Seguimos con transformaciones lineales….

Definición:

Dada $f \in \mathcal{L}(V,W)$. Se llama Núcleo de la transformación lineal al conjunto

$$\boldsymbol{Nu(f) = \{x \in V: f(x) = 0_W\}}$$

Propiedades

Propiedad (1):

El $\boldsymbol{Nu(f)}$ es subespacio de $\boldsymbol{V}$

Esto se demuestra de inmediato, teniendo en cuenta que:

- $0_V \in Nu(f)$ porque para cualquier transformación lineal se cumple que $f(0_V) = 0_W$.
- Tomando $x\ e\ y \in Nu(f)$ entonces la suma $x + y \in Nu(f)$ ya que $f(x+y) = f(x) + f(y) = 0_W$.
- Por último, tomando un escalar $\alpha \epsilon K$ y un vector $x \in Nu(f)$ se verifica $f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha 0_W = 0_W$.

Propiedad (2)

Sea $f \in \mathcal{L}(V,W)$.

$\boldsymbol{f}$ es un monomorfismo $\Leftrightarrow \boldsymbol{Nu(f) = \{0_V\}}$.

Demostración:

- f es un monomorfismo $\Rightarrow Nu(f) = \{0_V\}$

1) $\{0_V\} \subseteq Nu(f)$ es inmediato ya $Nu(f)$ que es un subespacio de V

2) Para probar que $Nu(f) \subseteq \{0_V\}$ tomemos un $x \in Nu(f)$ queremos probar que $x = 0_V$

Como $x \in Nu(f)$ entonces $f(x) = 0_W$ pero también $f(0_V) = 0_W$ y siendo f un monomorfismo debe ser $x = 0_V$.

- $Nu(f) = \{0_V\} \Rightarrow f$ es un monomorfismo.

Partimos de $f(x)= f(y)$ .Como f es una transformación lineal podemos escribir $f(x) - f(y) = 0_W$ y $f(x-y) = 0_W$, de modo que $x - y \in Nu(f)$.

Siendo $Nu(f) = \{0_V\}$ y $x - y \in Nu(f)$ entonces $x = y$.

Hemos probado que:

Si $f(x)= f(y) \Rightarrow x = y$ de modo que es f inyectiva (monomorfismo).

Propiedad (3)

$Sea\ f \in L(V,W)$.
$\boldsymbol{f\ monomorfismo\ \Rightarrow}$
$\boldsymbol{(\{v_1, v_2, \dots, v_k\}\ es\ linealmente\ independiente\ \Rightarrow}$
$\boldsymbol{\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_k)\}\ es\ linealmente\ independiente\ )}$

Demostración:

Queremos probar que $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}\ es\ linealmente\ independiente\ \Rightarrow$
$\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_k)\}\ es\ linealmente\ independiente$.

Partimos entonces de $a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2) + \cdots + a_k f(v_k) = 0_W$, usando propiedades de las transformaciones lineales podemos escribir: $f(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k) = 0_W$ de modo que el vector

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k \in Nu(f)$.

Como f es monomorfismo ($Nu(f) = \{0_V\}$)(propiedad (2)) se deduce que, $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k = 0_V$

y siendo el conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ linealmente independiente (por hipótesis), resulta que $a_i = 0$

con $1 \le i \le k$.

Observación:

$\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_k)\}\ es\ linealmente\ independiente \Rightarrow$
$\{v_1, v_2, \dots, v_k\}\ es\ linealmente\ independiente$ y se cumple para cualquier transformación lineal.

Ejemplos:

- Dada $f\colon\ \mathbb{R}_1\,[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3\ / f(a+bx) = (a \quad a+b \quad 0)^T$.

En este caso el $Nu(f) = \{\, a+bx \in \mathbb{R}_1\,[x] /\ f(a+bx) = (0 \quad 0 \quad 0)^T\}$, esto nos lleva a pedir que $a = \ 0 \quad y \quad b = \ \ 0.$ De modo que $Nu(f) = \{0_{\mathbb{R}_1\,[x]}\}$

y f es monomorfismo.

