Subespacios fundamentales de una matriz

Sistemas de ecuaciones lineales

Subespacio columna de *A*: Col (*A*)

Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C})$ con columnas $A_1, A_2, ..., A_n$. Si $x \in \mathbb{K}^n$ entonces el producto de A y x, denotado por Ax es la combinación lineal de las columnas de A.

$$Ax = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n$$

Ejemplo 1: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$

Definición: $\mathrm{Col}(A)$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de la matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$.

$$\mathrm{Col}(A) = \{y \in \mathbb{K}^m : y = Ax, x \in \mathbb{K}^n\}$$

Proposición: $\mathrm{Col}(A)$ es un subespacio de $\mathbb{K}^m$.

Si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ tiene r columnas linealmente independientes, la dimensión del espacio columna es el rango de A: $\dim(Col(A)) = r = \mathrm{rango}(A)$.

Subespacio fila de *A*: Fil (*A*)

Definición: $\text{Fil}(A)$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de las filas de la matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Cada fila de A puede interpretarse como un vector de $\mathbb{K}^n$.

$$\text{Fil}(A) = \{x \in \mathbb{K}^n : x = A^T u, u \in \mathbb{K}^m\}$$

Proposición: $\text{Fil}(A)$ es un subespacio de $\mathbb{K}^n$.

$$\text{Fil}(A) = \text{Col}(A^T)$$

Observación: como el rango de A también es el número de filas linealmente independientes, resulta $\dim(\text{Fil}(A)) = \dim(\text{Col}(A))$

Ejemplo 2: Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{gen}\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}^T\}$$
$$\mathrm{Fil}(A) = \mathbb{R}^2$$

Subespacio nulo de *A*: Nul (*A*)

Definición: $\text{Nul}(A)$ es el conjunto de todas las soluciones de la ecuación $Ax = 0_{\mathbb{K}^m}$, esto es:

$$\text{Nul}(A) = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0_{\mathbb{K}^m}\}$$

Proposición: $\text{Nul}(A)$ es un subespacio de $\mathbb{K}^n$.

Teorema de las dimensiones: las dimensiones de los subespacios $\text{Col}(A)$ y $\text{Nul}(A)$ están relacionadas de la siguiente manera:

$$\dim(\text{Col}(A)) + \dim(\text{Nul}(A)) = \dim(\mathbb{K}^n)$$

en otras palabras, $\text{rango}(A) + \dim(\text{Nul}(A)) = n$ (número de columnas de A)

Ejemplo 3: Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\text{Nul}(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 & (1) \\ x_1 - x_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

De $(2) : x_2 = x_1$, reemplazando en $(1) : x_3 = -2x_1$. De este modo:

$$\text{Nul}(A)) = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}^T \right\}$$

Subespacio nulo de A^T: Nul (A^T)

Definición: $\text{Nul}(A^T)$ es el conjunto de todas las soluciones de la ecuación $A^T x = 0_{\mathbb{K}^n}$, esto es:

$$\text{Nul}(A^T) = \{x \in \mathbb{K}^m : A^T x = 0_{\mathbb{K}^n}\}$$

Proposición: $\text{Nul}(A^T)$ es un subespacio de $\mathbb{K}^m$.

Asimismo, las dimensiones de los subespacios $\text{Fil}(A)$ y $\text{Nul}(A^T)$ están relacionados por:

$$\dim(\text{Fil}(A)) + \dim(\text{Nul}(A^T)) = \dim(\mathbb{K}^m)$$

en otras palabras, $\text{rango}(A) + \dim(\text{Nul}(A^T)) = m$ (número de columnas de A^T).

Continuando con el ejemplo 3,

$$\mathrm{Nul}(A^T) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathrm{Nul}(A^T) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$$

Sistemas de ecuaciones lineales

Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}(\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ó $\mathbb{K}=\mathbb{C})$ y $x \in \mathbb{K}^n$ tal que $Ax=b$ (1)

Los subespacios $\text{Col}(A)$ y $\text{Nul}(A)$ están relacionados con el sistema de ecuaciones lineales (1).

Proposición: el sistema $Ax=b$ tiene solución si y sólo si $b \in \text{Col}(A)$.

En efecto: $Ax=b$ tiene solución $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{K}^n : x = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T$ tal que b es combinación lineal de las columnas de A, esto es, $b = x_1A_1 + \dots + x_nA_n$, donde A_i indica la i-ésima columna de la matriz $A \Leftrightarrow b \in \text{Col}(A)$, por definición de $\text{Col}(A)$.

