Episodio 3.

Independencia Lineal y Bases

Álgebra Lineal
mfiuba@gmail.com

Departamento de Matemática
FIUBA

24 de septiembre de 2020

Concepto de dependencia e independencia lineal

Terminamos el video anterior con un ejemplo en $\mathbb{R}^2$, mostrando, graficamente, que podía encontrar un conjunto generador de $\mathbb{R}^2$ de dos elementos y también podía encontrar un conjunto generador de $\mathbb{R}^2$ de más elementos. Concretamente :

- $\mathbb{R}^2 = \text{gen}\left\{(1\ 1)^T,\ (0\ 1)^T\right\}$
- $\mathbb{R}^2 = \text{gen}\left\{(1\ 1)^T,\ (0\ 1)^T,\ (2\ 3)^T\right\}$

Vamos a demostrar analíticamente que estas dos afirmaciones son verdaderas.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

- $\mathbb{R}^2 = \text{gen}\left\{(1\ 1)^T,\ (0\ 1)^T\right\}$ En principio si queremos demostrar una igualdad entre conjuntos, tal como vimos, tenemos que demostrar una doble inclusión, pero ya sabemos que el conjunto gen $\left\{(1\ 1)^T,\ (0\ 1)^T\right\} \subset \mathbb{R}^2$, pues sus vectores son elementos de $\mathbb{R}^2$ (esto lo demostramos en la clase anterior).Así que para demostrar la igualdad sólo debo demostrar que todo elemento de $\mathbb{R}^2$ es combinación lineal de los vectores $(1\ 1)^T$ y $(0\ 1)^T$ Entonces: Sea $X \in \mathbb{R}^2$ estudiemos si existen $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ tal que:
  $X = (x_1\ x_2)^T = \alpha(1\ 1)^T + \beta(0\ 1)^T \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow X = (x_1\ x_2)^T = (\alpha\ \ \alpha + \beta)^T$
  $$\left\{\begin{array}{lccc} \alpha & & = & x_1 \\ \alpha + & \beta & = & x_2 \end{array}\right. \Rightarrow \alpha = x_1 \text{ y } \beta = (x_2 - x_1)$$
  El sistema **lineal** tiene solución única. Para cualquier valor del vector X puedo encontrar únicos escalares para *descomponerlo* como una combinación lineal de los vectores $(1\ 1)^T$ y $(0\ 1)^T$. Así que $\mathbb{R}^2 \subset \text{gen}\left\{(1\ 1)^T,\ (0\ 1)^T\right\}$.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Entonces el conjunto dado, genera $\mathbb{R}^2$ y notemos que, en este caso (en la que no *sobran* vectores) la solución del sistema es **única**.
Veamos el otro ejemplo:

- $\mathbb{R}^2 = \text{gen}\left\{(1\ 1)^T,\ (0\ 1)^T,\ (2\ 3)^T\right\}$.
  Otra vez, ya sabemos que
  $\text{gen}\left\{(1\ 1)^T,\ (0\ 1)^T,\ (2\ 3)^T\right\} \subset \mathbb{R}^2$. Tomemos un elemento genérico $X \in \mathbb{R}^2$ y planteamos:
  $X = (x_1\ x_2)^T = \alpha\,(1\ 1)^T + \beta\,(0\ 1)^T + \gamma\,(2\ 3)^T$
  $(x_1\ x_2) = (\alpha + 2\gamma\ \alpha + \beta + 3\gamma)^T$
  $$\left\{\begin{array}{cccc} \alpha & + & 2\gamma & = & x_1 \\ \alpha+ & \beta+ & 3\gamma & = & x_2 \end{array}\right.$$
  Planteamos la matriz:
  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x_1 \\ 1 & 1 & 3 & x_2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_2 - x_1 \end{array}\right)\ S.C.I$$

Entonces, el sistema tiene **infinitas soluciones**.
Como es compatible, afirmamos como en el caso anterior :

$$\mathbb{R}^2 \subset \text{gen}\left\{(1\ 1)^T,\ (0\ 1)^T,\ (2\ 3)^T\right\}$$

$$\mathbb{R}^2 = \text{gen}\left\{(1\ 1)^T,\ (0\ 1)^T,\ (2\ 3)^T\right\}.$$

La diferencia, en cuanto a la resolución del sistema lineal planteado, con el caso anterior entonces, es que el sistema no tiene solución única cuando busco escribir cada elemento de $\mathbb{R}^2$ como combinación lineal de los vectores del conjunto.

