ESTABILIDAD I A

Sistemas de fuerzas concentradas.
Principios de la estática

Mecánica:

Rama de la física que se ocupa del estado de reposo o movimiento de cuerpos sometidos a la acción de fuerzas.

- Mecánica del cuerpo rígido → Estática, Dinámica
- Mecánica del cuerpo deformable
- Mecánica de fluidos

Mecánica:

Estática: trata del equilibrio de los cuerpos
(reposo ó movimiento con velocidad constante)

Dinámica: movimiento acelerado de los cuerpos

Estática → **Equilibrio**

Mecánica del continuo

Es la rama de la mecánica que estudia el movimiento de sólidos, líquidos y gases bajo la hipótesis de medio continuo.
Esta idealización no tiene en cuenta la estructura atómica ó molecular.

Cuerpo

Conjunto de partículas vinculadas entre sí (cohesión).

Cuerpos → Deformables (reales)

Cuerpos → Indeformables (no reales)

Cuerpo

<u>Cuerpos rígidos e indeformables</u>

→ **Distancia entre 2 puntos del cuerpo se mantiene invariable ante la acción de fuerzas exteriores**

Sistemas lineales

Linealidad geométrica (pequeños desplazamientos, pequeñas deformaciones, Equilibrio en la posición sin deformar) + linealidad del material

Sistemas en los cuales los efectos (resultados) son proporcionales a las causas (datos de entrada).

Vector

Una cantidad que tiene magnitud, dirección y sentido (posición, fuerza, momento, etc).

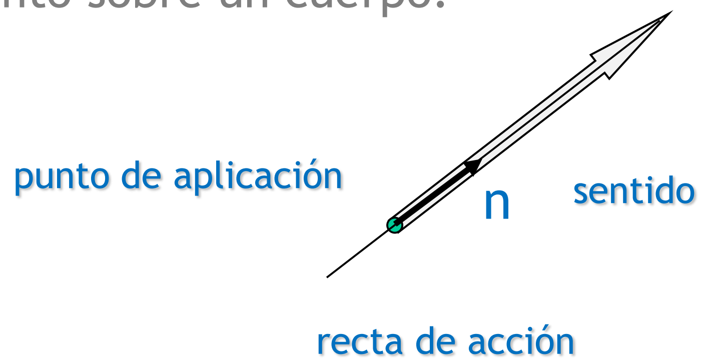
Clases de vectores:

1. **Fijo ó aplicado: actúa en un punto fijo del espacio**
2. **Deslizante ó axil: puede aplicarse en cualquier punto a lo largo de su recta de acción**
3. **Libre: puede actuar en cualquier lugar del espacio; solamente es necesario que se conserve su magnitud y dirección**
4. **Iguales: igual magnitud y dirección**
5. **Negativo: tiene sentido opuesto a su contraparte positiva pero la misma magnitud**
6. **Coplanares: actúan en el mismo plano**
7. **Colineales: misma recta de acción**

Fuerza

Toda acción que es capaz de modificar el estado de reposo (o movimiento rectilíneo uniforme) de un cuerpo.

Una fuerza concentrada representa una carga que se supone está actuando en un punto sobre un cuerpo.

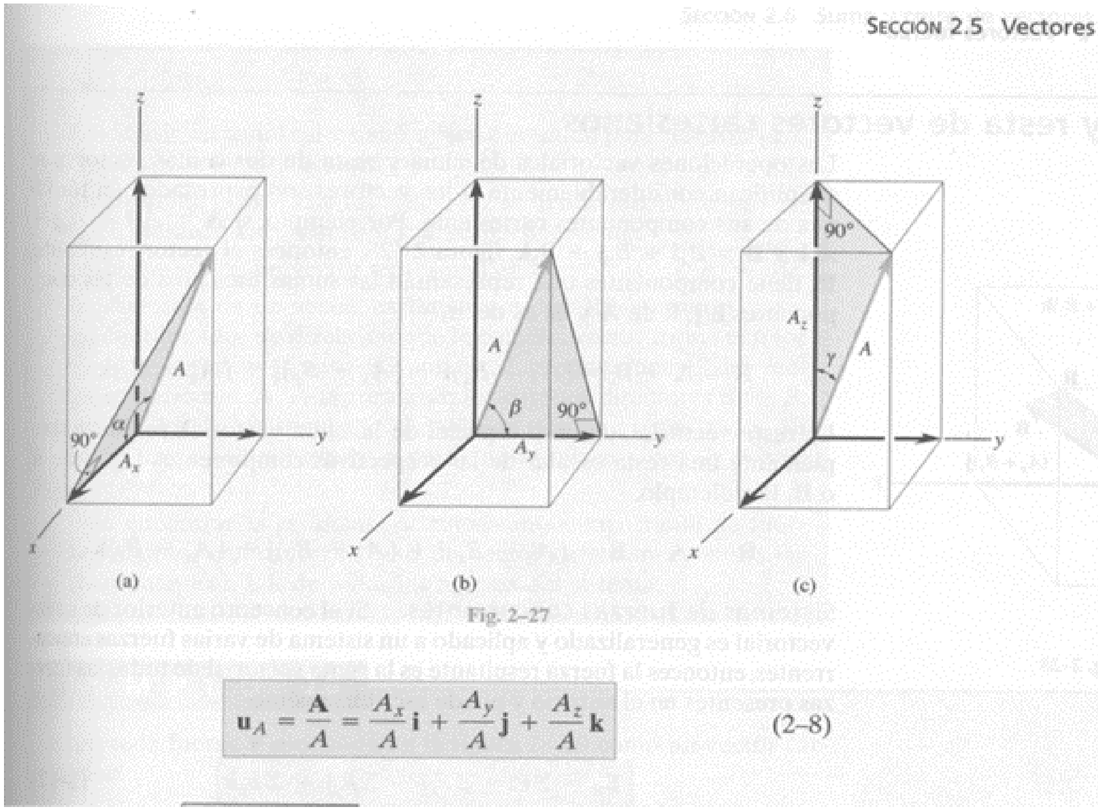


$$\overline{F} = F \,.\, \overline{n}$$

- Fuerza: $\overline{F}$
- Módulo: F
- Versor: $\overline{n}$

Realidad		**Modelo**
Acciones exteriores y de masa	→	Fuerza

Cosenos directores



Nota: los cosenos directores de un eje con los ejes coordenados **x, y, z** son los cosenos de los ángulos que forma el eje dado con los coordenados

(ref: Russel C. Hibbeler)

Cosenos directores

$$\boxed{\overline{P} = P\ \overline{n}_p}$$

$$\boxed{\lambda_x = \frac{P_x}{P} = \cos\alpha} \quad \boxed{\lambda_y = \frac{P_y}{P} = \cos\beta} \quad \boxed{\lambda_z = \frac{P_z}{P} = \cos\gamma}$$

$$\boxed{\overline{n} = \lambda_x\ \hat{i} + \lambda_y\ \hat{j} + \lambda_z\ \hat{k}}$$

$$\boxed{\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1}$$

La suma de los cuadrados de los cosenos directores es 1 !!!!!!

Principios de la Estática

Principios de la estática

1er. Principio de la Estática (Principio del paralelogramo).

- Enunciado y Corolarios.
- Composición de fuerzas concurrentes en el plano y en el espacio. Suma vectorial.
- Descomposición de fuerzas en sus componentes rectangulares.
- Resultante de fuerzas concurrentes en el espacio. Sistematización y algoritmos.

2º Principio de la Estática (Equilibrio).

- Condiciones de equilibrio de una partícula. Expresiones gráficas y analíticas.

3er. Principio de la Estática (Transmisibilidad).

- Cuerpos indeformables y cuerpos deformables.

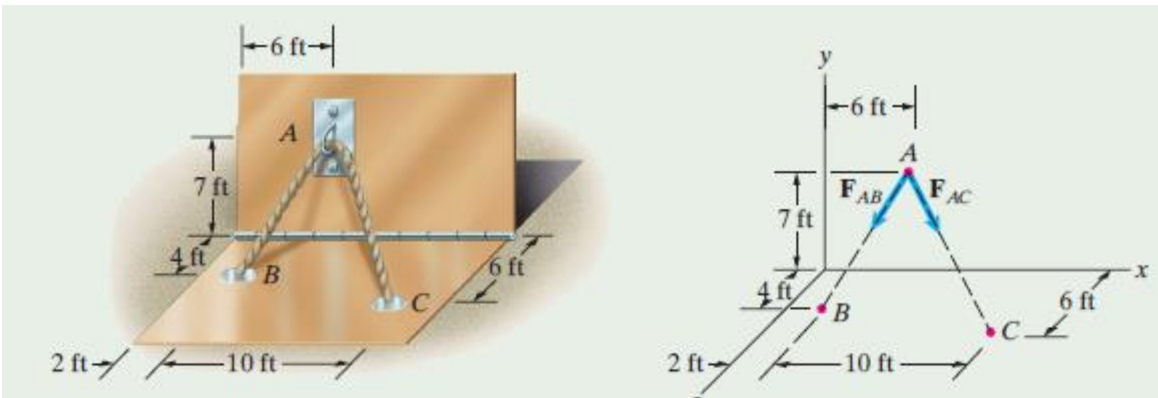
4° Principio de acción y reacción

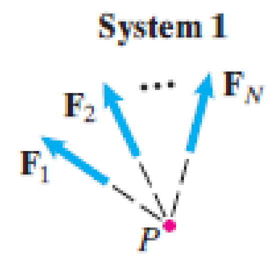
Sistemas de fuerzas concurrentes

En este capítulo se estudiará el efecto de las fuerzas que actúan sobre las partículas. **Primero se aprenderá a sustituir dos o más fuerzas que actúan sobre una partícula por una sola fuerza que tenga el mismo efecto que ellas.** Esta fuerza equivalente sola es la resultante de las fuerzas varias que actúan sobre la partícula.

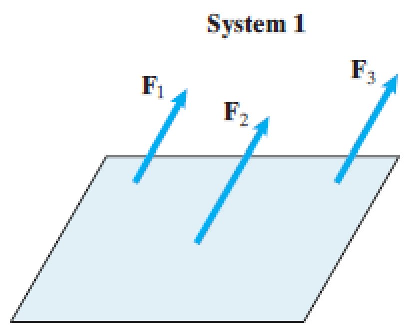
Un vector con el que se representa una fuerza que actúa sobre una partícula tiene un punto de aplicación bien definido, a saber, la partícula misma. A tal vector se le llama vector fijo

Sistema de fuerzas concurrentes: si las líneas de acción se encuentran (concurren) en un punto.





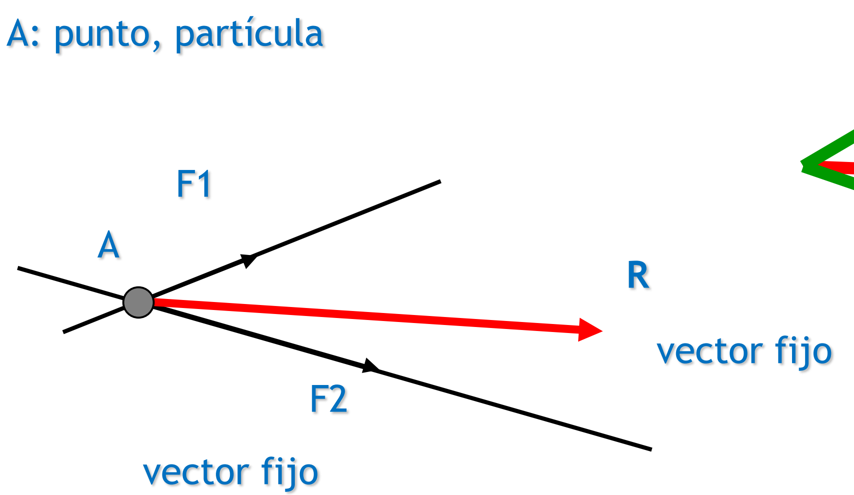
Sistema de fuerzas paralelas: si las líneas de acción son paralelas.

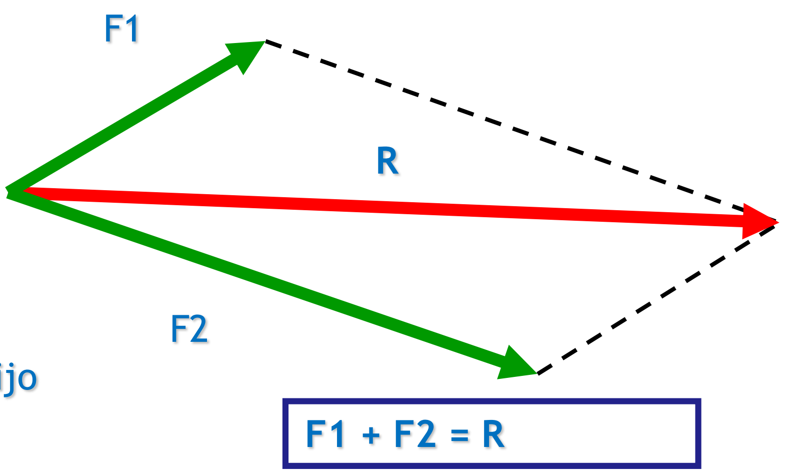


Ref: Bedford Fowler

1° - Principio del Paralelogramo

El efecto de 2 fuerzas, **F**1 y **F**2, aplicadas a un mismo punto de un cuerpo rígido, es equivalente al de una única fuerza llamada **resultante,** aplicada en el mismo punto, y cuya intensidad y dirección quedan definidas por la diagonal del paralelogramo que tiene por lados los vectores representativos de las fuerzas componentes.