- $f\colon\ \mathbb{R}^{2x2} \longrightarrow \mathbb{R}^2\ / f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a+b \quad c-d)^T$.

En este caso el $Nu(f) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in\ \mathbb{R}^{2x2} / f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (0 \quad 0)^T\right\}$.

Se deduce que $a+b = 0 \quad y \quad c-d = 0$ y toda matriz que pertenezca al $Nu(f)$ será de la forma $\begin{pmatrix} a & -a \\ c & c \end{pmatrix}, a\,, c\ \in\ \mathbb{R}$

$Nu(f) = gen\ \left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ y el conjunto $\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ es una base del $Nu(f)$.

Y f no es monomorfismo.

Presentamos otro teorema clave

Teorema de la dimensión

Sea V de dimensión finita n y $f \in \mathcal{L}(V, W)$.

Entonces $\mathbf{dim}\, \boldsymbol{Nu}\,(\boldsymbol{f}) + \mathbf{dim}\, \boldsymbol{Im}(\boldsymbol{f}) = \mathbf{dim}(\boldsymbol{V})$.

Demostración:

- Caso 1: $Nu\,(f) = \{0_V\}$, $\dim(Nu\,(f)) = 0$

  Dada una base de V, $B = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$.

  Sabemos que $Im\,(f) = gen\{f(w_1), f(w_2), \dots, f(w_n)\}$ y dado que en particular el conjunto B es linealmente independiente, por la propiedad (2), siendo f un monomorfismo, el conjunto $\{f(w_1), f(w_2), \dots, f(w_n)\}$ es también linealmente independiente. De manera que el conjunto $\{f(w_1), f(w_2), \dots, f(w_n)\}$ es una base para la $Im\,(f)$ y se cumple la igualdad:
  $\dim Nu\,(f) + \dim Im(f) = \dim(V)$.

- Caso 2:

  $\dim(Nu\ (f)) = n$, como $Nu\ (f) \subseteq V$ y $\dim(V) = n$ entonces $Nu\ (f) = V\ y$ la $Im(f) = \{0_W\}$.
  El teorema se cumple.

- Caso 3:

  Supongamos que el $\dim(Nu\ (f)) = k, 0 < k < n$ y que el conjunto $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ es una base del $Nu\ (f)$.

Extendemos esa base $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ a una base de V

Agregamos $\{u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_n\}$ para que el conjunto $\{u_1, u_2, \dots, u_{k,}\ u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_n\}$ resulte una base de V.

Nuevamente $Im\ (f) = gen\{f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_k), f(u_{k+1}), f(u_{k+2}), \dots, f(u_n)\}$

$Im\ (f) = gen\{f(u_{k+1}), f(u_{k+2}), \dots, f(u_n)\}$. Este conjunto generador de la $Im\ (f)$ tiene "$n - k$ " vectores.

Analizamos la independencia lineal:

Planteamos la combinación lineal nula:

- $a_{k+1}f(u_{k+1}) + a_{k+2}f(u_{k+2}) + \ldots + a_n f(u_n) = 0_W$

Reescribimos:

$f(a_{k+1}u_{k+1} + a_{k+2}u_{k+2} + \ldots + a_n u_n) = 0_W \Rightarrow a_{k+1}u_{k+1} + a_{k+2}u_{k+2} + \ldots + a_n u_n \in Nu(f)$

De modo que:

$a_{k+1}u_{k+1} + a_{k+2}u_{k+2} + \ldots + a_n u_n = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \cdots + b_r u_k$ ya que el conjunto $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ es base de $Nu(f)$

Así $a_{k+1}u_{k+1} + a_{k+2}u_{k+2} + \ldots + a_n u_n - b_1 u_1 - b_2 u_2 - \cdots - b_r u_k = 0_V$

Y dado que el conjunto $\{u_1, u_2, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$ es una base de V, en particular L.I se deduce que

$a_i = 0$ con $k + 1 \leq i \leq n$.

