Base y dimensión de un subespacio vectorial

Aplicación a ecuaciones diferenciales

Base

Definición: un subconjunto de vectores de un espacio vectorial $\mathbb{V}_K$ linealmente independiente que lo genera es una base de $\mathbb{V}_K$.

Dimensión de un subespacio

Definición: se define la dimensión de un subespacio no nulo finitamente generado como el número de elementos que posee una base cualquiera. Si no es finitamente generado se dice que es de dimensión infinita.

Observación:
Por definición, la dimensión del subespacio nulo es cero.

Ejemplo 1: $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, siendo $e_1 = (1,0,...,0), ..., (0,0,...,1)$ es base de $\mathbb{R}^n$ y también de $\mathbb{C}^n_{\mathbb{C}}$.

Ejemplo 2: $B = \{1, x, x^2, ..., x^n\}$ es la base canónica del espacio vectorial $\mathbb{R}_n[x]$.

Ejemplo 3: hallar una base y la dimensión para el subespacio $S = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(0) = p(1)\}$

Sea $p \in \mathbb{R}_2[x] : p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. De la definición del subespacio S se tiene que $a_0 = a_0 + a_1 + a_2$. Entonces $a_1 + a_2 = 0; a_2 = -a_1$ con $a_1 \in \mathbb{R}$.
Reemplazando en la expresión del polinomio resulta: $p(x) = a_0 + a_1x - a_1x^2 = a_0 + a_1(x - x^2)$
Luego, una base del subespacio S es $B = \{p_1(x) = 1, p_2(x) = x - x^2\}$ y $\dim(S) = 2$. Observar que ambos polinomios cumplen con la condición.

Observaciones:

1. Una base de un espacio vectorial $\mathbb{V}_K$ es un generador minimal de $\mathbb{V}_K$.

2. Todo subconjunto de un espacio vectorial cuyo cardinal no alcance la dimensión del espacio no es base: no puede generar este espacio porque si lo hiciera, su cardinal sería menor que el del generador minimal. Considerar por ejemplo que, siendo la $\dim(\mathbb{R}^{2\times 2}) = 4$, el subespacio $\mathbb{R}^{2\times 2}$ no puede ser generado por el conjunto $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

3. Una base de un espacio vectorial $\mathbb{V}_K$ es un conjunto linealmente independiente maximal de $\mathbb{V}_K$.

4. Todo subconjunto de un espacio vectorial cuyo cardinal supere la dimensión del espacio no es base porque es linealmente dependiente. Por ejemplo, dado que $\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$, el conjunto $C = \{1 + x, x, 1 - x^2, 1 - x\}$ es linealmente dependiente y por lo tanto no es base de $\mathbb{R}_2[x]$.

5. Cualquier subconjunto linealmente independiente de un espacio vectorial cuyo cardinal iguala a la dimensión del espacio, es una base del mismo.

Proposición: Si S es un subespacio del espacio vectorial $\mathbb{V}_K$ tal que $\dim(S) = \dim(\mathbb{V}_K)$ entonces $S = \mathbb{V}_K$.

Demostración:

(i) Si $S = \mathbb{V}_K$ es inmediato que $\dim(S) = \dim(\mathbb{V}_K)$.

(ii) Si $\dim(S) = \dim(\mathbb{V}_K) = 0$ entonces tanto S como $\mathbb{V}_K$ tienen como único elemento el $0_{\mathbb{V}_K}$: $S = \{0_{\mathbb{V}_K}\} = \mathbb{V}_K$