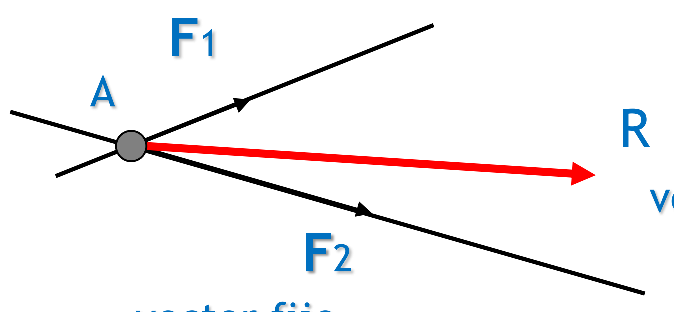


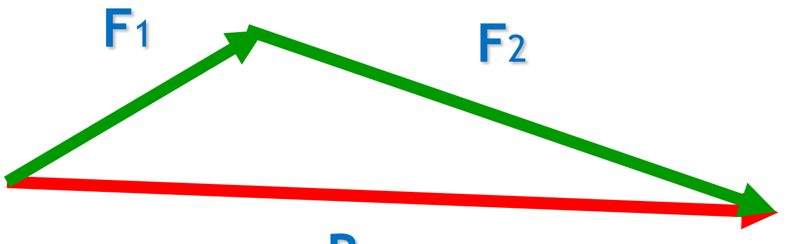
- F1 y F2: FUERZAS CONCURRENTES (Fuerzas paralelas: son fuerzas concurrentes)
- Las rectas de acción de F1 y F2 forman un plano.
- R está en el mismo plano.

1° - Principio del Paralelogramo

Triángulo de fuerzas:

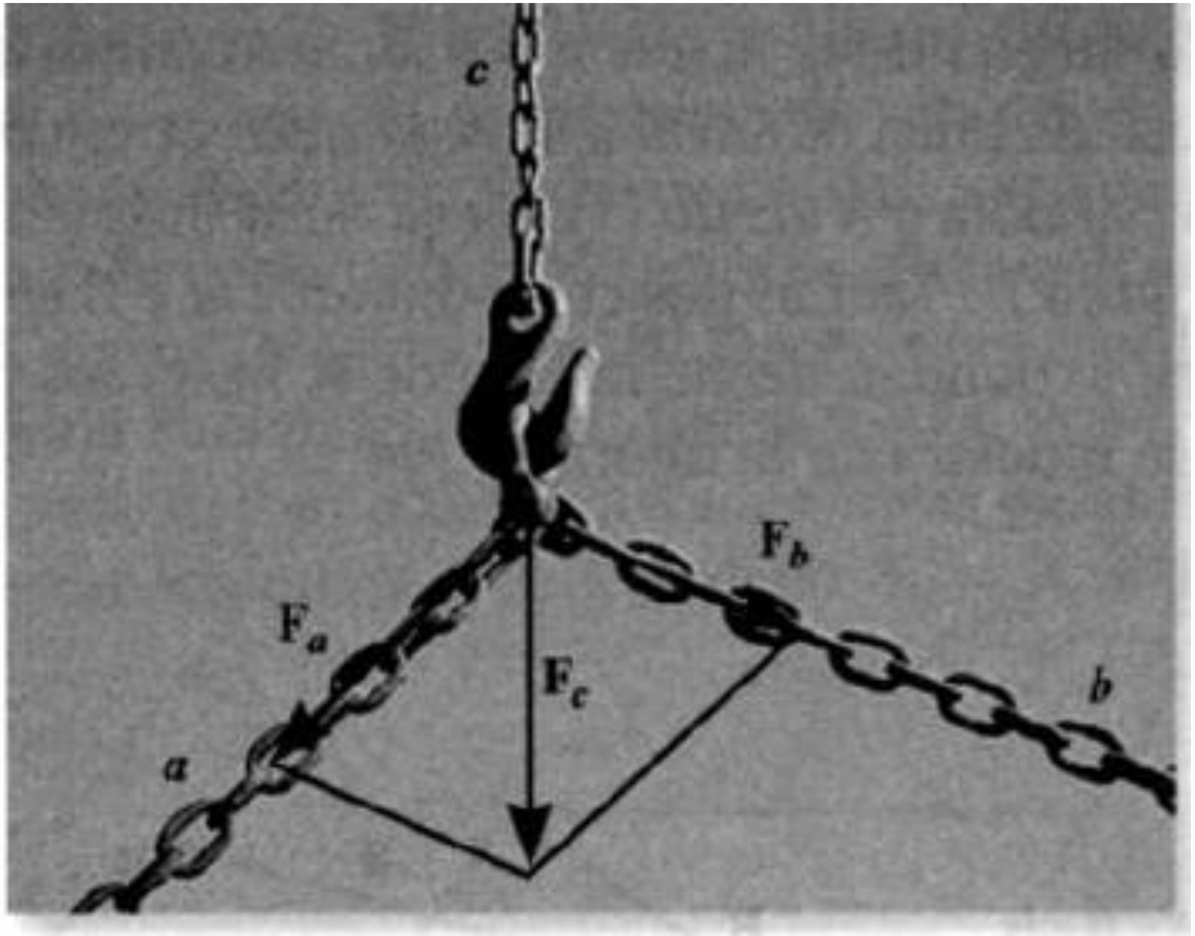
A: punto, partícula





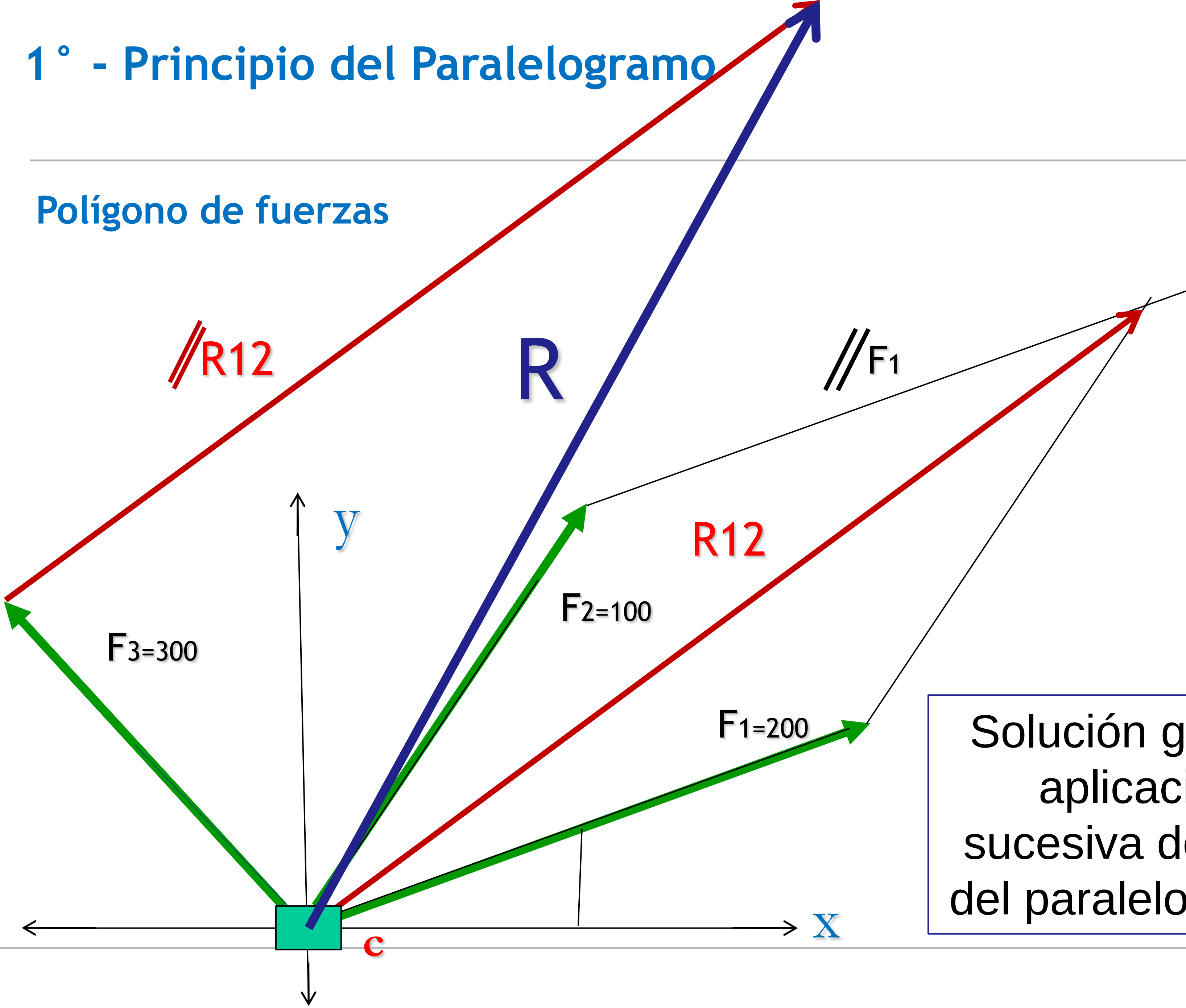
$$F_1 + F_2 = R$$

1° - Principio del Paralelogramo



1° - Principio del Paralelogramo

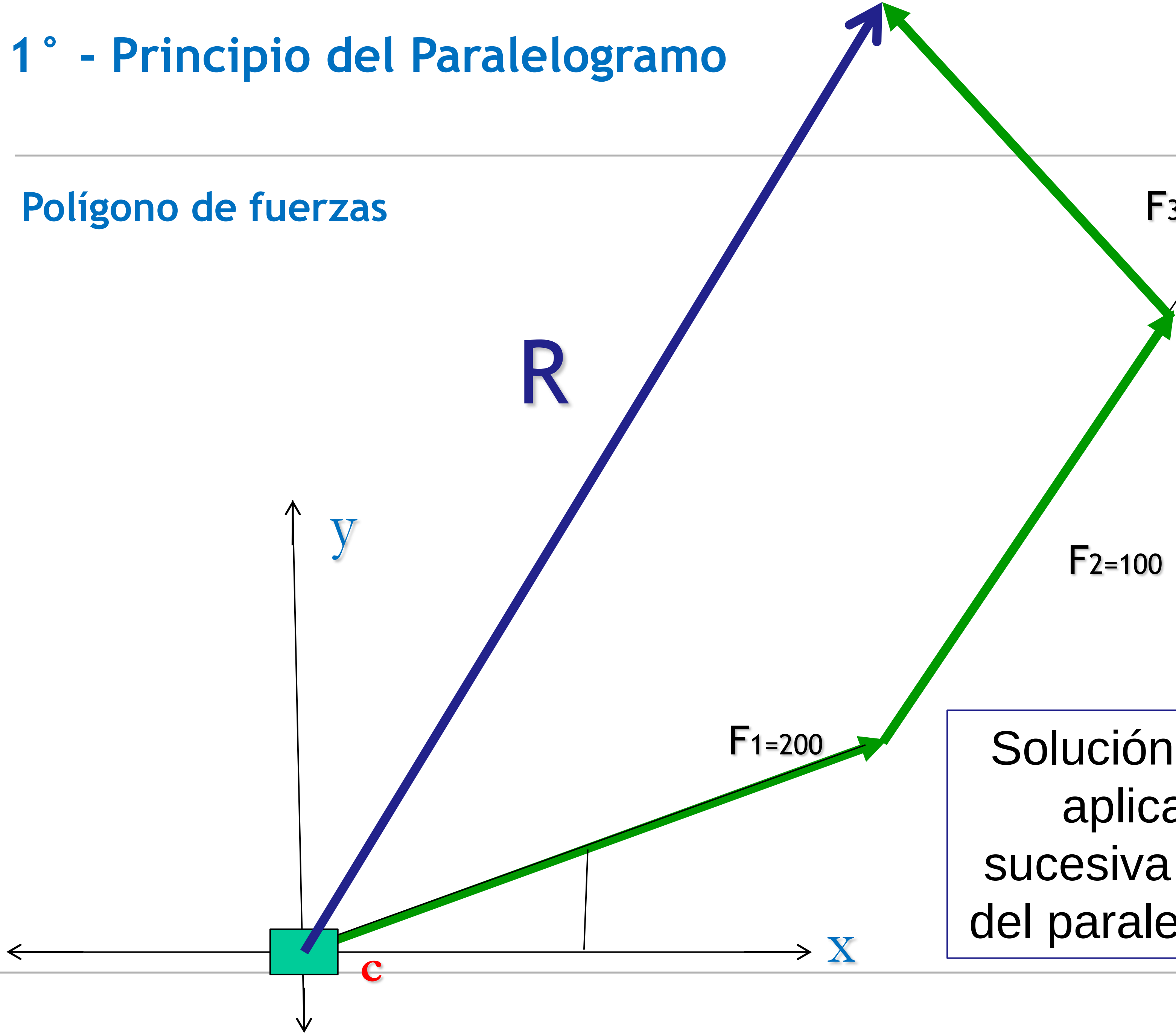
Polígono de fuerzas



Solución gráfica: aplicación sucesiva del ppio del paralelogramo.

1° - Principio del Paralelogramo

Polígono de fuerzas



Solución gráfica: aplicación sucesiva del ppio del paralelogramo.

