \frac{F_1}{A_1} \leq \sigma_{FAdm}$$

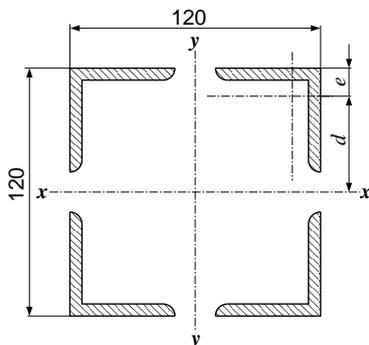
$$\omega \leq \sigma_{FAdm} \left(\frac{A_1}{F_1} \right)$$

con $\omega = \sigma_{FAdm} \left(\frac{A_1}{F_1} \right) \xrightarrow{\text{tablas}} \lambda_1$ (debe ser ≤ 50)

- Si $\lambda_1 \leq 50$: como $\lambda_1 = \frac{L_1}{i_1}$, entonces $L_1 = i_1 \cdot \lambda_1$
- Si $\lambda_1 > 50$: se toma $\lambda_1 = 50$, entonces $L_1 = i_1 (50)$

Finalmente: # espacios = $\frac{L}{L_1}$ (redondear \uparrow)
 \rightarrow # cartelas = # espacios - 1

Ejemplo 6.6 Calcular la fuerza máxima admisible que soportará una columna tipo “cajón”, formada por cuatro perfiles angulares 40 x 40 x 6 de 2 metros de longitud. El material es acero estructural St 37.



Solución: El pandeo es igualmente crítico tanto alrededor de *x-x* como de *y-y* (ambos son ejes libres).

Radio de giro: $i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{(4 I_{1\bar{x}} + A_1 d^2)}{4 A_1}} = \sqrt{i_{1\bar{x}}^2 + d^2}$

De tablas: $i_{1\bar{x}} = 1,19$ cm

Además: $d = 6,0 - e = 6,0 - 1,2 = 4,8$ cm

$\rightarrow \lambda_x = \frac{L}{i_x} = 40,44$

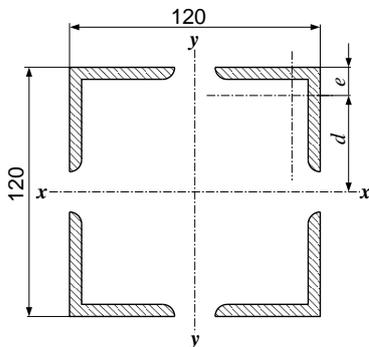
$$\lambda_{xi} = \sqrt{\lambda_x^2 + \frac{m_x}{2} \lambda_1^2} = 64,31 \text{ (con } \lambda_1 = 50) \rightarrow \omega_{xi} = 1,35$$

Se debe cumplir que: $\omega_{xi} \sigma \leq \sigma_{F Adm} \rightarrow \omega_{xi} \frac{F}{4 A_1} \leq 1400 \text{ kgf/cm}^2$

$$\rightarrow F \leq \frac{1400 (4 A_1)}{\omega_{xi}} \text{ (en tablas: } A_1 = 4,48 \text{ cm}^2)$$

reemplazando valores: $F \leq 1858,7 \text{ kgf} \rightarrow \boxed{F_{max} = 18,6 \text{ ton}}$

Ejemplo 6.7 Seleccionar el perfil angular de alas iguales más económico para una columna tipo “cajón” de 120 mm de lado y 2 metros de longitud, para soportar una carga máxima de 15 ton. Material acero estructural St 37.



Solución: El pandeo es igualmente crítico tanto alrededor de x-x como de y-y (ambos son ejes libres).

Radio de giro: $i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{(4 I_{1\bar{x}} + A_1 d^2)}{4 A_1}} = \sqrt{i_{1\bar{x}}^2 + d^2}$

donde $i_{1\bar{x}}$ sale de tablas para el perfil individual.

y $d = 6,0 - e$ donde e también en tablas.