Entonces, si $b \in \text{Col}(A)$:

1. $Ax=b$ tiene solución única $\Leftrightarrow$ las columnas de A constituyen un conjunto linealmente independiente $\Leftrightarrow \text{Nul}(A) = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$.

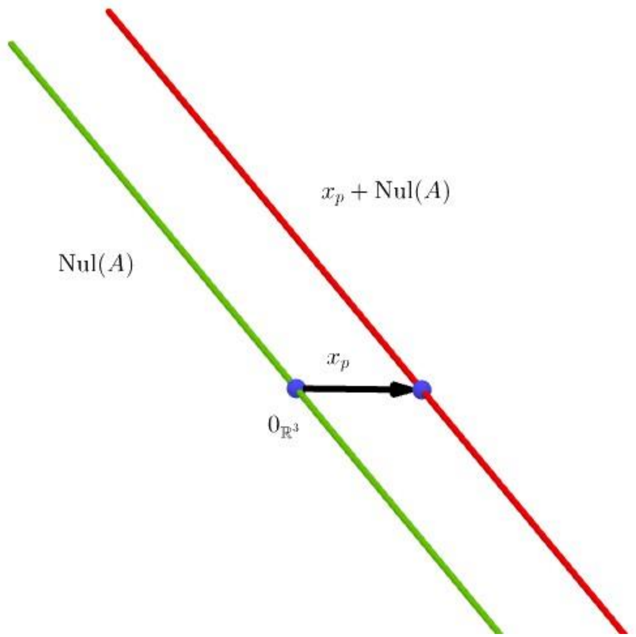
2. $Ax=b$ tiene infinitas soluciones $\Leftrightarrow$ las columnas de A forman un conjunto linealmente dependiente $\Leftrightarrow \text{Nul}(A) \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\}$.

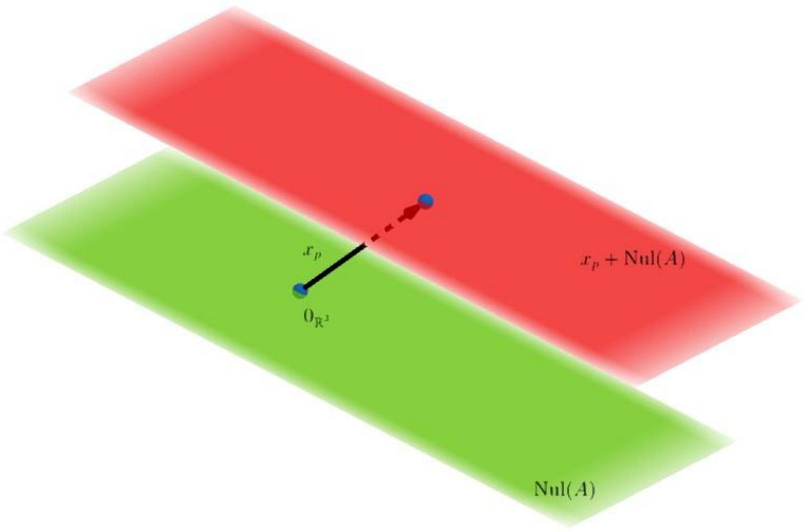
Ejemplo 4: Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. El sistema $Ax = b$ con $x \in \mathbb{R}^3$ tiene solución porque $b = A_1 + 2A_2$, siendo A_i la i-ésima columna de la matriz A. Por otra parte, el sistema tiene infinitas soluciones porque las columnas son linealmente dependientes.

Proposición: Si x_p es cualquier solución particular del sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ de modo que $Ax_p = b$ y x_h es solución del sistema homogéneo asociado $Ax = 0_{\mathbb{K}^m}$, es decir $Ax_h = 0_{\mathbb{K}^m}$, entonces todas las soluciones del sistema se expresan como $x = x_p + x_h$.

Si $\dim(\text{Nul}(A)) = k$ y $\text{Nul}(A) = \text{gen}\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ las soluciones del sistema $Ax = b$ pueden expresarse $x = x_p + c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_kv_k, c_i \in \mathbb{K}$.

Este conjunto se obtiene trasladando el $\text{Nul}(A)$ mediante el vector x_p. si $k = 1$ resulta una recta; si $k = 2$, se obtiene un plano.





En el ejemplo 4, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ es $\text{Nul}(A) = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T \right\}$, el vector $x_p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ verifica $Ax_p = b$ y el conjunto solución se puede expresar como $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T + c_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T, c_1 \in \mathbb{R} \right\}$.