Por lo que resultan

$a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_n = 0$ y el conjunto $\{f(u_{k+1}), f(u_{k+2}), \ldots, f(u_n)\}$ es una base de $Im\,(f)$

y la $\dim\big(Im(f)\big) = n - k$.

De donde finalmente se verifica que: $\mathbf{dim}\big(\boldsymbol{Nu}\,(\boldsymbol{f})\big) + \mathbf{dim}\big(\boldsymbol{Im}(\boldsymbol{f})\big) = \boldsymbol{k} + (\boldsymbol{n} - \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{n} = \mathbf{dim}(\boldsymbol{V})$

Ejemplo:

Sea $f: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^{2x2} / f(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ a+b-c & 2c \end{pmatrix}$.

Se pide:

- Hallar una base del $Nu(f)$ y una base de $Im(f)$.
- Es posible hallar $p \in \mathbb{R}_2[x] / f(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$?
- Es posible hallar $q \in \mathbb{R}_2[x] / f(q) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$? En caso afirmativo, el polinomio q es único?
- Encontrar todos los polinomios $h \in \mathbb{R}_2[x] / f(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- Hallar una base del $Nu(f)$.

Para calcular una base para el $Nu(f)$ recordamos la definición y la adaptamos a este problema:

$$Nu(f) = \left\{p \in \mathbb{R}_2[x] / f(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

En este caso entonces

$$f(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ a+b-c & 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De aquí resulta el sistema:

$$\begin{cases} a + b = 0 \text{ y } c = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, todo polinomio del $Nu(f)$ es de la forma

$$p(x) = a + (-a)x + 0.x^2 = a(1-x), a \in \mathbb{R}$$

$Nu(f) = gen\{1 - x\}$ y el conjunto $\{1 - x\}$ es linealmente independiente.

Respuesta:

Base de $\boldsymbol{Nu(f)}$ es $\boldsymbol{B_{Nu}} = \{\mathbf{1} - \boldsymbol{x}\}$ y $\dim(Nu(f)) = 1.$

- Hallar una base de $Im(f)$

Siguiendo la idea de la demostración extendemos una base de $Nu(f)$ para obtener una base de $\mathbb{R}_2[x]$.

Tomamos por ejemplo una base de $\mathbb{R}_2[x]$:

$\boldsymbol{B}_{\mathbb{R}_2[\boldsymbol{x}]} = \{\mathbf{1} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\}$

$Im(f) = gen\{f(1-x), f(x), f(x^2)\} = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$, es inmediato observar que el conjunto $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$ es linealmente independiente por lo que

Base de $\boldsymbol{Im(f)}$ es $\boldsymbol{B_{Im}} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$ y $\dim(Im(f)) = 2.$

Comentario

Si se ha calculado el $Nu(f)$ y se conoce su dimensión, podemos recurrir al **teorema de la dimensión** para deducir la $dim(Im(f))$. Con este dato, encontrando dos matrices que pertenecen a la $Im(f)$ y sean linealmente independientes, es suficiente.

- Es posible hallar $p \in \mathbb{R}_2[x] / f(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$?

Para responder, sólo es necesario observar si $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in Im(f)$.

En este caso como $a+b=1$ y $c=1$ y en $a+b-c=-1$ queda un absurdo.

<u>Respuesta</u>: **No existe** $p \in \mathbb{R}_2[x] / f(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

- Es posible hallar $q \in \mathbb{R}_2[x] / f(q) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$? En caso afirmativo, el polinomio q es único?

En este caso, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in Im(f)$ ya que $a+b=2$ y $c=1$ y en $a+b-c=1$ la ecuación se satisface.

Como $Nu\ (f) \neq \{0_V\}$, **Existen infinitos polinomios** $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}_2[x]\ /\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

- Encontrar todos los polinomios $h \in \mathbb{R}_2[x] / f(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

En este caso directamente proponemos $f(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ a+b-c & 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

que lleva a $h(x) = a + (1-a)x + x^2 \,, a \in \mathbb{R}$.

