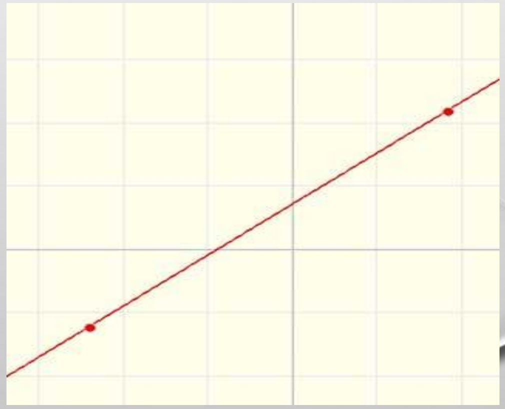
POLINOMIOS DE LAGRANGE

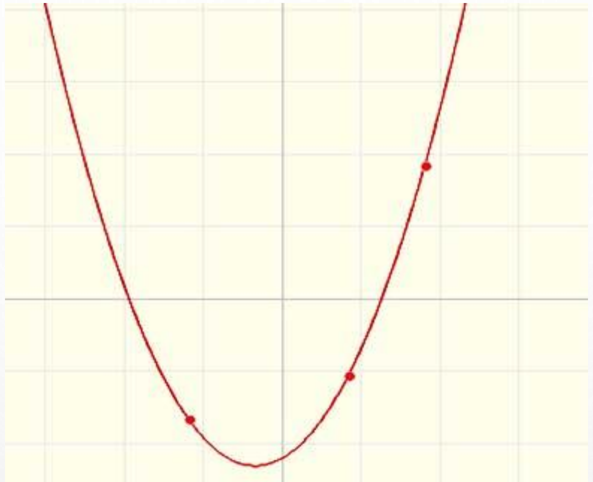
El objetivo es familiarizarnos con funciones polinómicas y relacionarlas con una de las técnicas de interpolación que llamamos polinomios de Lagrange.

Imaginemos un conjunto de puntos distintos del plano. Estos puntos tienen que tener diferente coordenada *x*, pues queremos hablar de funciones.

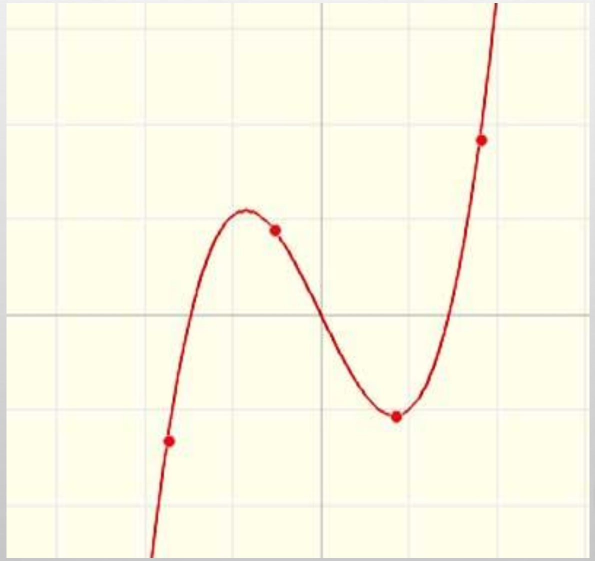
Dos puntos determinan una recta (y como función polinómica se trata de un polinomio de grado 1 o quizás 0 si la recta es horizontal y entonces la función es constante).



Tres puntos que no estén alineados determinan una parábola (polinomio de grado 2).



Cuatro puntos en general determinan una función cúbica (polinomio de grado 3).



En general, $n+1$ puntos determinarán una función polinómica de grado n. Un modo de conseguir esto es usando los polinomios de interpolación de Lagrange.

$$p_i(x) = \prod_{k \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} = \frac{x - x_1}{x_i - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_i - x_2} \cdots \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdots \frac{x - x_n}{x_i - x_n}$$

Polinomio de grado n $\qquad 1 \leq i, k \leq n+1$

Observemos que $p_i(x_i) = 1$ y $p_i(x_j) = 0 \quad (i \neq j)$

Entonces supongamos que queremos encontrar el polinomio de grado 1 que contiene a dos puntos: $(x_1, y_1); (x_2, y_2)$

Podemos escribir: $p(x) = p_1(x)y_1 + p_2(x)y_2$ contiene a ambos puntos.

Veamos un ejemplo:

Dados los puntos $(1, 2); (3,4)$, los polinomios de Lagrange resultan:

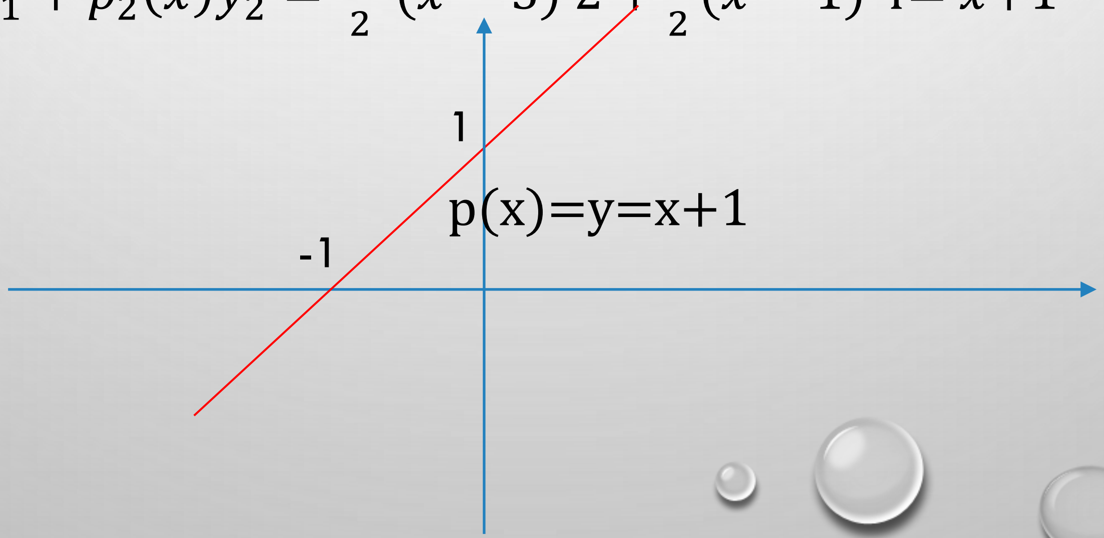
$$p_1(x) = \frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{x-3}{1-3} = \frac{-1}{2}(x-3) \quad p_2(x) = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{x-1}{3-1} = \frac{1}{2}(x-1)$$

Vemos que:

$p_1(x_1) = p_1(1) = 1$; $p_1(x_2) = p_1(3) = 0$

$p_2(x_1) = p_2(1) = 0$; $p_2(x_2) = p_2(3) = 1$

Así $p(x) = p_1(x)y_1 + p_2(x)y_2 = \frac{-1}{2}(x-3)\,2 + \frac{1}{2}(x-1)\,4 = x+1$



.

Si queremos encontrar el polinomio de grado 2 que contiene a tres puntos:

$(x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3)$

Resulta: $p(x) = p_1(x)y_1 + p_2(x)y_2 + p_3(x)y_3$

Así podemos ,en general, encontrar un polinomio de grado $n-1$ que contenga n puntos.

Con estos comentarios los invitamos a que intenten resolver el ejercicio 30 de la Práctica 1.