Factor de esbeltez $\lambda_x = \frac{L}{i_x}$

ahora: $\lambda_{xi} = \sqrt{\lambda_x^2 + \frac{m_x}{2} \lambda_1^2}$ (con $\lambda_1 = 50$) \rightarrow de tablas: ω_{xi}

finalmente se debe cumplir que: $\omega_{xi} \sigma \leq \sigma_{F Adm} = 1400 \text{ kgf/cm}^2$

Ahora debemos iterar para buscar el perfil de menor área que cumpla los requerimientos de resistencia:

Perfil	A_1 (cm ²)	$i_{1\bar{x}}$ (cm)	e (cm)	$d = 6 - e$ (cm)	i_x (cm)	λ_x	λ_{xi}	ω_{xi}	$\omega_{xi} \cdot \sigma$ (kgf/cm ²)	? ≤ 1400 (kgf/cm ²)
30 x 5	2,78	0,88	0,92	5,08	5,16	38,75	63,26	1,34	1807,5	no
35 x 5	3,28	1,04	1,04	4,96	5,07	39,45	63,69	1,34	1532,0	no
35 x 4	2,67	1,05	1,0	5,0	5,11	39,24	63,50	1,34	1882,0	no
40 x 4	3,08	1,21	1,12	4,88	5,03	39,76	63,88	1,34	1631,0	no
35 x 6	3,87	1,04	1,08	4,92	5,03	39,77	63,89	1,34	1298,0	si
40 x 5	3,79	1,20	1,16	4,84	4,99	40,11	64,10	1,34	1325,0	mejor
45 x 4	3,49	1,36	1,23	4,77	4,96	40,32	64,23	1,35	1450,0	no

Entonces tomamos 4 perfiles 40 x 5 pues son los más adecuados.

Cálculo de la distancia entre cartelas:

se debe cumplir: $\omega \sigma \leq \sigma_{FAdm} \rightarrow \omega \leq \frac{1400 (4 A_1)}{F} = 1,41$

de tabla (para St 37): $\lambda_1 \leq 70 \rightarrow$ según la norma tomamos: $\lambda_1 = 50$

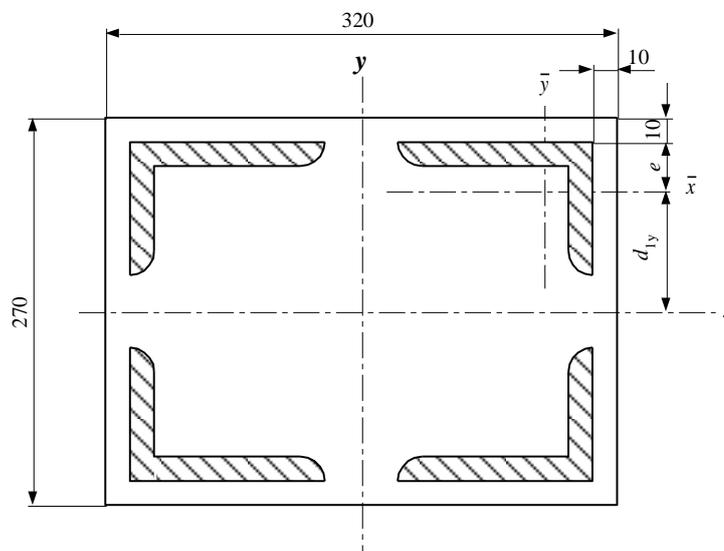
como $\lambda_1 = \frac{L_1}{i_\eta} = 50$

de tablas para el perfil seleccionado: $i_\eta = 0,78 \text{ cm}$

$\rightarrow L_1 = 50 \cdot 0,78 = 39 \text{ cm}$

Nº de espacios $\geq \frac{200}{39} = 5,13 \rightarrow 6$ espacios $\rightarrow 5$ cartelas intermedias

Ejemplo 6.8 Seleccionar los perfiles angulares de alas desiguales de acero St 37 más económicos para que la columna de cajón mostrada en la figura soporte una carga $F = 15 \text{ ton}$. La longitud de la columna es $L = 7,5 \text{ m}$ y se colocará en una base de $320 \times 270 \text{ mm}$.