1° - Principio del Paralelogramo

Corolarios:

1. **Resultante de fuerzas colineales**: es la suma algebraica de los vectores representativos de las componentes $\overline{R} = \sum_i \overline{F}_i$
2. **Composición de n fuerzas concurrentes en el plano:**
3. **Descomposición de una fuerza en 2 direcciones coplanares:** la fuerza a descomponer y las direcciones deben estar en el mismo plano.
4. **Composición de n fuerzas concurrentes en el espacio:**
5. **Descomposición de una fuerza en 3 direcciones concurrentes en el espacio.**

1° - Principio del Paralelogramo

I. Componer un sistema de n fuerzas concurrentes => Hallar su resultante

$$\overline{R} = \sum_i \overline{F}_i$$

Datos: las fuerzas componentes (magnitud, direcciòn y sentido)

Incògnita: la fuerza resultante (magnitud, direcciòn y sentido)

II. Descomponer una fuerza en n direcciones dadas => Hallar los mòdulos de las fuerzas componentes

Datos: las direcciones de las fuerzas componentes

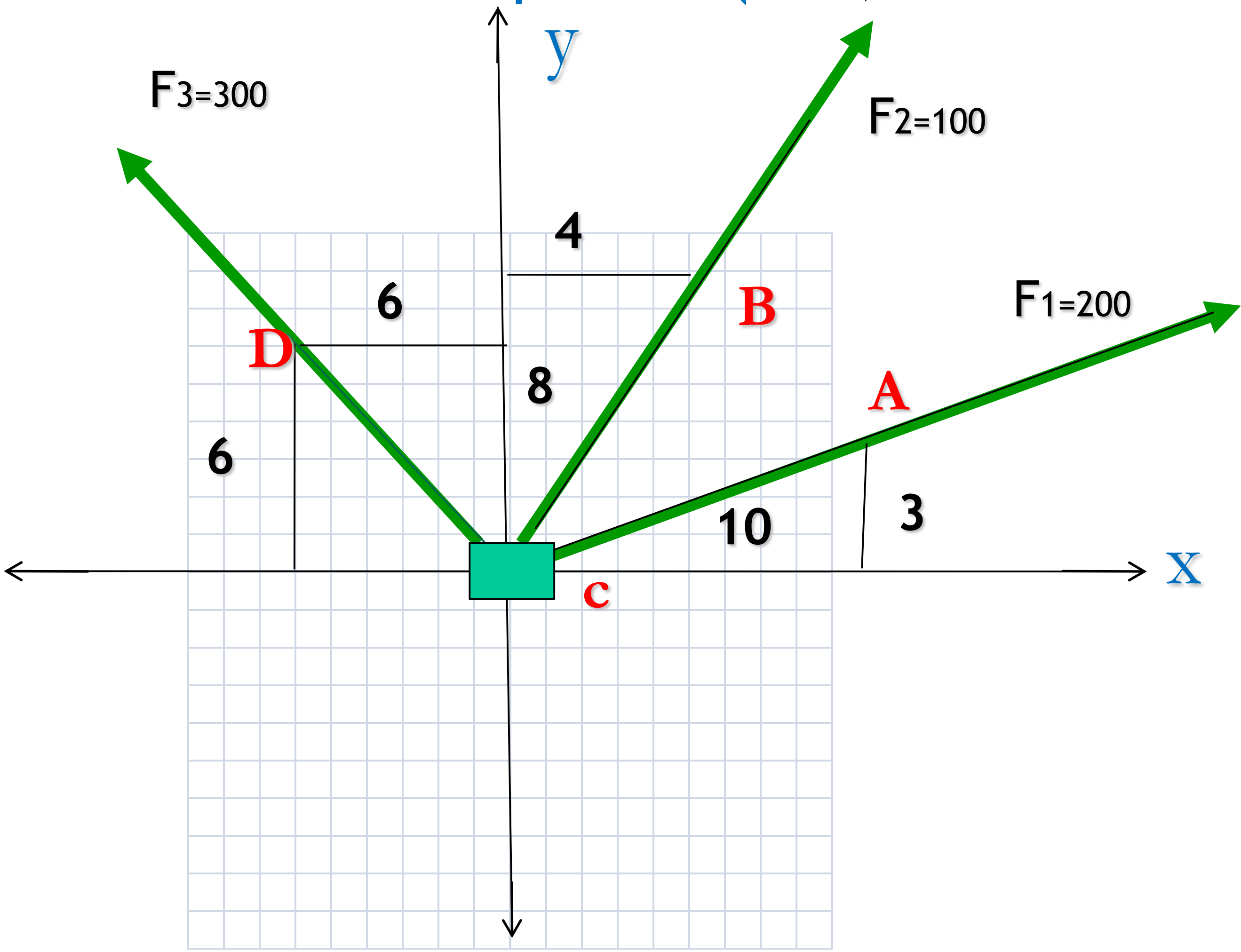
Incògnitas: los mòdulos de las fuerzas componentes

Sistemas planos n=2   Sistemas 3D n=3

1° - Principio del Paralelogramo

2. Composición de fuerzas concurrentes coplanares (➡ encontrar su resultante):

<u>Ejemplo</u>: Se desea mover un bloque mediante 3 cables accionados por 3 grúas. En qué dirección y con qué fuerza se moverá el bloque?



1° - Principio del Paralelogramo

2. Composición de fuerzas concurrentes coplanares (→ encontrar su resultante):

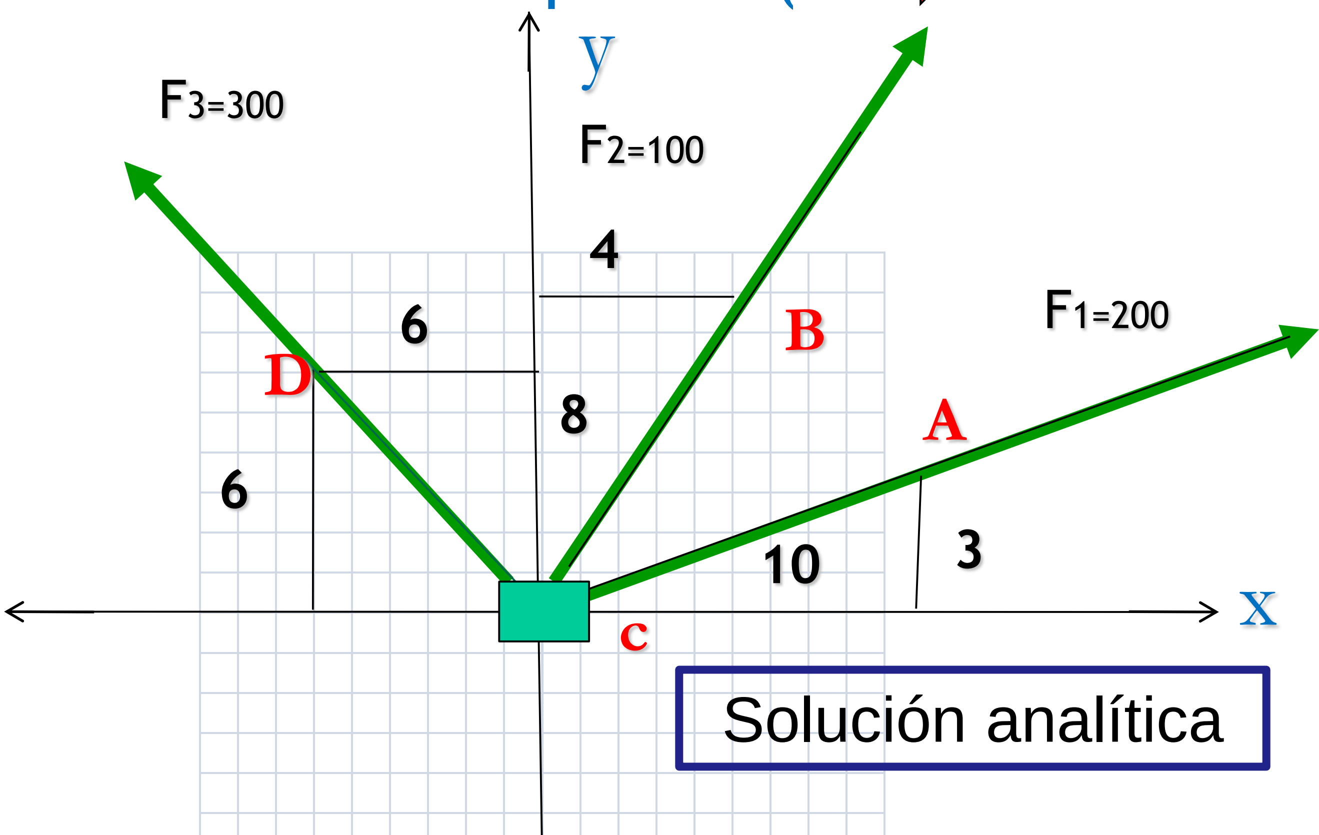
<u>Ejemplo</u>: Se desea mover un bloque mediante 3 cables accionados por 3 grúas. En qué dirección y con qué fuerza se moverá el bloque?

$$R_x = \sum_i F_{i,x}$$

$$R_y = \sum_i F_{i,y}$$

$$R = \sqrt{R^2{}_x + R^2{}_y}$$

$$\lambda^R{}_x = \frac{R_x}{R} \qquad \lambda^R{}_y = \frac{R_y}{R}$$



Solución analítica

A, B, D: puntos de las rectas de acción de las fuerzas
C: punto de concurrencia

1° - Principio del Paralelogramo

2. Composición de fuerzas concurrentes coplanares:

$$\Delta_x = x_F - x_C$$

$$\Delta_y = y_F - y_C$$

$$l_i = \sqrt{\Delta^2{}_x + \Delta^2{}_y}$$

$$\lambda^R{}_{x,i} = \frac{\Delta_{x,i}}{l_i}$$

$$\lambda^R{}_{y,i} = \frac{\Delta_{y,i}}{l_i}$$

$$F_{x,i} = F_i \cdot \lambda_{x,i}$$

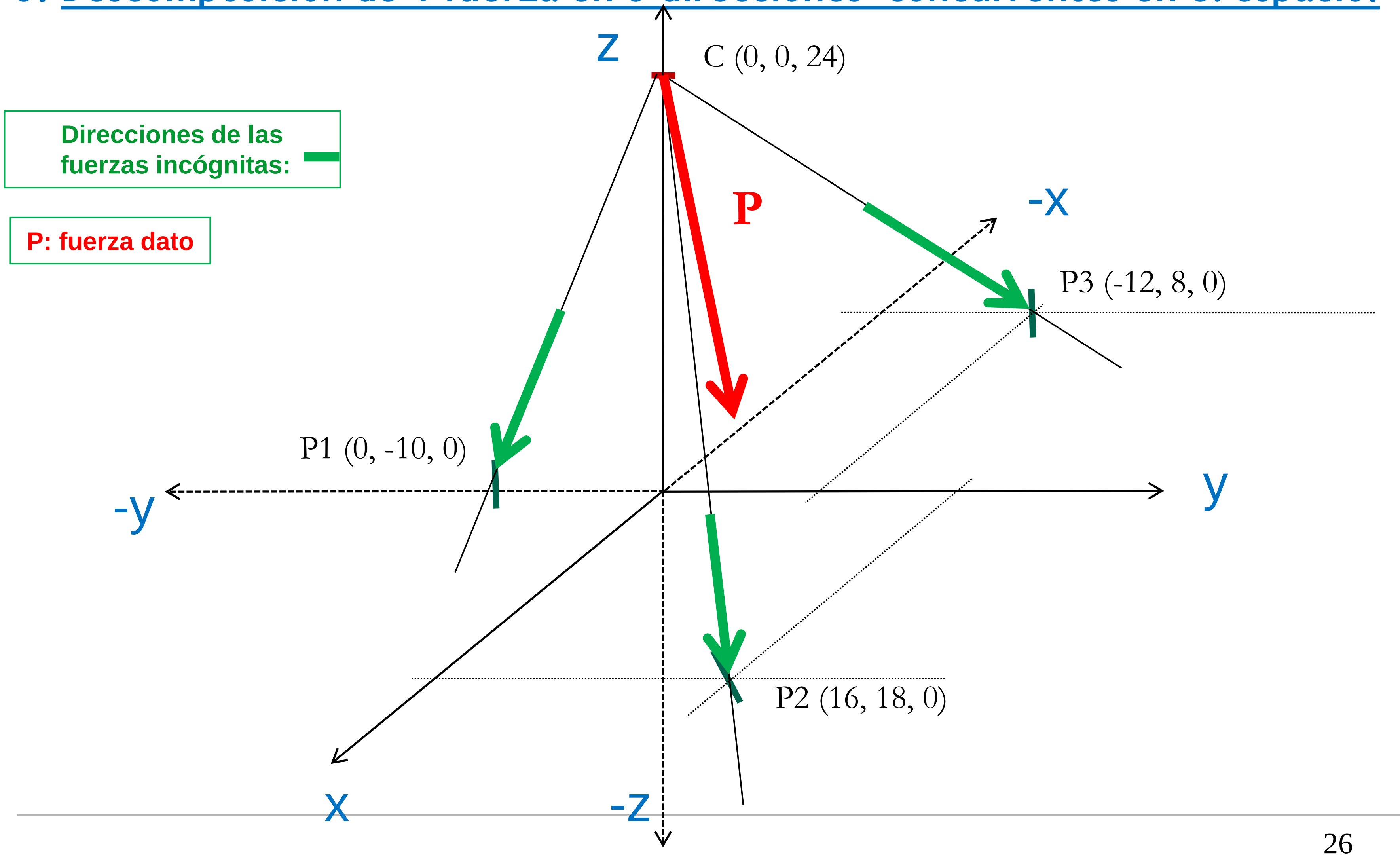
$$F_{y,i} = F_i \cdot \lambda_{y,i}$$

i	Fi	Δx	Δy	li	λxi	λyi	Fxi	Fyi
1	200	10	3	10.44	0.96	0.29	191.57	57.47
2	100	4	8	8.94	0.45	0.89	44.72	89.44
3	300	-6	6	8.49	-0.71	0.71	-212.13	212.13
							24.15	359.04
						R=	359.86	
						λxR=	0.07	
						λyR=	1.00	

Nota: los cosenos directores de un eje con los ejes coordenados **x, y, z** son los cosenos de los ángulos que forma el eje dado con los coordenados