Entonces, resumamos para este caso tan simple qué encontramos:

$$\mathbb{R}^2 = \text{gen}\left\{(1\ 1)^T,\ (0\ 1)^T\right\}$$

$$\mathbb{R}^2 = \text{gen}\left\{(1\ 1)^T,\ (0\ 1)^T,\ (2\ 3)^T\right\}$$

- En el segundo conjunto, como los dos primeros vectores sirven para generar $\mathbb{R}^2$, en particular el vector $(2\ 3)^T$ es combinación lineal de los anteriores.
- Como vimos en la resolución de los sistemas, cuando tengo una cantidad mínima de generadores la combinación lineal para escribir cada elemento de $\mathbb{R}^2$ tiene única solución y en el otro caso no.

Dependencia e independencia lineal

Definición: Se dice que un conjunto de dos o más vectores, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{V} - \mathbb{K}$ espacio vecorial, es linealmente dependiente (l.d.) si alguno de sus elementos es combinación lineal de los demás.Si el conjunto está formado por un único vector, v_1, se dice que es linealmente dependiente sólo si $v_1 = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$
Cuando esto no sucede, se dice que el conjunto es linealmente independiente.

Definición equivalente de independencia lineal

Se dice que un conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{V} - \mathbb{K}$ espacio vectorial es linealmente independiente si:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots \cdots + \lambda_n v_n = \mathbb{O}_{\mathbb{V}} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Nota: **Existe una única combinación lineal para escribir** $\mathbb{O}_{\mathbb{V}}$.

Observaciones

Vamos a listar algunas propiedades muy directas:

- Todo conjunto que contenga a $\mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ es l.d.
- Si un conjunto tiene dos elementos $\{u_1, u_2\}$ es ld $\exists k \in \mathbb{K}/u_2 = ku_1$.
- Si $\{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_k\}$ es un conjunto de vectores y u_k es combinación lineal de los demás vectores del conjunto, entonces:

$$\text{gen}\{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_k\} = \text{gen}\{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_{k-1}\}$$

Demostremos la última observación.

Otra vez tenemos que demostrar una igualdad entre conjuntos. Una de las inclusiones es obvia:

$$\text{gen}\{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_{k-1}\} \subset \text{gen}\{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_k\}\,(1)$$

Veamos entonces que, si u_k es combinación lineal de los otros vectores, se cumple la otra inclusión.
Si u_k es combinación lineal de los demás vectores del conjunto, entonces existen escalares $\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}$ tales que
$u_k = \beta_1 u_1 + ... \cdots + \beta_k - 1 u_{k-1}$. (a)
Sea $v \in \text{gen}\{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_k\}$, entonces:
$v = \lambda_1 u_1 + ... \cdots + \lambda_{k-1} u_{k-1} + \lambda_k u_k, \quad$ (b)
Pero entonces, si reemplazamos (a) en (b), obtenemos la igualdad:
$v = (\lambda_1 + \lambda_k \beta_1) u_1 + .. \cdots + (\lambda_{k-1} + \beta_{k-1}) u_{k-1}$.

Claramente se cumple : $v \in \text{gen}\{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_k\}$ Entonces probamos que:
$\text{gen}\{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_k\} \subset \text{gen}\{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_{k-1}\}$ (2)
Cuando v_k es combinacón lineal de los otros vectores.

Por (1) y (2) queda demostrado que los conjuntos son iguales.

Entonces, cuando un conjunto generador de un subespacio es **linealmente dependiente**, si sacamos algún elemento que es combinación lineal de los demás, obtenemos un nuevo conjunto que genera el mismo subespacio.