Solución:

Para empezar tenemos dos posibilidades de trabajo: **a)** elegir arbitrariamente un perfil cualquiera y luego verificar la resistencia al pandeo de la columna y de acuerdo al resultado tomar otro perfil y así irnos acercando al perfil más económico, o **b)** mediante el estudio del pandeo de una barra simple estimar un tamaño de barra simple para empezar con el proceso iterativo. Optaremos por el segundo camino:

1) Estudio de una barra simple: $\omega_1 \sigma_1 \leq \sigma_{F Adm}$

$$\rightarrow \omega_1 \frac{F_1}{A_1} \leq \sigma_{F Adm} = 1400 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \rightarrow \omega_1 \left(\frac{15000/4}{A_1} \right) \leq 1400 \rightarrow \frac{\omega_1}{A_1} \leq 0,3733 \quad (1)$$

según DIN 4114: $\lambda_1 \leq 50 \xrightarrow{\text{tablas}} \omega_1 \leq 1,21$

$$\text{de (1) con } \omega_1 = 1,21 \rightarrow A_1 \geq 3,24 \text{ cm}^2 \quad (2)$$

Ahora podemos elegir de la tabla un perfil que cumpla con la condición (2) y luego podremos empezar con el proceso iterativo que nos llevará a la solución, es decir al perfil que cumpla las condiciones de resistencia y que sea el más económico de todos los que están a disposición.

2) Pandeo del conjunto alrededor del eje x-x: $m_x = 2$

$$\text{Para el conjunto: } i_x^2 = \frac{I_x}{4A_1} = \frac{4(I_{1x} + A_1 d_{1y}^2)}{4A_1} \rightarrow i_x^2 = i_{1x}^2 + d_{1y}^2$$

donde $d_{1y} = 13,5 - 1 - e$ [cm], es decir: $d_{1y} = 12,5 - e$ [cm]

$$\text{Grado de esbeltez del conjunto: } \lambda_x = \frac{L}{i_x} = \frac{750}{i_x} \text{ [cm/cm]}$$

$$\rightarrow \lambda_{xi} = \sqrt{\lambda_x^2 + \frac{m_x}{2} \lambda_1^2}, \quad \text{donde } \lambda_1 = 50 \text{ (por norma)}$$

y se debe cumplir que: $\omega_{xi} \sigma \leq \sigma_{F Adm} = 1400 \text{ kgf/cm}^2$

$$\text{es decir: } \omega_{xi} \frac{F}{4A_1} \leq 1400 \text{ [kgf/cm}^2] \rightarrow \frac{\omega_{xi}}{A_1} \leq 0,3733 \quad (3)$$

Ahora debemos iterar a partir de un perfil que cumpla la condición (2), por ejemplo el perfil angular 45 x 30 x 5, el cual tiene un área individual de 3,53 cm². Para mayor orden haremos la iteración utilizando una tabla:

Perfil	A ₁	i _{1x}	e	d _{1y}	i _x	λ _x	λ ₁	λ _{xi}	ω _{xi}	ω _{xi} /A ₁
45 x 30 x 5	3,53	0,84	0,78	11,72	11,75	63,83	50	81,08	1,56	0,4419
50 x 30 x 5	3,78	0,82	0,74	11,76	11,78	63,62	50	80,92	1,56	0,4127
50 x 40 x 5	4,27	1,18	1,07	11,43	11,49	65,27	50	82,2	1,58	0,3700
50 x 40 x 4	3,46	1,19	1,03	11,47	11,53	65,03	50	82,02	1,58	0,4500

Ahora podemos decir que el perfil angular 50 x 40 x 5 es el más económico y la columna cumple con la condición (3), es decir, cumple con la exigencia de resistencia al pandeo.

Finalmente, debemos establecer el número de cartelas intermedias para asegurar que no ocurrirá pandeo individual entre ellas:

3) Chequeo de falla individual de los perfiles entre cartelas.

De tablas tenemos para el perfil 50 x 40 x 5: $i_1 = 0,84 \text{ cm}$
 $A_1 = 4,27 \text{ cm}^2$

Para cada perfil se debe cumplir: $\omega_1 \frac{F_1}{A_1} \leq \sigma_{F Adm}$
 $\rightarrow \omega_1 \leq \frac{1400 (4,27)}{(15000/4)} \rightarrow \omega_1 \leq 1,59$

de la tabla de factores omega: $\lambda_1 \leq 83 \rightarrow$ por la norma tomamos $\lambda_1 = 50$

Ahora: $\lambda_1 = 50 = \frac{L_1}{0,84} \rightarrow L_1 = 42 \text{ cm} \rightarrow$ cartelas cada 42 cm.

Por consiguiente: $\# \text{ espacios} = \frac{750}{42} = 17,86 \rightarrow 18 \text{ espacios.}$

Finalmente: $\# \text{ cartelas} = \# \text{ espacios} - 1 = 17 \text{ cartelas @ } 42 \text{ cm.}$