1° - Principio del Paralelogramo

5. Descomposición de 1 fuerza en 3 direcciones concurrentes en el espacio:



1° - Principio del Paralelogramo

5. Descomposición de 1 fuerza en 3 direcciones concurrentes en el espacio:

5.1. Planteo sistema de ecuaciones

$$\overline{P} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3$$

Incógnitas

$$P\,\overline{n}_p = F_1\,\overline{n}_1 + F_2\,\overline{n}_2 + F_3\,\overline{n}_3$$

$$P\begin{bmatrix}\lambda_x^P\\ \lambda_y^P\\ \lambda_z^P\end{bmatrix} = F_1\begin{bmatrix}\lambda_x^1\\ \lambda_y^1\\ \lambda_z^1\end{bmatrix} + F_2\begin{bmatrix}\lambda_x^2\\ \lambda_y^2\\ \lambda_z^2\end{bmatrix} + F_3\begin{bmatrix}\lambda_x^3\\ \lambda_y^3\\ \lambda_z^3\end{bmatrix}$$

DATOS

$$P\begin{bmatrix}\lambda_x^P\\ \lambda_y^P\\ \lambda_z^P\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_x^1 & \lambda_x^2 & \lambda_x^3\\ \lambda_y^1 & \lambda_y^2 & \lambda_y^3\\ \lambda_z^1 & \lambda_z^2 & \lambda_z^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_1\\ F_2\\ F_3\end{bmatrix}$$

INCOGNITAS

1° - Principio del Paralelogramo

5. Descomposición de 1 fuerza en 3 direcciones concurrentes en el espacio:

5.1. Planteo sistema de ecuaciones

$$\overline{P} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3$$

Incógnitas

$$P\ \overline{n}_p = F_1\ \overline{n}_1 + F_2\ \overline{n}_2 + F_3\ \overline{n}_3$$

$$P\begin{bmatrix} \lambda_x^P \\ \lambda_y^P \\ \lambda_z^P \end{bmatrix} = F_1\begin{bmatrix} \lambda_x^1 \\ \lambda_y^1 \\ \lambda_z^1 \end{bmatrix} + F_2\begin{bmatrix} \lambda_x^2 \\ \lambda_y^2 \\ \lambda_z^2 \end{bmatrix} + F_3\begin{bmatrix} \lambda_x^3 \\ \lambda_y^3 \\ \lambda_z^3 \end{bmatrix}$$

DATOS

$$P\begin{bmatrix} \lambda_x^P \\ \lambda_y^P \\ \lambda_z^P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x^1 & \lambda_x^2 & \lambda_x^3 \\ \lambda_y^1 & \lambda_y^2 & \lambda_y^3 \\ \lambda_z^1 & \lambda_z^2 & \lambda_z^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

INCOGNITAS

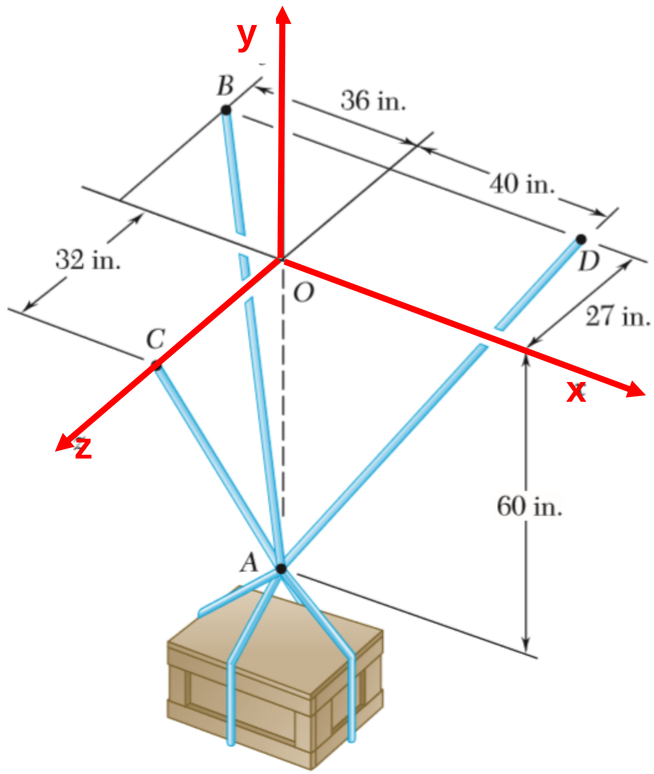
5. Descomposición de 1 fuerza en **n** direcciones concurrentes en el espacio:

Podría n ser mayor a 3 ?????????????????????

1° - Principio del Paralelogramo

5. Descomposición de 1 fuerza en n direcciones concurrentes en el espacio:

2.104 Tres cables sostienen una caja como se muestra en la figura. Determine el peso de la caja, si se sabe que la tensión en el cable *AD* es de 616 lb.



2° Principio de la Estática - Equilibrio

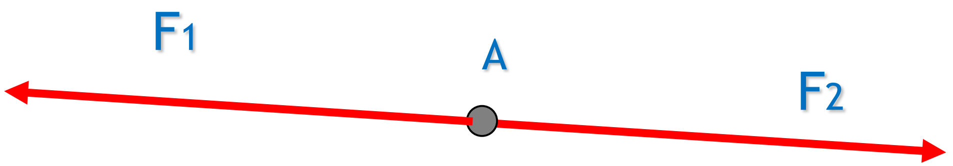
Equilibrio de un conjunto de fuerzas concurrentes $\Longleftrightarrow$ $\overline{R} = 0$

(1° Ley de Newton)

2° - Equilibrio

Equilibrio de un conjunto de fuerzas concurrentes $\Leftrightarrow$ $\overline{R} = 0$

Fuerzas opuestas: misma recta de acción, igual intensidad y sentido contrarios.



(diagrama de cuerpo libre)

$F_1 = -F_2$

$F_1 + F_2 = R = 0$

Sistemas nulos: constituidos por fuerzas en equilibrio

Equilibrante: la fuerza opuesta a la resultante

2° - Equilibrio

Corolarios:

1. Para que la resultante sea nula es condición necesaria y suficiente que sean nulas sus componentes.

$$R_x = 0 \qquad R_y = 0 \qquad R_z = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{R} = 0$$

2. Para que la resultante sea nula es condición necesaria y suficiente que el polígono de fuerzas sea cerrado.
3. Dos fuerzas se equilibran cuando son iguales y contrarias

3° - Transmisibilidad

Cuerpo: conjunto de partículas vinculadas entre sí (cohesión).

Cuerpos → Deformables (reales)

Cuerpos → Indeformables (no reales)

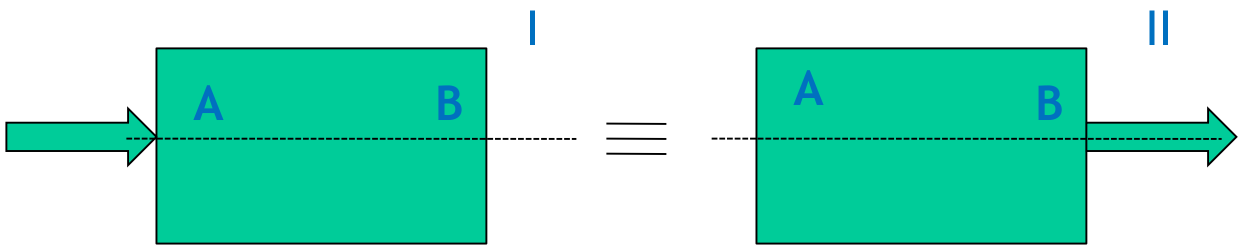
<u>Cuerpos rígidos e indeformables</u>

➡ Distancia entre 2 puntos del cuerpo se mantiene invariable ante la acción de fuerzas exteriores

Linealidad geométrica (pequeños desplazamientos)

3° - Transmisibilidad

<u>Efecto estático global</u>: (EEG) de una fuerza sobre un cuerpo rígido es independiente de cual sea el punto de aplicación de la fuerza sobre dicho cuerpo, siempre que se mantenga la recta de acción.



Corolario:

EEG nulo (equilibrio)

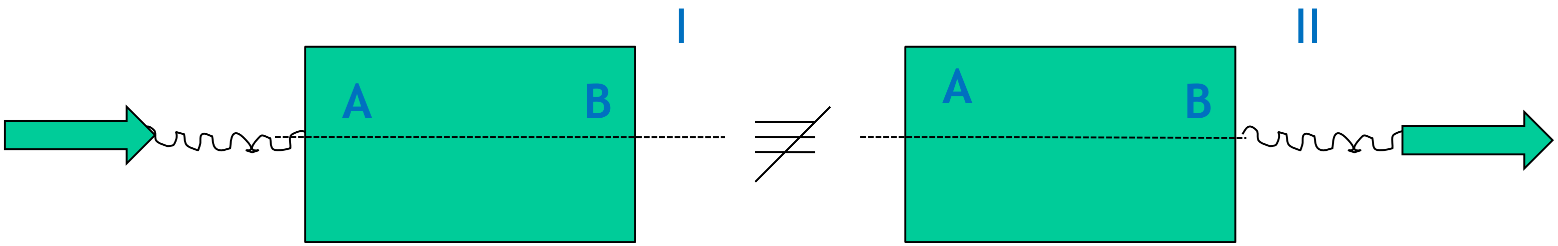
El EEG de dos fuerzas iguales y de sentido opuesto actuando sobre un cuerpo es nulo ("equilibrio global").

Nota: no todos los efectos son nulos (ejemplo con resorte).

3° - Transmisibilidad

Efecto estático global:

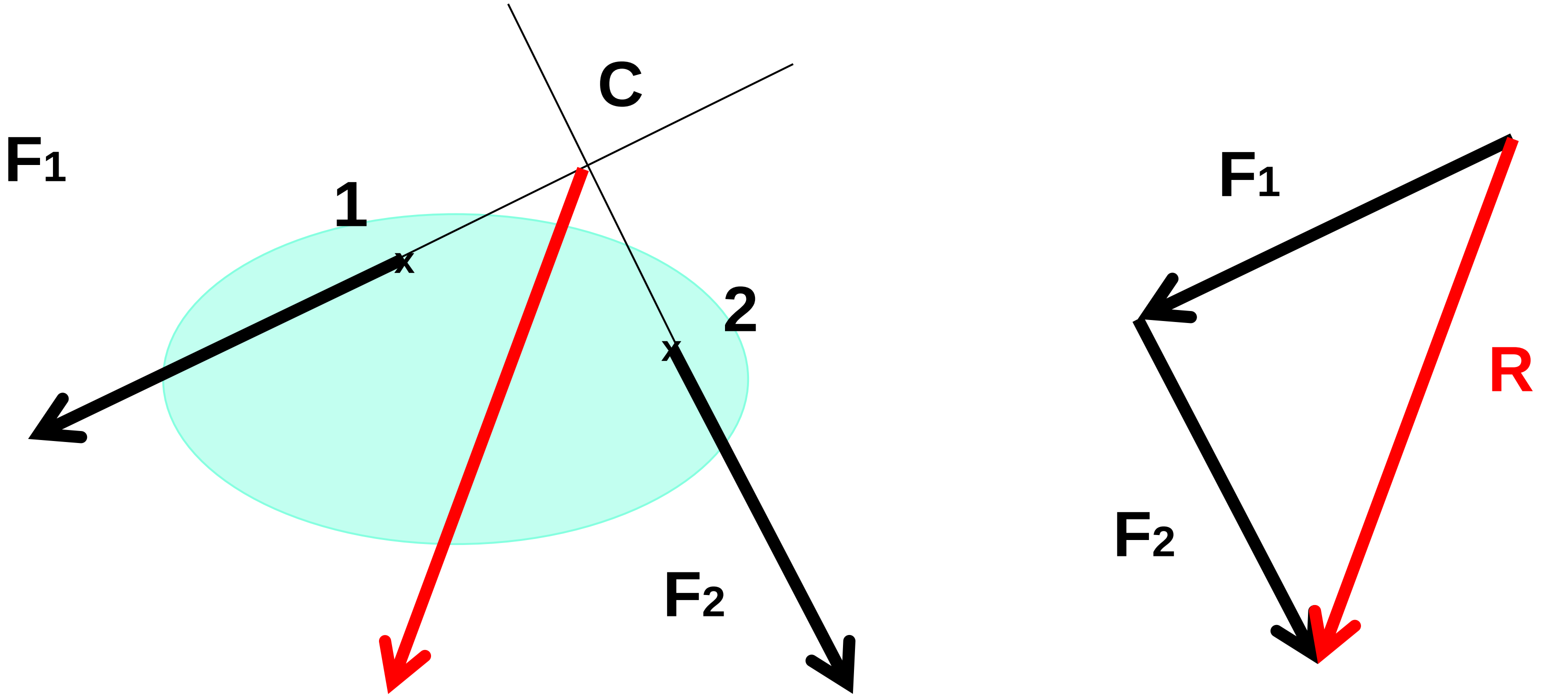
El EEG de dos fuerzas iguales y de sentido opuesto actuando sobre un cuerpo es nulo ("equilibrio global").



Nota: Sin embargo, si el sistema no es perfectamente rígido, no todos los efectos son nulos.