Recordemos el problema que motivó dar nuestra definición de independencia lineal.
Si un subespacio tiene un conjunto finito de generadores, queremos quedarnos con una cantidad mínima de generadores.
Por la última observación, tenemos el camino para encontrar lo que se denomina un **conjunto minimal de generadores** de un subespacio. O sea, n un conjunto de vectores que genere el subespacio pero donde no *sobren* elementos.
Para eso, al obtener un conjunto generador del subespacio tendremos que chequear si el conjunto es l.i. o no. En caso de no serlo, habrá algún vector que es combinación lineal de los demás y que podemos sacar del conjunto.

Lema de independencia lineal

Si un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ con $v_1 \neq \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$, es linealmente dependiente , siempre existe un mínimo k tal que:

- $v_k \in \text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}$
- $\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}$ es un l.i.

Comparación del cardinal de un conjunto l.i con un conjunto generador de un subespacio.

Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un conjunto l.i. en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{V}$ y $\{w_1, \ldots, w_m\}$ genera el espacio vectorial $\mathbb{V} \Rightarrow n \leq m$. Vamos a demostrar que $n \leq m$, a través de un proceso de una cantidad finita de pasos. En cada paso vamos a agregar uno de los vectores v's y sacar uno de los vectores w's.

- **Paso 1** : Tenemos que $\text{gen}\{w_1, \ldots, w_m\} = \mathbb{V} \Rightarrow \text{gen}\{v_1, w_1, \ldots, w_m\} = \mathbb{V}$ y es un conjunto l.d. pues el conjunto de m elementos, generaba $\mathbb{V}$. Existe un primer vector del conjunto que es comb. lineal de los anteriores. No puede ser v_1, pues v_1 pertenece a un conjunto l.i. $v_1 \neq \mathbb{V}$, entonces vamos a poder sacar uno de los vectores w's, supongamos que sea w_j. Con lo que quedaran:$v_1, w_1, \ldots, w_{j-1}, w_{j+1}, \ldots w_m$ (**Quedan** m **elementos, que generan el espacio vectorial.**)

- **Paso k:** Si seguimos, en el paso k, ingresamos el vector v_k, obtenemos un conjunto de $m+1$ elementos que genera $\mathbb{V}$ y es ld $\{v_1, v_2, \ldots v_k, w_1 \ldots w_m\}$, otra vez sacamos uno de los vectores w's,(pues el conjunto $v_1, \ldots, v_k$ es l.i) y obtenemos un conjunto de m elementos que genera $\mathbb{V}$.
- Este proceso es finito, termina cuando agregamos el último vector v_n al conjunto generador y sacamos uno de los vectores w's. Esto implica que por cada vector v tengo un vector w que puedo sacar.
- $n \leq m$.

Base de un espacio vectorial

Definición: Sea $\mathbb{V} - \mathbb{K}$espacio vectorial, se dice que un conjunto $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{V}$ es base de $\mathbb{V}$ si cumple:

- $\text{gen}\,\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = \mathbb{V}$
- $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es l.i.

Como ya demostramos que el número de elementos de un conjunto **linealmente independiente** es siempre **menor o igual** que el número de elementos de un conjunto que **genera** el espacio vectorial. Es inmediato demostrar que **todas** las bases de $\mathbb{V}$ tienen la cantidad de elementos.

Supongamos que $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B' = \{w_1, \ldots, w_m\}$ son dos bases de un espacio vectorial $\mathbb{V}$, vamos a demostrar que $n = m$.

- Como B genera $\mathbb{V}$ y B' es un conjunto l.i. $\Rightarrow n \geq m$ (1).
- Como B' genera $\mathbb{V}$ y B es l.i. $\Rightarrow m \geq n$ (2).
- Como se cumplen (1) y (2) $\Rightarrow n = m$.

Entonces, tiene sentido dar la siguiente definición:

Definición: Si un conjunto finito $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de un K-espacio vectorial $\mathbb{V}$ se dice que **n** es la dimensión de $\mathbb{V}$. Se nota $\dim(\mathbb{V}) = \mathbf{n}$.