En otras palabras, hemos encontrado la preimagen del conjunto $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}$ y escribimos

$$\boldsymbol{f^{-1}}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}\right) = \{\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}_2[x] : \boldsymbol{h(x) = a + (1-a)x + x^2} \,, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}\}$$

Recordamos el teorema fundamental de las transformaciones lineales.

Sean V y W dos K-espacios vectoriales, V de dimensión finita.

Sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V y sean $w_1, w_2, \dots, w_n \in$ W **vectores arbitrarios**.

Entonces **existe una única** transformación lineal $f: V \to W$ tal que $f(v_i) = w_i$ para cada $1 \le i \le n$.

El mismo resulta útil a la hora de proponer transformaciones lineales que cumplan con determinados requisitos. Más aún, no siempre la base canónica es la más conveniente para crear tales transformaciones.

Ilustramos

Definir una transformación lineal

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ que cumpla ambos requisitos:

i) $Nu(T) = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$
ii) $p(x) = 1 - x + x^2 \in Im(T)$.

Del $Nu(T)$ elegimos una base cualquiera, por ejemplo $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

De modo que la $\dim(Nu(T)) = 2$.

Además, como $p(x)$ debe $\in Im(T)$ entonces $Im(T) \neq \{0_{\mathbb{R}_2[x]}\}$.

Con el teorema de la dimensión se deduce entonces que: $\dim(Nu(T)) = 2$ y $\dim(Im(T)) = 1$

Así la $Im(T) = gen\{1 - x + x^2\}$

Para construir una transformación lineal, tomamos como base de $\mathbb{R}^3$ a una que obtenemos extendiendo la base elegida del $Nu(T)$. Esta elección es arbitraria

Puede ser $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ y de este modo definimos una transformación lineal que cumple con lo pedido, asignando imágenes a los vectores de esa base:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}_2[x]} \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}_2[x]} \quad T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 - x + x^2$$

Observación:

La transformación lineal es única pues cumple con las hipótesis del Teorema fundamental pero, no es la única que podemos definir para cumplir con los requisitos del problema.

Inversa de una transformación lineal

Definición:

$$Sea\ f\ \in L(V,W)\ f\colon V \to W\ es\ un\ isomorfismo$$
$$\Leftrightarrow (f\ es\ un\ monomorfismo\ (inyectiva)$$
$$y\ f\ es\ un\ epimorfismo\ (sobreyectiva))$$

En este sentido si $f\colon V \to W\ es\ un\ isomorfismo$, existe la transformación lineal inversa de f .

$$f^{-1}\colon W \to V\ /\ (f^{-1} \circ f)(v) = I(v)\ \forall v \in V$$ y

$$(f \circ f^{-1})(w) = I(w)\ \forall w \in W.$$

Nota: $Sea\ f\ \in L(V,W)$

$$f\colon V \to W\ es\ un\ isomorfismo \Leftrightarrow Nu(f) = \{0_V\}\ e\ Im(f) = W.$$

En particular

Si $\boldsymbol{V}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{W}$ **son de dimensión finita** entonces

$$\boldsymbol{f\colon V \to W\ es\ un\ isomorfismo \Rightarrow \mathbf{dim}(V) = \mathbf{dim}\ (W).}$$

Propiedad de los isomorfismos

$$Sea\ f\colon V \to W\ \ un\ isomorfismo$$

$$Si\ B = \{v_1\ v_2\ \dots, v_n\}\ es\ una\ base\ de\ V$$
$$\Rightarrow\ \{f(v_{1)},\ f(v_2), \dots, f(v_n\ )\}\ es\ una\ base\ de\ W$$

La demostración ha sido considerada al trabajar con monomorfismos.

Ejemplo:

Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x] \,/\, f(a \quad b \quad c)^T = a + (a+b)x + (a+b+c)x^2$.