3° - Transmisibilidad

a. Resultante de Fuerzas coplanares no paralelas



F1 y F2: fuerzas aplicadas a un cuerpo

C: punto intersección de las rectas de acción de esas fuerzas

Nota: C puede incluso ser un punto que no tenga existencia material

Agenda

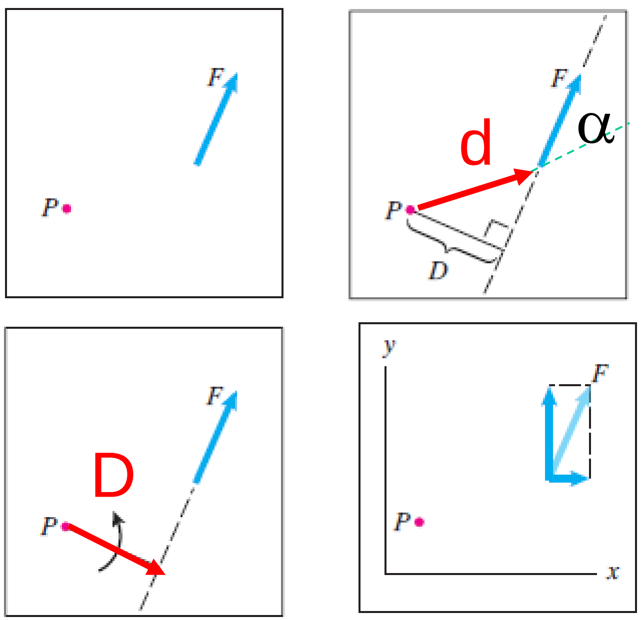
1. Momento de una fuerza respecto de un punto. Representación.
2. Par de fuerzas.
3. Teorema de Varignon.
4. Traslación de fuerzas
    - Descomposición de una fuerza en una fuerza y un par.
    - Composición de una fuerza y un par.
5. Momento de una fuerza respecto de un eje
6. Reducción de un sistema de fuerzas generalizadas.

1. Momento de una fuerza respecto de un punto

El momento de una fuerza respecto a un punto ó eje proporciona una medida de la tendencia de la fuerza a ocasionar que un cuerpo gire alrededor del punto ó eje. (ref: Russel C. Hibbeler)

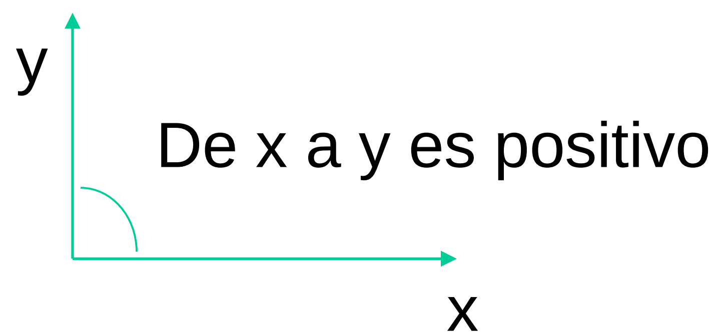
1. Momento de una fuerza respecto de un punto

- $M_{O,F}$: momento de la fuerza F respecto punto O
- d: distancia de un punto de la línea de acción de la fuerza al punto
- D:es la menor distancia desde el punto O a la línea de acción de la fuerza
- El <u>Vector</u> Momento resultante es perpendicular al plano formado por los vectores d y F

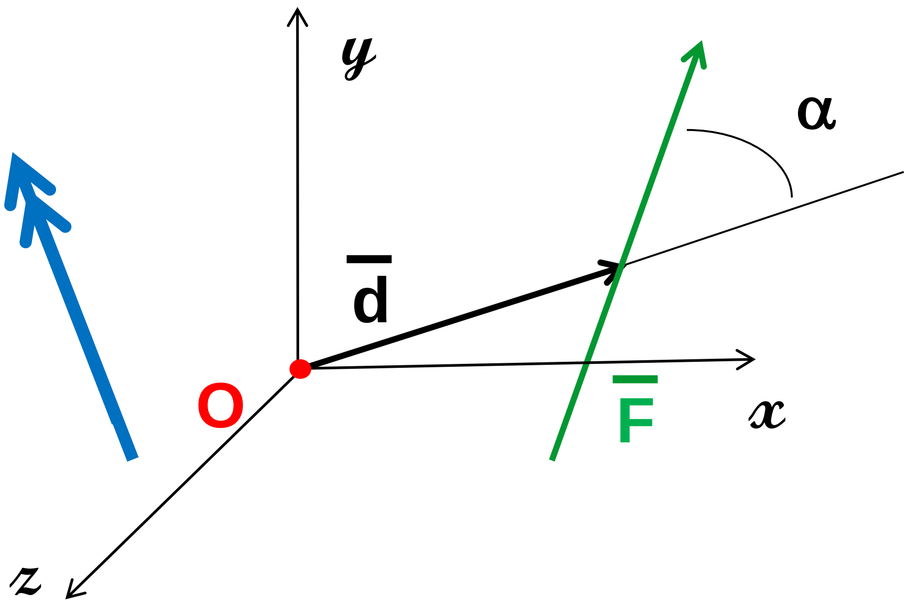


$$M_{O,F} = \mathbf{d x F}$$

$$|\,M_{O,F}\,| = |d|\,|F| \text{ sen } \alpha = D.F$$



1. Momento de una fuerza respecto de un punto O

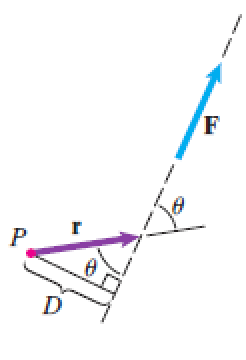


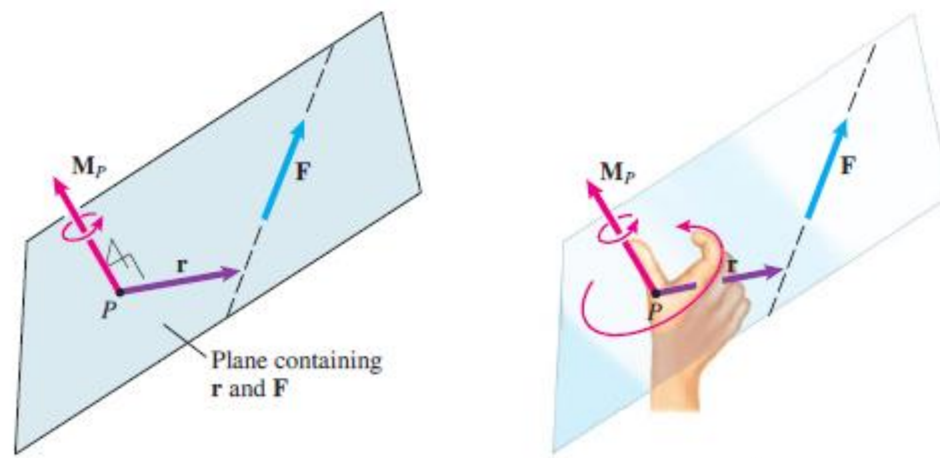
$$\overline{M}_F^O = \overline{d} \times \overline{F} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ dx & d_y & d_z \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} = (F_z d_y - F_y d_z)\,\hat{i} + (F_x d_z - F_z d_x)\,\hat{j} + (F_y d_x - F_x d_y)\,\hat{k}$$

1. Momento de una fuerza respecto de un punto

El producto vectorial no es conmutativo, por definición siempre **M** = **r** x **F** y no al revés!!

Siendo r el vector que va desde el centro de momentos a la recta de acción de la fuerza.

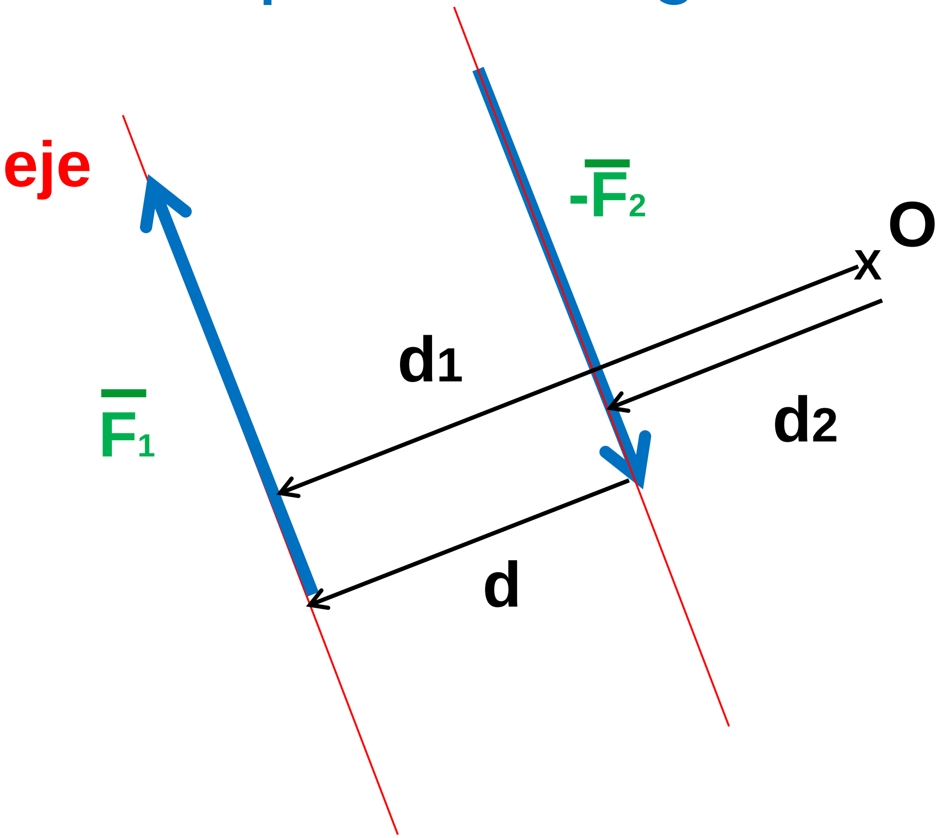




(a) (b)

2. Par de fuerzas ó cupla

(2 fuerzas paralelas de igual intensidad y sentido contrario)



$$\overline{d}=\overline{d}_1-\overline{d}_2$$

$$\overline{F}_1=-\overline{F}_2=\overline{F}$$

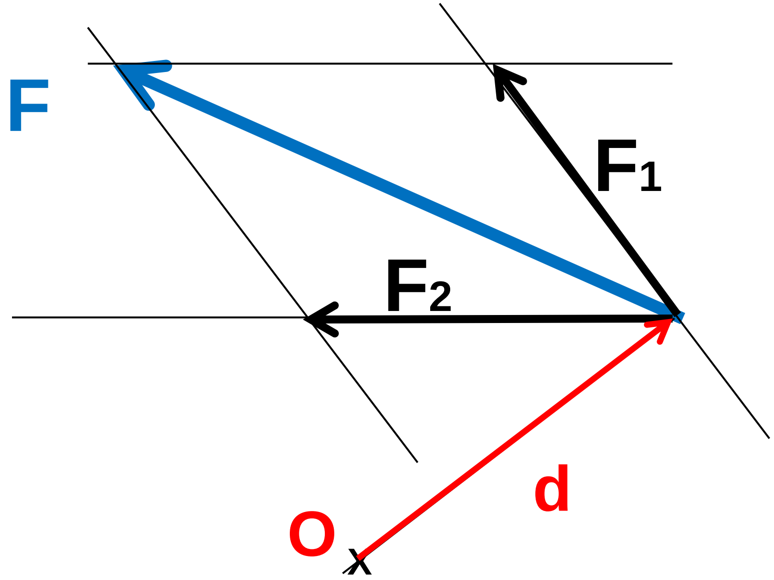
$$\overline{M}_{O,F} = (\overline{d}_1-\overline{d}_2)x\overline{F}$$

$$\overline{M}_{O,F} = \overline{d}x\overline{F}$$

3. Teorema de Varignon (ó principio de momentos).

El momento de una fuerza respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de las componentes de la fuerza respecto al punto.

(Varignon: 1654-1722; ref: Russel C. Hibbeler)



$$\overline{M}_{O,F} = \overline{d} \times \overline{F}_1 + \overline{d} \times \overline{F}_2$$

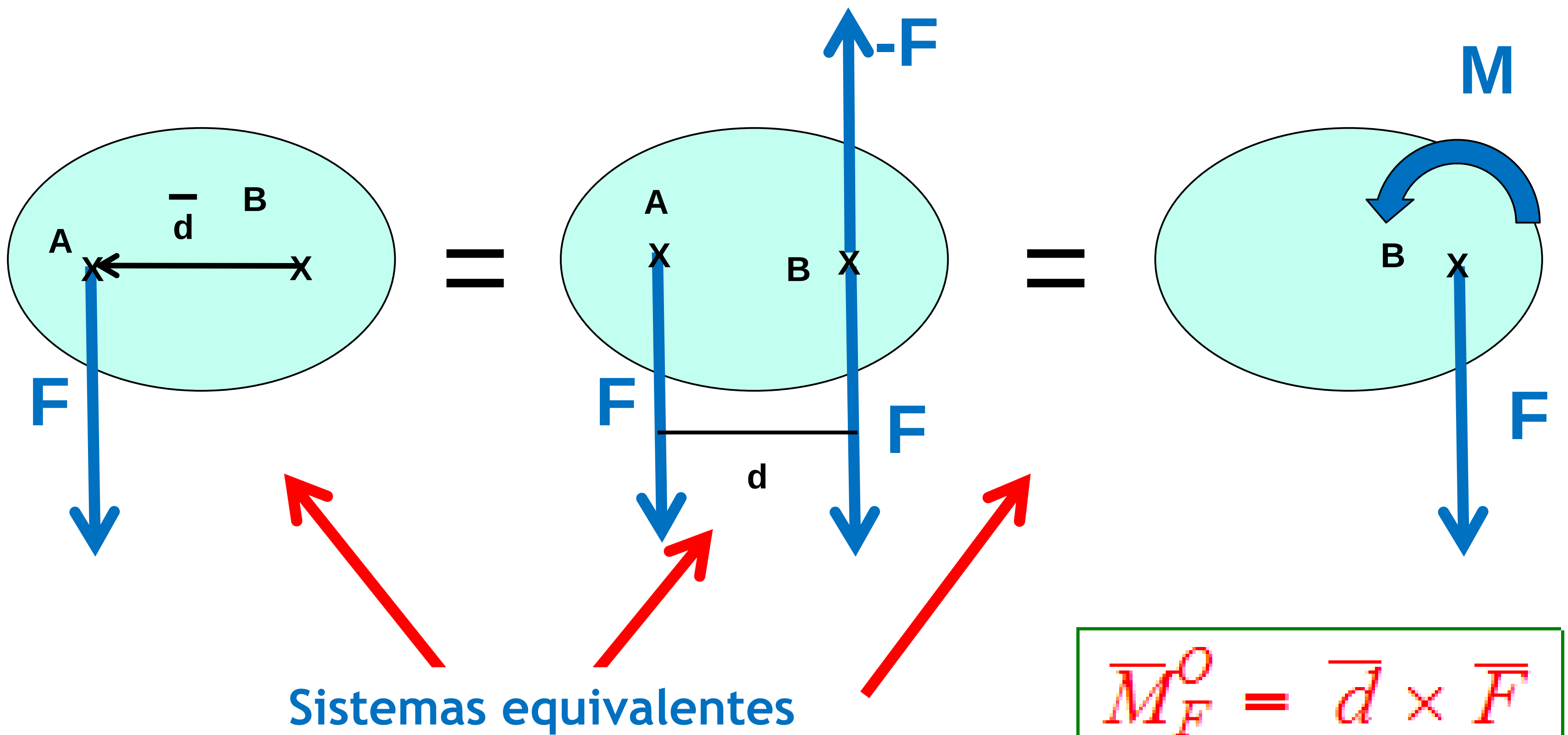
$$\overline{M}_{O,F} = \overline{d} \times (\overline{F}_1 + \overline{F}_2)$$

$$\overline{M}_{O,F} = \overline{d} \times \overline{F}$$

Aplicación, por ejemplo, para obtener resultante de un sistema de fuerzas paralelas