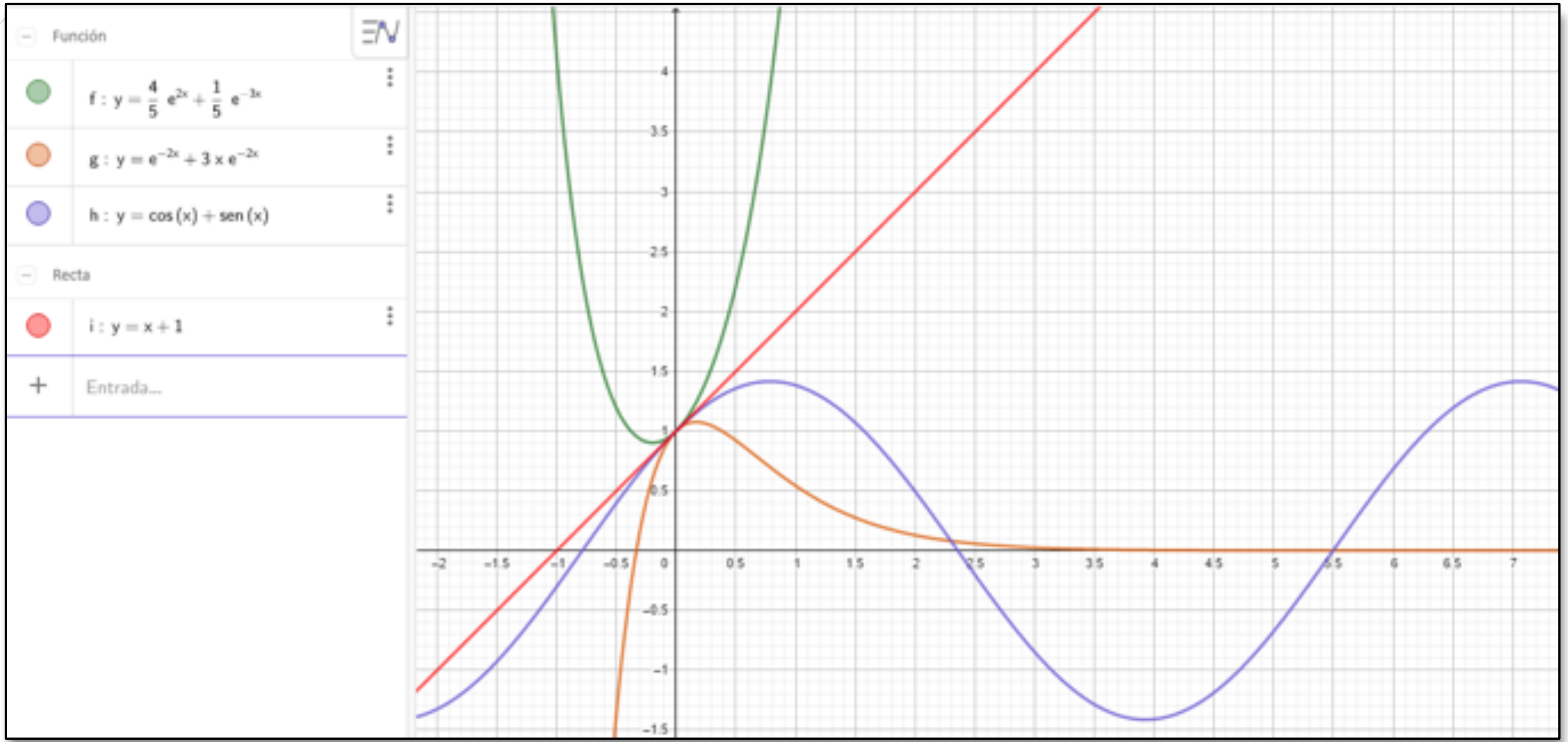
(iii) Sea $\dim(S) = \dim(\mathbb{V}_K) = n > 0$. Consideremos una base de S: $B = \{w_1, ..., w_n\}$; este conjunto está incluido en $\mathbb{V}_K$ y es linealmente independiente en $\mathbb{V}_K$; en consecuencia, es una base de $\mathbb{V}_K$. De modo que B genera $\mathbb{V}_K$, lo que indica que todo vector de $\mathbb{V}_K$ pertenece a S, es decir $V \subset S$ y como por hipótesis $S \subset V$, resulta $S = V$.

Aplicación a ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes

El espacio solución de $\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$ es un subespacio del espacio vectorial $C^\infty(\mathbb{R})$ y tiene dimensión 2.

1. Para todo $a, b \in \mathbb{R}, b \neq a$, el conjunto de funciones $\{e^{ax}, e^{bx}\}$ es una base del espacio solución de la ecuación $\frac{d^2y}{dx^2} - (a+b)\frac{dy}{dx} + ab\ y = 0$.
2. Para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto de funciones $\{e^{ax}, xe^{ax}\}$ es una base del espacio solución de la ecuación $\frac{d^2y}{dx^2} - (2a)\frac{dy}{dx} + a^2\ y = 0$.
3. Para todo $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$, el conjunto de funciones $\{e^{ax}\cos(bx), e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\}$ es una base del espacio solución de la ecuación $\frac{d^2y}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + (a^2+b^2)\ y = 0$.

El siguiente gráfico permite comparar la evolución de las soluciones para valores crecientes de la variable independiente x en los tres casos, con las mismas condiciones: $y(0) = 1$, $\dfrac{dy}{dx}(0) = 1$



Observar la recta tangente común a las tres curvas en el punto $(0, 1)$.

Ejemplo: hallar y graficar la solución $y \in C^\infty(\mathbb{R})$ de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0, y(0) = 1, \frac{dy}{dx}(0) = 1$$

Observamos que corresponde al caso 2, dado que $-2a = 6, a^2 = 9$, de modo que $a = -3$. El conjunto de funciones $\{e^{-3x}, xe^{-3x}\}$ es una base del espacio solución de la ecuación diferencial. La verificación de la independencia lineal se deja como ejercicio. Para comprobar que son soluciones calculamos las derivadas:

$$\frac{d}{dx}(e^{-3x}) = -3e^{-3x}, \quad \frac{d^2}{dx^2}(e^{-3x}) = 9e^{-3x}$$

Reemplazamos estas expresiones en la ecuación diferencial:

$$9e^{-3x} + 6.(-3e^{-3x}) + 9.e^{-3x} = 0$$

Toda solución $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es combinación lineal de las funciones $y_1(x) = e^{-3x}, y_2(x) = xe^{-3x}$:

$$y(x) = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}$$

Derivando y reemplazando en las condiciones dadas es posible hallar el valor de las constantes C_1 y C_2, resultando la solución

$$y(x) = e^{-3x} + 4xe^{-3x}$$

(más adelante veremos por qué es única).

Gráfico de la solución $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(x) = e^{-3x} + 4xe^{-3x}$ de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0, y(0) = 1, \frac{dy}{dx}(0) = 1$$