En este caso el $Nu(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, luego f es monomorfismo.

Usando el teorema de la dimensión

$\dim\,(Nu(f)) + \dim\,(Im(f)) = \dim\,(\mathbb{R}^3)$

se deduce que: $\dim\,(Im(f)) = 3$ y como $Im(f) \subseteq \mathbb{R}_2[x]$ y

$\dim(\mathbb{R}_2[x]\,) = 3$ se concluye que $Im(f) = \mathbb{R}_2[x]$ y f es epimorfismo.

De modo que existe la transformación lineal inversa de f

$f^{-1}: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Encontramos la fórmula.

Para eso tomamos **cualquier** base de $\mathbb{R}^3$ (la canónica en este caso es la más sencilla)

$$\begin{cases} f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = 1 + x + x^2 \\ f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = x + x^2 \\ f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = x^2 \end{cases}$$

Y así resulta que:

$$\begin{cases} f^{-1}(1 + x + x^2) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \\ f^{-1}(x + x^2) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \\ f^{-1}(x^2) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \end{cases}$$

Ya que siendo un isomorfismo la base elegida (en este caso la base canónica de $\mathbb{R}^3$) se transforma en una base de $\mathbb{R}_2[x]$

De aquí se puede encontrar finalmente la fórmula.

Usando coordenadas de cualquier polinomio en la base $B_1 = \{1 + x + x^2, x + x^2, x^2\}$ y propiedades de las transformaciones lineales.

La fórmula explícita de la inversa es:

$$f^{-1}: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3 / f^{-1}(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a \\ b - a \\ c - b \end{pmatrix}.$$

Dada $f \in \mathcal{L}(V,W)$. Se llama Núcleo de la transformación lineal al conjunto

$$\boldsymbol{Nu(f) = \{x \in V : f(x) = 0_W\}}$$

El $\boldsymbol{Nu(f)}$ es subespacio de $\boldsymbol{V}$

Sea $f \in L(V,W)$.
$\boldsymbol{f\ monomorfismo\ \Rightarrow}$
$(\{\boldsymbol{v_1, v_2, \dots, v_k}\}\ \boldsymbol{es\ linealmente\ independiente\ \Rightarrow}$
$\{\boldsymbol{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_k)}\}\ \boldsymbol{es\ linealmente\ independiente}\ )$

Sea $f \in \mathcal{L}(V,W)$.

$\boldsymbol{f}$ es un monomorfismo $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{Nu(f) = \{0_V\}}$.

Sean V y W dos K-espacios vectoriales, V de dimensión finita.

Sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V y sean $w_1, w_2, \dots, w_n \in$ W **vectores arbitrarios.**

Entonces **existe una única** transformación lineal $f: V \to W$ tal que $f(v_i) = w_i$ para cada $1 \le i \le n$.

<u>Teorema de la dimensión</u>

Sea V de dimensión finita n y $f \in \mathcal{L}(V,W)$.

Entonces $\boldsymbol{\dim Nu(f) + \dim Im(f) = \dim(V)}$.

$$Sea\ f\ \in L(V,W)\ f: V \rightarrow W\ es\ un\ isomorfismo$$

$$\Leftrightarrow (f\ es\ un\ monomorfismo\ (inyectiva)$$

$$y\ f\ es\ un\ epimorfismo\ (sobreyectiva))$$

$$Sea\ f: V \rightarrow W\ \ un\ isomorfismo$$

$$Si\ B = \{v_1\ v_2 \ldots, v_n\}\ es\ una\ base\ de\ V$$

$$\Rightarrow \{f(v_{1)},\ f(v_2), \ldots, f(v_n\ )\}\ es\ una\ base\ de\ W$$

MATRIZ DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Comenzamos con un ejemplo motivador

Sea $T: R^3 \rightarrow R^2$ tal que $T(x) = Ax$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Veamos que $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

¿Cuáles son las imágenes de $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y de $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

¿Reconocen en estas imágenes algún elemento de la matriz A?