4. TRASLACIÓN DE FUERZAS

4. Descomposición de una fuerza en una fuerza y un par.

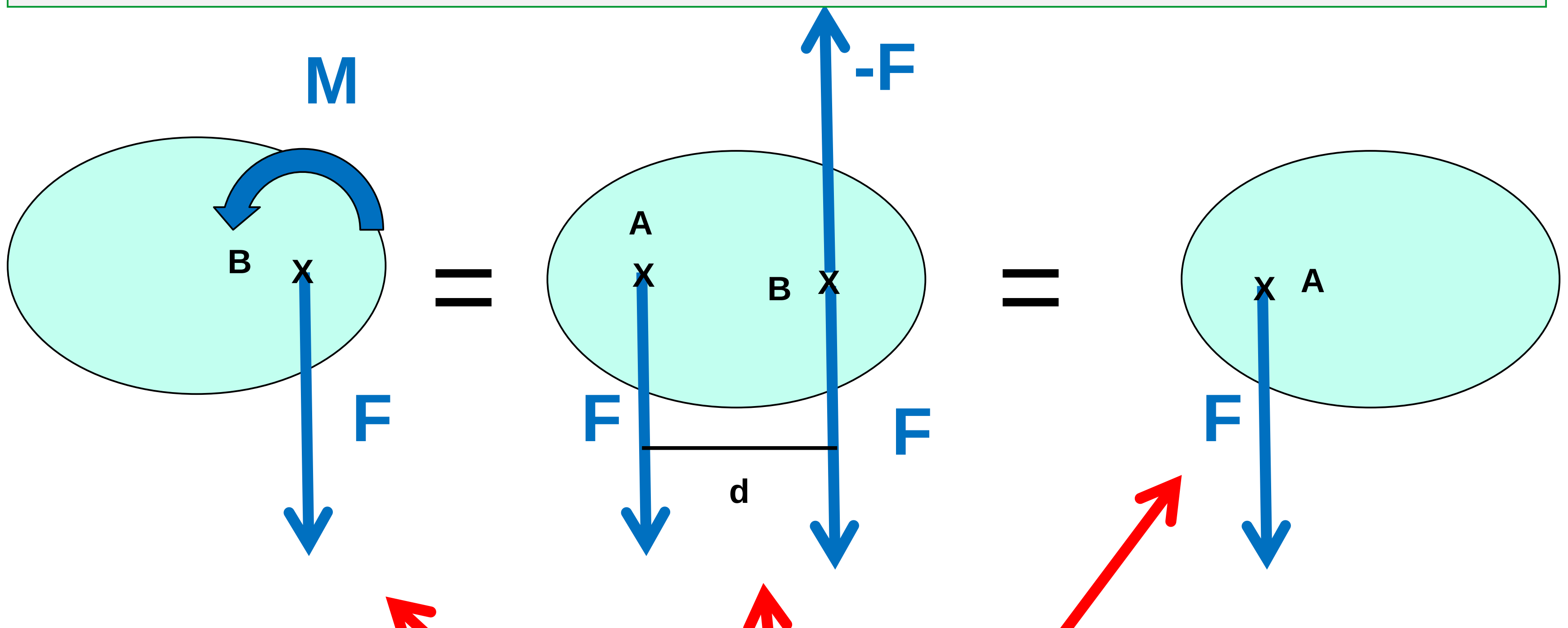


$$\boxed{\overline{M}_F^O = \overline{d} \times \overline{F}}$$

5. Composición de una fuerza y un par, sistemas planos.

De la misma manera, si los vectores M y F son perpendiculares,

puedo componer fuerza y par (resulta una traslación de la fuerza en d=M/F).



Sistemas equivalentes

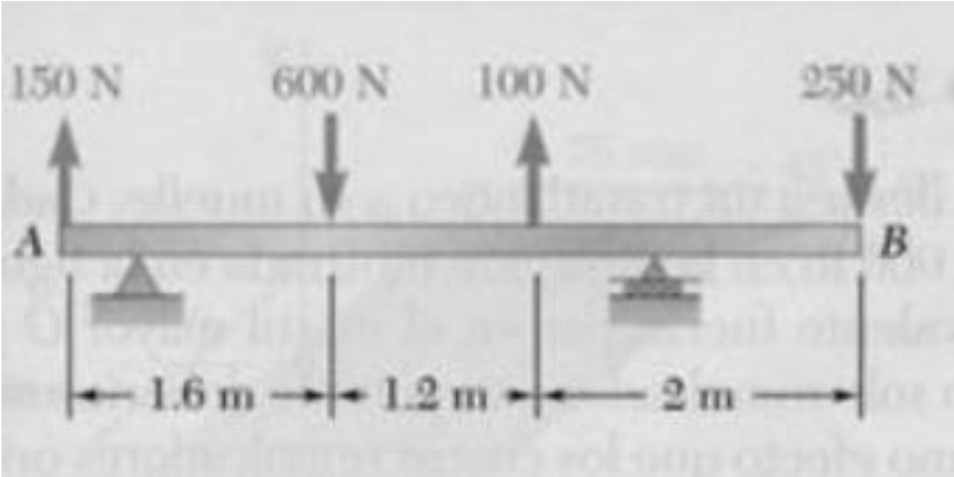
$$\overline{M}_F^O = \overline{d} \times \overline{F}$$

5. Ejercicio

PROBLEMA RESUELTO 3.8

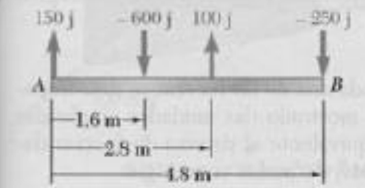
Una viga de 4.80 m de longitud está sujeta a las fuerzas mostradas en la figura. Redúzcase el sistema de fuerzas dado a: *a*) un sistema equivalente fuerza-par en A, *b*) un sistema equivalente fuerza-par en *B* y *c*) una sola fuerza o resultante.

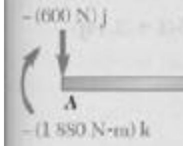
Nota: Como las reacciones en los apoyos no están incluidas en el sistema de fuerzas dado, el sistema no mantendrá la viga en equilibrio.

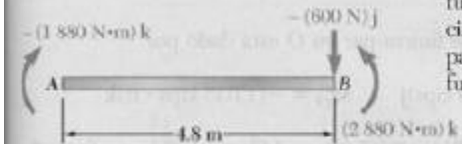


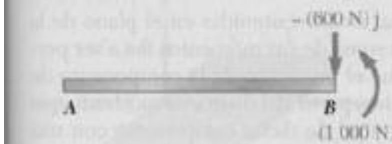
(ref: Beer, Johnston, Eisenbeg)

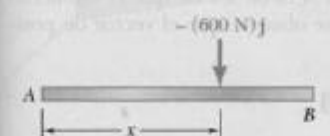
5. Ejercicio / Solución











SOLUCIÓN

a) **Sistema fuerza-par en** *A*. El sistema fuerza-par en *A* equivalente al sistema de fuerzas dado consta de una fuerza **R** y de un par $\mathbf{M}_A^R$ definidos como sigue:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \Sigma\mathbf{F} \\
&= (150\text{ N})\mathbf{j} - (600\text{ N})\mathbf{j} + (100\text{ N})\mathbf{j} - (250\text{ N})\mathbf{j} = -(600\text{ N})\mathbf{j} \\
\mathbf{M}_A^R &= \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \\
&= (1.6\mathbf{i}) \times (-600\mathbf{j}) + (2.8\mathbf{i}) \times (100\mathbf{j}) + (4.8\mathbf{i}) \times (-250\mathbf{j}) \\
&= -(1\,880\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

Por tanto, el sistema equivalente fuerza-par en *A* está dado por

$$\mathbf{R} = 600\text{ N}\downarrow \qquad \mathbf{M}_A^R = 1\,880\text{ N}\cdot\text{m}\ \circlearrowright \quad \blacktriangleleft$$

b) **Sistema fuerza-par en** *B*. Se pretende encontrar un sistema fuerza par en *B* equivalente al sistema fuerza-par en *A* determinado en el inciso *a*). La fuerza **R** permanece inalterada, pero se debe determinar un nuevo par $\mathbf{M}_B^R$ cuyo momento sea igual al momento con respecto a *B* del sistema fuerza-par encontrado en el inciso *a*). Por tanto, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}_B^R &= \mathbf{M}_A^R + \overrightarrow{BA} \times \mathbf{R} \\
&= -(1\,880\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} + (-4.8\text{ m})\mathbf{i} \times (-600\text{ N})\mathbf{j} \\
&= -(1\,880\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} + (2\,880\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} = +(1\,000\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

De esta forma, el sistema fuerza-par en *B* está dado por

$$\mathbf{R} = 600\text{ N}\downarrow \qquad \mathbf{M}_B^R = 1\,000\text{ N}\cdot\text{m}\ \circlearrowleft \quad \blacktriangleleft$$

c) **Fuerza única o resultante.** La resultante del sistema de fuerzas dado es igual a **R** y su punto de aplicación debe ser tal que el momento de **R** con respecto a *A* sea igual a $\mathbf{M}_A^R$. El cual se escribe

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} \times \mathbf{R} &= \mathbf{M}_A^R \\
x\mathbf{i} \times (-600\text{ N})\mathbf{j} &= -(1\,880\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} \\
-x(600\text{ N})\mathbf{k} &= -(1\,880\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

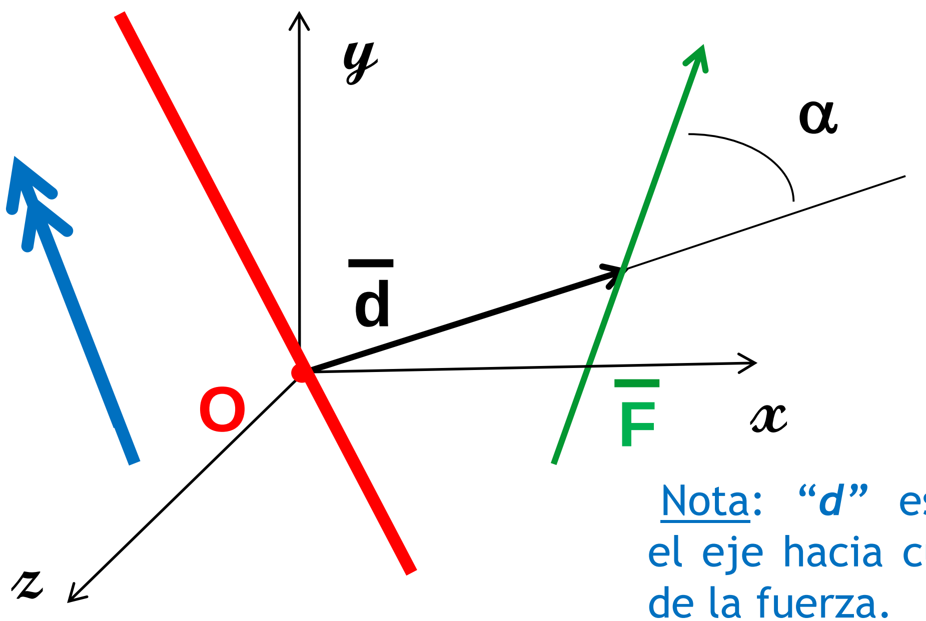
y se concluye que $x = 3.13$ m. Por tanto, la fuerza única equivalente al sistema dado está definida como

$$\mathbf{R} = 600\text{ N}\downarrow \qquad x = 3.13\text{ m} \quad \blacktriangleleft$$

(ref: Beer, Johnston, Eisenbeg)

6. Momento de una fuerza respecto de un eje

El momento de una fuerza respecto de un eje es igual a la proyección sobre dicho eje del momento de la misma fuerza respecto de un punto cualquiera del eje.



$$\overline{M}_F^O = \overline{d} \times \overline{F}$$

$$M_F^e = (\overline{d} \times \overline{F}) \cdot \overline{e}$$

Nota: *"d"* está dirigido desde cualquier punto sobre el eje hacia cualquier punto sobre la línea de acción de la fuerza.