Más general ahora:

Sean dos espacios vectoriales $V \; y \; W$, $T: V \;\rightarrow W$ una transformación lineal y $B = \{v_1,\, v_2,\; \dots,\, v_n\}$ y $\mathrm{C} = \{w_1,\, w_2,\; \dots,\, w_m\}$ bases de $V \; y \; W$ respectivamente.

Veamos cómo construir una matriz $[T]_B^C$ que represente dicha transformación lineal.

Cualquier vector del espacio vectorial V se puede escribir como combinación lineal de los vectores de la base B:

$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, v_j \quad \Rightarrow \quad [v]^B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Luego $T(v) = T\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, T(v_j)$

Además, el transformado de cada vector de la base B se puede escribir como combinación lineal de los vectores de la base C

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

Entonces resulta:

$$T(v) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \alpha_j w_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (a_{ij} \alpha_j) w_i = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} \alpha_j)) w_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \beta_i \; w_i$$

Podemos decir entonces que:

$$[T(v)]^C = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\alpha_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\alpha_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}\alpha_j \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{[T]_B^C \in K^{mxn}} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$[T(v)]^C = [T]_B^C [v]^B$$

Vemos que las columnas de la matriz $[T]_B^C$ son las coordenadas en la base C de los transformados de los vectores de la base B.

Volviendo al ejemplo, las columnas de $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ resultan ser las coordenadas en la base canónica de R^2 de los transformados de los vectores de la base canónica de R^3.

Otro ejemplo:

Dada $T: R_2[x] \to R^{2x2}$ tal que $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \begin{pmatrix} a_0 & a_0 + a_1 \\ -a_2 & 3a_1 \end{pmatrix}$. Hallar la $[T]_B^C$, siendo:

$B = \{1 + x, 1 - x, -1 + x^2\}$ y $C = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

$$T(1+x)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix} \text{ y } \left[\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\right]^c=\begin{pmatrix}0\\ 3\\ -1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$T(1-x)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix} \text{ y } \left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}\right]^c=\begin{pmatrix}0\\ -3\\ 3\\ 1\end{pmatrix}$$

$$T(-1+x^2)=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \text{ y } \left[\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right]^c=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$[T]_B^C=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 3 & -3 & 1\\ -1 & 3 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Proposiciones

T es monomorfismo $\Leftrightarrow Nul([T]_B^C) = \{0_{K^n}\}$

T es monomorfismo $\Leftrightarrow$ T es una transformación inyectiva $\Leftrightarrow$
$(T(v) = 0_W \Rightarrow v = 0_V) \Leftrightarrow Nu(T) = \{0_V\}$
Si $T(v) = 0_W \Leftrightarrow [T(v)]^C = 0_{K^m} \Leftrightarrow [T]_B^C[v]^B = 0_{K^m} \Leftrightarrow [v]^B \in Nul([T]_B^C)$
Por otro lado $v = 0_V \Leftrightarrow [v]^B = 0_{K^n} \Leftrightarrow Nul([T]_B^C) = \{0_{K^n}\}$

T es epimorfismo $\Leftrightarrow Col([T]_B^C) = K^m$

T es epimorfismo $\Leftrightarrow Im(T) = W \Leftrightarrow gen\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\} = W \Leftrightarrow$

$gen\{[T(v_1)]^C, [T(v_2)]^C, \ldots, [T(v_n)]^C\} = K^m \Leftrightarrow Col([T]_B^C) = K^m$

T es isomorfismo $\Leftrightarrow$ $[T]_B^C$ es inversible

T es isomorfismo $\Leftrightarrow$ (T es monomorfismo y epimorfismo) $\Leftrightarrow$

$(Nul\left([T]_B^C\right) = \{0_{K^n}\}$, $\{[T(v_1)]^C, [T(v_2)]^C, \dots, [T(v_n)]^C\}$ $es\ LI$ y