6. Momento de una fuerza respecto de un eje

$$M_F^e = (\overline{d} \times \overline{F}) \cdot \overline{e}$$

$$\overline{M_F^O} = \overline{d} \times \overline{F} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ dx & d_y & d_z \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} = (F_z d_y - F_y d_z)\,\hat{i} + (F_x d_z - F_z d_x)\,\hat{j} + (F_y d_x - F_x d_y)\,\hat{k}$$

$$M_{F,x}^O = F_z d_y - F_y d_z$$

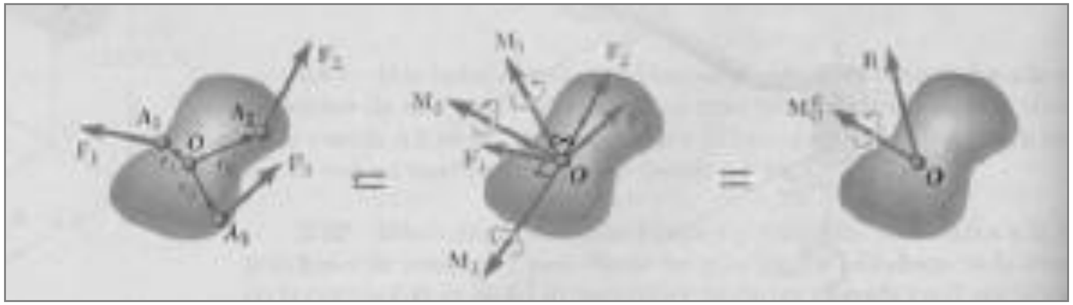
$$M_{F,y}^O = F_x d_z - F_z d_x$$

$$M_{F,z}^O = F_y d_x - F_x d_y$$

7. Reducción de un sistema de fuerzas generalizadas.

Dado un sistema de fuerzas generalizadas, reducirlo a una fuerza y un par.

Es necesario elegir un centro de momentos y una terna asociada.



6. Reducción de un sistema de fuerzas generalizadas.

Dado un sistema de fuerzas $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots$

que actúan sobre un cuerpo rígido en los puntos $A_1, A_2, A_3, \ldots$

definidos por los vectores posición $\overline{r}_1, \overline{r}_2, \overline{r}_3, \ldots$

el sistema equivalente fuerza-par queda definido por las ecuaciones:

$$\boxed{\begin{array}{l} \overline{R} = \sum_i \overline{F}_i \\ \overline{M}_O^R = \sum_i \overline{M}_{O,i} = \sum_i (\overline{r}_i \times \overline{F}_i) \end{array}}$$

(ref: Beer, Johnston, Eisenbeg, 3.17)

Agenda

1. Invariantes en los Sistemas de fuerzas.
2. Reducción de sistema de fuerzas: simplificación a una única fuerza resultante (caso particular)
3. Todo sistema puede ser reducido a una fuerza y un par coaxial.
4. Sistemas de fuerzas equivalentes
5. Equilibrio de un sistema de fuerzas
6. Descomposición de una fuerza en 6 componentes no concurrentes en el espacio.

1. Invariantes en los Sistemas de fuerzas.

1.a Invariante vectorial $\Rightarrow$ $\bar{R}$

Si cambia el centro de reducción, <u>la resultante de reducción no varía</u>, pero sí el par de reducción.

1. Invariantes en los Sistemas de fuerzas.

1.b Invariante escalar

$$M_R^* = \frac{\overline{R}}{|\overline{R}|} \cdot \overline{M}_R$$

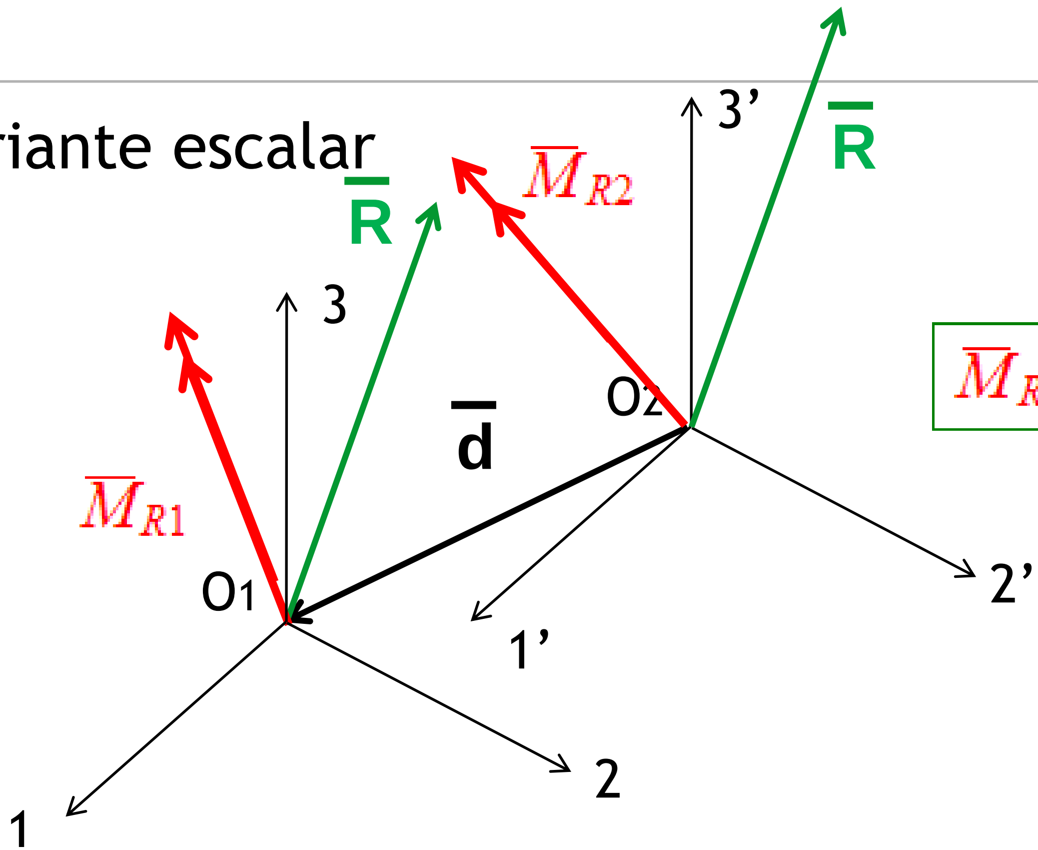
La proyección del momento de reducción sobre la resultante de reducción es un invariante escalar, es decir, no cambia aunque cambie el punto de reducción.

$$M_R^* = \frac{1}{|\overline{R}|}(R_x\ M_{R,x} + R_y\ M_{R,y} + R_z\ M_{R,z})$$

Versor (ó vector unitario) en la dirección de la resultante

$$\overline{n}_R = \frac{\overline{R}}{|\overline{R}|}$$

1.b Invariante escalar



$$\boxed{\overline{M}_{R2} = \overline{M}_{R1} + \overline{d} \times \overline{R}}$$

$$\boxed{M^{*}_{R2} = \overline{n}_R \cdot \overline{M}_{R2} = \overline{n}_R \cdot (\overline{M}_{R1} + \overline{d} \times \overline{R}) = \overline{n}_R \cdot \overline{M}_{R1} + \overline{n}_R \cdot (\overline{d} \times \overline{R})}$$

$$\boxed{\overline{n}_R \cdot \overline{d} \times \overline{R} = 0} \Rightarrow \boxed{M^{*}_{R2} = M^{*}_{R1}}$$

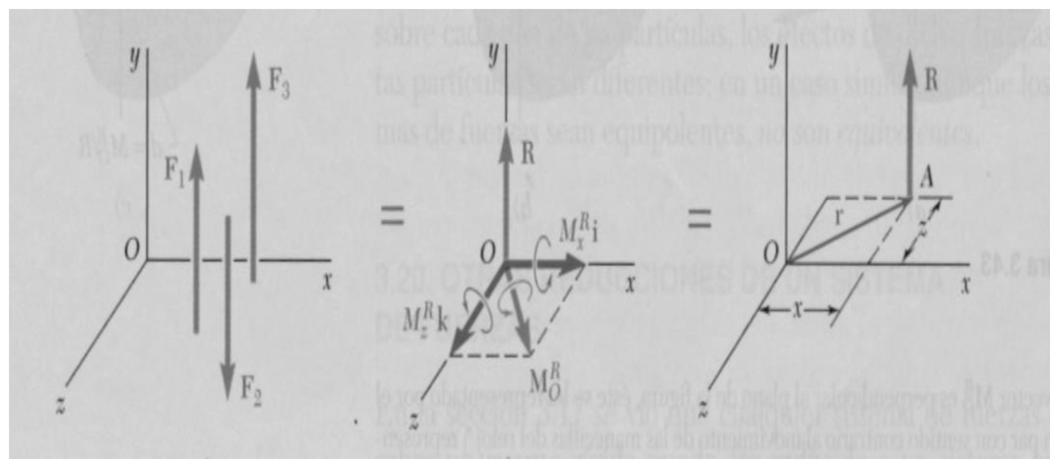
2. Reducción de sistema de fuerzas: simplificación a una única fuerza resultante (caso particular)

Si el sistema de de fuerzas y momentos que actúan sobre un cuerpo rígido se reduce en el punto O a una fuerza resultante $\overline{R}$ y a un momento resultante $\overline{M}_R$ <u>perpendiculares</u> entre sí, siempre se puede trasladar la fuerza a otro punto P, localizado sobre ó fuera del cuerpo, de manera que el par resultante sea nulo.

Ejemplos:

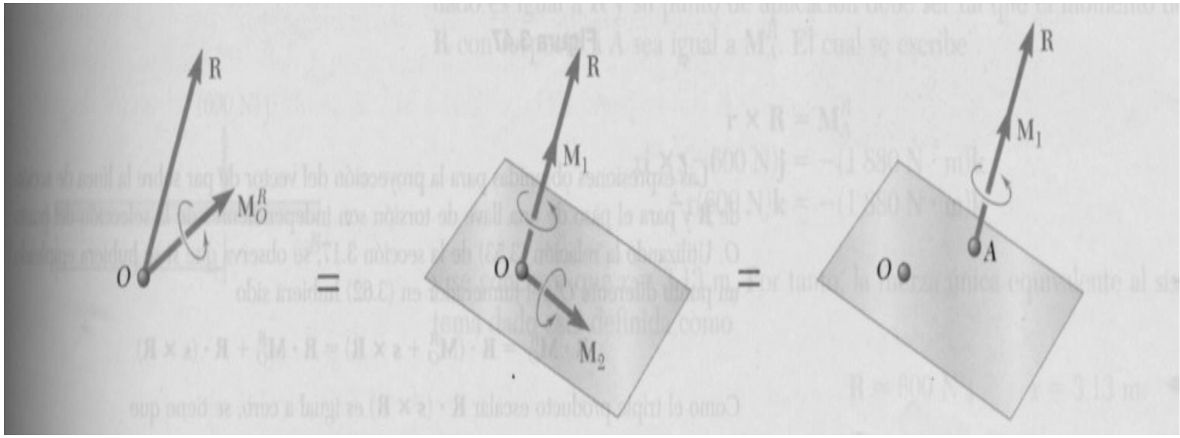
- sistema de fuerzas coplanares
- sistemas de fuerzas paralelas

(ref: Beer, Johnston, Eisenbeg)



3. Todo sistema puede ser reducido a una fuerza y un par coaxial

En el caso general, el sistema de fuerzas y momentos que actúa sobre un cuerpo se reducirá a una sola fuerza $\overline{R}$ y a un momento $\overline{M}_R$ que no serán perpendiculares entre sí. Pero el vector momento se puede descomponer en una componente perpendicular a la fuerza y en otra componente paralela. Por lo visto en 2) la componente perpendicular puede ser eliminada, trasladando la fuerza.



(ref: Beer, Johnston, Eisenbeg)

4. Sistemas de fuerzas equivalentes

Dos sistemas de fuerzas que actúan sobre un <u>mismo cuerpo rígido</u>, son equivalentes si pueden ser reducidos al mismo sistema fuerza-par en un punto dado O.

Dos sistemas 1 y 2 son equivalentes si las de las fuerzas son iguales

$$(\Sigma \mathbf{F})_1 = (\Sigma \mathbf{F})_2,$$

Y las suma de los momentos respecto a un punto arbitrario elegido también.

$$(\Sigma \mathbf{M}_P)_1 = (\Sigma \mathbf{M}_P)_2.$$

2° Principio de la Estática:

Equilibrio de un sistema de fuerzas

5. Equilibrio de un sistema de fuerzas

$$\boxed{\overline{R} = \sum_i \overline{F}_i = \overline{0}}$$

$$\boxed{\overline{M}_R^O = \sum_i \overline{M}_{F_i}^O = \overline{0}}$$

2 ecuaciones vectoriales de nulidad

6 ecuaciones algebraicas de nulidad

Equilibrio de un sistema de fuerzas

Equilibrio de Sistema de fuerzas concurrentes en el espacio

Un sistema de fuerzas concurrentes en el espacio esta en equilibrio cuando:

$$\Sigma \mathbf{F} = (\Sigma F_x)\mathbf{i} + (\Sigma F_y)\mathbf{j} + (\Sigma F_z)\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

$$\Sigma F_x = 0, \quad \Sigma F_y = 0, \quad \Sigma F_z = 0.$$

La suma de las componentes en x, y y en z de las fuerzas externas vale cero.

1 ecuación vectorial de nulidad

3 ecuaciones algebraicas de nulidad

(1° Ley de Newton)

5.1 Equilibrio de un sistema de fuerzas no concurrentes en el plano

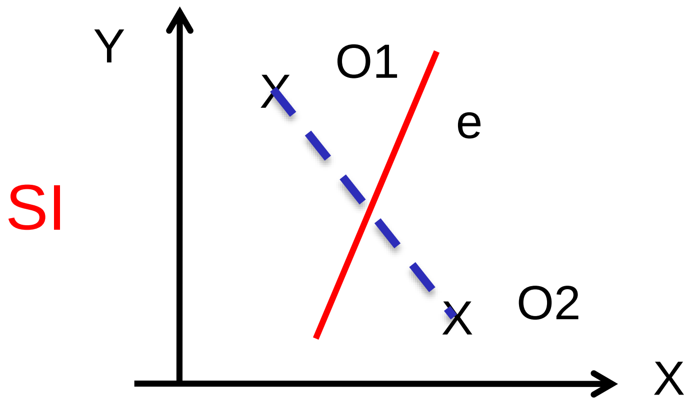
5.1.1) 2 ecuaciones de proyección sobre 2 ejes no coincidentes ni paralelos y una ecuación de momentos respecto a un punto cualquiera del plano, nulas

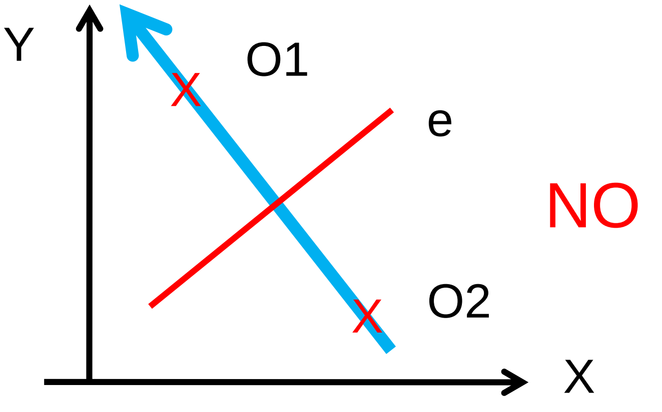
$$\boxed{\overline{M}_R^O = \sum_i \overline{M}_{F_i}^O = \overline{0}}$$

$$\boxed{\overline{R} = \sum_i \overline{F}_i = \overline{0}}$$

5.1 Equilibrio de un sistema de fuerzas no concurrentes en el plano

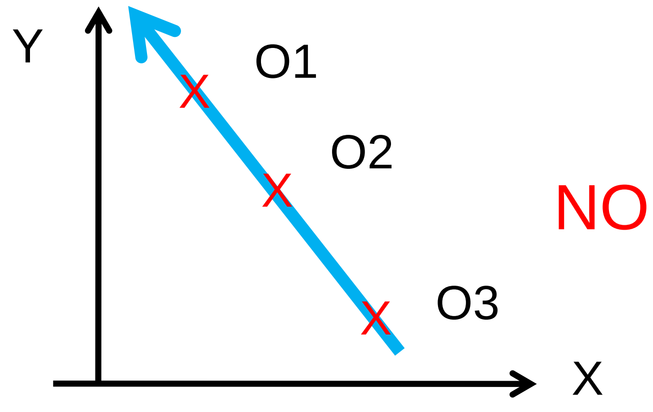
5.1.2) 2 ecuaciones de momento respecto a 2 puntos cualesquiera del plano, O1 y O2, y 1 ecuación de proyección sobre un eje, nulas, siempre que este último no sea normal a la recta definida por los centros de momentos O1 - O2





5.1 Equilibrio de un sistema de fuerzas no concurrentes en el plano

5.1.3) 3 ecuaciones de momentos, respecto de 3 puntos no alineados, nulas



5.2 Equilibrio de un sistema de fuerzas no concurrentes en el espacio

6 ecuaciones algebraicas de nulidad

5.2 Equilibrio de un sistema de fuerzas no concurrentes en el espacio

5.2.1) 3 ecuaciones de proyección sobre 3 ejes, y los momentos del sistema respecto de los mismos ejes, nulos.

$$\boxed{\overline{M}_R^O = \sum_i \overline{M}_{F_i}^O = \overline{0}}$$

$$\boxed{\overline{R} = \sum_i \overline{F}_i = \overline{0}}$$

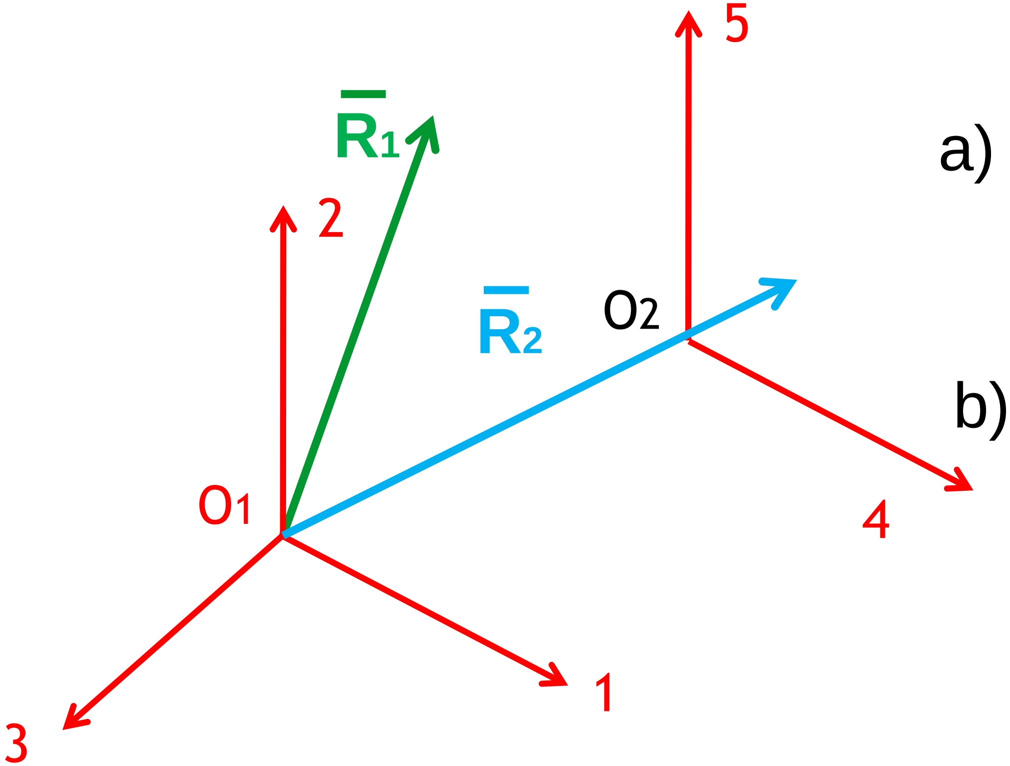
5.2 Equilibrio de un sistema de fuerzas no concurrentes en el espacio

5.2.2) 2 ecuaciones de proyección sobre 2 ejes y 4 de momentos sobre 4 ejes, nulas

5.2.3) 1 ecuación de proyección sobre un eje y 5 de momentos respecto de 5 ejes, nulas

5.2 Equilibrio de un sistema de fuerzas no concurrentes en el espacio

5.2.4) 6 ecuaciones de momentos sobre 6 ejes, nulas.



a)

$$M_1 = 0$$
$$M_2 = 0$$
$$M_3 = 0$$

La resultante pasa por O1 ó sistema equilibrado

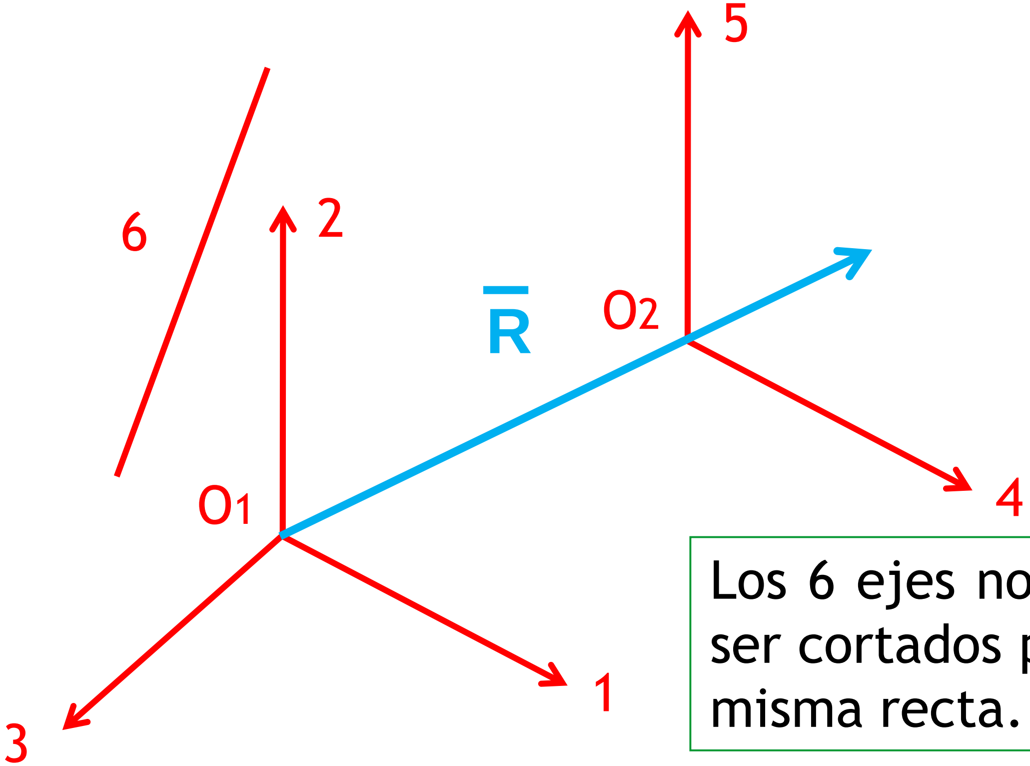
b)

$$M_1 = 0$$
$$M_2 = 0$$
$$M_3 = 0$$
$$M_4 = 0$$
$$M_5 = 0$$

La resultante pasa por O1 – O2 ó sistema equilibrado

5.2 Equilibrio de un sistema de fuerzas no concurrentes en el espacio

5.2.4) 6 ecuaciones de momentos sobre 6 ejes, nulas.



$$\left.\begin{array}{|c|}\hline M_1 = 0 \\ \hline M_2 = 0 \\ \hline M_3 = 0 \\ \hline M_4 = 0 \\ \hline M_5 = 0 \\ \hline M_6 = 0 \\ \hline \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\text{Condición necesaria de equilibrio}}$$

Los 6 ejes no deben ser cortados por una misma recta.

6. Descomposición de una fuerza en 6 componentes no concurrentes en el espacio.

6 ecuaciones con 6 incógnitas

$$\overline{R} = \sum_i \overline{F}_i$$

$$\overline{M}_O^R = \sum_i \overline{M}_{O,i} = \sum_i (\overline{r_i} \times \overline{F}_i)$$

Para que el sistema de ecuaciones sea matemáticamente determinado, las rectas de acción de las fuerzas incógnitas deben cumplir la condiciones vistas para equilibrio.

PREGUNTAS

1. ¿Qué tipo de estructuras serán analizadas en esta materia (exceptuando el tema Cables)?
2. Definir los siguientes conceptos: Fuerza, par de fuerza, cuerpo rígido, sistema lineal, linealidad geométrica.
3. ¿Cómo se define el momento de una fuerza respecto a un punto? ¿Y respecto a un eje?
4. ¿Qué significa componer un sistema de fuerzas concurrentes, sea en el plano o en el espacio? ¿Cuáles son los datos y cuáles las incógnitas a determinar?
5. ¿Qué significa descomponer una fuerza en *n* direcciones dadas? ¿Cuál es el valor de *n* si el sistema de fuerzas es espacial? ¿Y si es plano? ¿Cuáles son los datos y cuáles las incógnitas a determinar? Justificar.
6. Enunciar los principios de la estática.
7. Explicar cómo se compone una fuerza y un par.
8. Explicar cómo se descompone una fuerza en una fuerza y un par.
9. Explicar la traslación de una fuerza aplicada en un punto A a otro punto B, siendo d la distancia entre ambos.
10. Enunciar el Teorema de Varignon (o de los momentos).
11. Definir los siguientes sistemas de fuerzas: Sistema plano de fuerzas, Sistema espacial de fuerzas, Sistema de fuerzas concurrentes y Sistema de fuerzas no concurrentes.
12. ¿Qué significa que dos sistemas de fuerzas sean equivalentes?
13. ¿Qué principio de la estática establece la equivalencia entre dos sistemas de fuerzas?
14. ¿Cuál es el significado y la utilidad de reducir un sistema de fuerzas a un punto?

PREGUNTAS

17. Con respecto a la equivalencia de sistemas de fuerzas, ¿Qué cantidad de ecuaciones deben plantearse en cada caso? ¿Qué alternativas y limitaciones poseen?

18. Con respecto al equilibrio de sistemas de fuerzas, ídem pregunta anterior.

19. Una fuerza aplicada en un punto A en el espacio 3D puede descomponerse en:

- dos direcciones cualesquiera concurrentes con A,
- dos direcciones cualesquiera concurrentes con A y una recta que no pase por A,
- tres direcciones concurrentes en A,
- cuatro direcciones concurrentes con A.

Decir si estas opciones son verdaderas ó falsas. Justificar y ejemplificar.

19. Definir una cupla. Dada una cupla, su momento respecto de un punto C es M. Si un segundo punto D está a una distancia “d” de C, como varía el momento de la cupla?

20. Sistemas de fuerzas en el espacio: es siempre posible reducir el sistema a una única fuerza y par colineal. En qué casos es posible reducir el sistema a una única fuerza?

22. Sistemas de fuerzas: definir invariantes.