$gen\{[T(v_1)]^C, [T(v_2)]^C, \dots, [T(v_n)]^C\} = K^m)$

$\Leftrightarrow$ $\{[T(v_1)]^C, [T(v_2)]^C, \dots, [T(v_n)]^C\}$ es base de K^m $\Leftrightarrow$

existe la inversa de $[T]_B^C$

Veamos que

$$\boxed{([T]_B^C)^{-1} = [T^{-1}]_C^B}$$

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal, B y C bases de V y W respectivamente sabemos que:

Si $T(v) = w$ entonces:

$[T]_B^C\ [v]^B = [T(v)]^C = [w]^C \Rightarrow ([T]_B^C)^{-1}[T]_B^C\ [v]^B = ([T]_B^C)^{-1}[w]^C \Rightarrow$

$[v]^B = ([T]_B^C)^{-1}[w]^C$ (1)

Por otro lado, sabemos que: $v = T^{-1}(w)$ entonces

$[v]^B = [T^{-1}]_C^B[w]^C$ (2)

De (1) y (2) $([T]_B^C)^{-1} = [T^{-1}]_C^B$

Matriz de la composición

Sean $T_1: V \to W$ y $T_2: W \to U$ dos transformaciones lineales, la composición de T_1 con T_2 es una transformación lineal $T_2 o T_1: V \to U$ tal que $(T_2 o T_1)(v) = T_2\big(T_1(v)\big) \forall v \in V$ llamando $T_2(w) = u$

Dadas B, C y D bases de V, W y U respectivamente veamos que:

$$[T_1]_B^C [v]^B = [T_1(v)]^C = [w]^C \quad (1)$$

$$[T_2]_C^D [T_1]_B^C [v]^B = [T_2]_C^D [w]^C = [T_2(w)]^D = [u]^D \quad (2)$$

$$[(T_2 o T_1)]_B^D [v]^B = [u]^D \quad (3)$$

De $(1), (2)\ y\ (3)$

$$\boxed{[(T_2 o T_1)]_B^D = [T_2]_C^D [T_1]_B^C}$$

Ejemplo:

Sean $T_1: R_1(x) \rightarrow R^3$ y $T_2: R^3 \rightarrow R^{2x2}$ dos transformaciones lineales, tales que:

$$T_1(a_0 + a_1 x) = \begin{pmatrix} a_0 \\ 2a_0 + a_1 \\ a_1 \end{pmatrix} \text{ y } T_2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & z \\ y - x & x \end{pmatrix}$$

Y sean $B = \{1 + x, x\}$ $\quad C = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ y

$D = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ bases de $R_1(x)$, R^3 y R^{2x2} respectivamente.

$$T_1(1 + x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right]^C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\; y \;\; T_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]^C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[T_1]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]^D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]^D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$T_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]^D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[T_2]_C^D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[(T_2 o T_1)]_B^D = [T_2]_C^D [T_1]_B^C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado:

$$T_2(T_1(a_0 + a_1 x)) = T_2 \begin{pmatrix} a_0 \\ 2a_0 + a_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_{0+} a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

$$T_2\big(T_1(1+x)\big) = T_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right]^D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_2(T_1(x)) = T_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \quad \left[\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\right]^D = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$[(T_2 o T_1)]_B^D = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\\1 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}$$

Resumen de conceptos

$$[T(v)]^C = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\alpha_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\alpha_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}\alpha_j \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{[T]_B^C \in K^{mxn}} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$[T(v)]^C = [T]_B^C [v]^B$$

T es monomorfismo $\Leftrightarrow Nul\left([T]_B^C\right) = \{0_{K^n}\}$

T es epimorfismo $\Leftrightarrow Col\left([T]_B^C\right) = K^m$

T es isomorfismo $\Leftrightarrow$ $[T]_B^C$ es inversible

$$([T]_B^C)^{-1} = [T^{-1}]_C^B$$

$$[(T_2 o T_1)]_B^D = [T_2]_C^D [T_1]_B^C$$