Ecuaciones Diferenciales Lineales a coeficientes constantes

Algebra II FIUBA 2020

Recordemos algunas definiciones

Una **ecuación diferencial** es una ecuación cuya incógnita es una función. Estas ecuaciones establecen relaciones entre la función incógnita $y(t)$, sus derivadas y la variable independiente t.

En este segmento nuestro objetivo es el de determinar cuáles son TODAS las soluciones de ecuaciones diferenciales lineales de orden n de la forma

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + a_{n-2}y^{(n-2)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y = f(t) \quad (1$$

donde y es la función incógnita, $a_i \in \mathbb{R}$ son constantes y f es una función de t (t'ermino independiente).
Cuando $f(t) = 0$ la ecuación es **homogénea**.

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (2)$$

El mayor orden de derivación al que aparece afectada la función incógnita y se llama **orden** de la ecuación diferencial. La ecuación que aparece en (1) es de orden n.

Una **solución de una ecuación diferencial** es una función, suficientemente suave como para poder derivarse todas las veces que la ecuación lo requeira (orden de la ecuación diferencial) y satisfacer la ecuación, es decir que al reemplazarla en la ecuación se satisface la igualdad que la ecuación plantea.

Trabajaremos en el espacio $C^{\infty}(\mathbb{R})$ como $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ espacio vectorial, es decir con funciones infinitamente derivables de manera que podremos estudiar ecuaciones lineales a coeficientes constantes de cuaquier orden.

Vamos a asociar a cada ecuación de orden n un polinomio de grado n :

Definición
El **polinomio característico** asociado a (1) es

$$p(r) = r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 \tag{3}$$

Por ejemplo, el polinomio caracteístico asociado a la ecuación diferencial

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

es

$$p(r) = r^2 - 3r + 2$$

A partir de las raíces de este polinomio construiremos todas las soluciones. Empezaremos por analizar las soluciones de ecuaciones homogéneas y luego estudiaremos las no homogéneas.

Resultado Si λ es raíz de p entonces $y(t) = e^{\lambda t}$ es solución de la ecuación homogénea asociada

Para probarlo debemos reemplazar $e^{\lambda t}$ en la ecuación y comprobar que da cero.
Notemos que $y^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda t}$ de donde

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + a_{n-2}y^{(n-2)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y =$$

$$= \lambda^n e^{\lambda t} + a_{n-1}\lambda n - 1 e^{\lambda t} + \cdots + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} = e^{\lambda t} p(\lambda) = 0$$

Ecuaciones homogéneas

Empecemos con las de menor orden

Ecuaciones homogéneas de primer orden

Son ecuaciones del tipo

$$y' - \lambda y = 0 \tag{4}$$

Si definimos el operador

$$D - \lambda Id : C^{\infty}(\mathbb{R}) \to C^{\infty}(\mathbb{R})$$

podemos escribir la ecuación (4) como

$$(D - \lambda Id)[y] = 0$$

Observemos que $D - \lambda Id$ es un **operador lineal**:

$$(D-\lambda Id)[y_1+y_2] = (y_1+y_2)' - \lambda(y_1+y_2) = y_1' + y_2' - \lambda y_1 - \lambda y_2 =$$

$$y_1' - \lambda y_1 + (y_2' - \lambda y_2) = (D-\lambda Id)[y_1] + (D-\lambda Id)[y_2]$$

además si $k \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$)

$$(D-\lambda Id)[k\,y_1] = (k\,y_1)' - \lambda(k\,y_1) = k\,y_1' - \lambda(\,k\,y_1) = k\,y_1' - k\,\lambda y_1 =$$

$$k\,(y_1' - \lambda y_1) = k\,(D-\lambda Id)[y_1]$$

Las soluciones de (4) son el núcleo del operador que es un subespacio de $C^\infty(\mathbb{R})$.
Cómo podríamos descrbir este subespacio?

Resultado Todas las soluciones de la ecuación $y' - \lambda y = 0$ son de la forma $y(t) = Ce^{\lambda t}$, $C \in \mathbb{R}$

Para probarlo veamos primero que $y(t) = e^{\lambda t}$ es claramente solución de la ecuación:

$$(e^{\lambda t})' - \lambda(e^{\lambda t}) = \lambda e^{\lambda t} - \lambda e^{\lambda t} = 0$$

Supongamos ahora que y es una solución (es decir $y' - \lambda y = 0$) y definamos $h(t) = \frac{y(t)}{e^{\lambda t}}$. Entonces h está bien definida y satisface

$$h'(t) = \frac{y'(t)e^{\lambda t} - y(t)\lambda e^{\lambda t}}{e^{2\lambda t}} = \frac{e^{\lambda t}(y'(t) - \lambda y(t))}{e^{2\lambda t}} = 0$$

ya que, por ser y solución, $y'(t) - \lambda y(t) = 0$.

Resulta que h es una función con derivada nula por lo tanto h es constante: $h(t) = C$.
Hemos demostrado entonces que si y es cualquier solución de la ecuación vale

$$h(t) = \frac{y(t)}{e^{\lambda t}} = C \Rightarrow y(t) = Ce^{\lambda t} \qquad \square$$

Notar que las soluciones de (4) son funciones infinitamente derivables definidas en todo $\mathbb{R}$, es decir funciones de $C^{+\infty}(\mathbb{R})$.

Observación

El núcleo de la transformación lineal $D - \lambda Id$ es el subespacio de $C^{\infty}(\mathbb{R})$ de dimensión 1 generado por $e^{\lambda t}$:

$$Nu(D - \lambda Id) = gen \left\{ e^{\lambda t} \right\}$$

Observación

El polinmio característico de la ecuación $y' - \lambda y = 0$ es $p(r) = r - \lambda$ cuya única raiz es $r_1 = \lambda$ y una base del espacio de soluciones de la ecuación es (no casualmente) $\left\{e^{\lambda t}\right\} = \{e^{r_1 t}\}$.

Esta misma relación entre las raíces del polinomio característico de la ecuación y la base del espacio de soluciones aparecerá en ecuaciones lineales homogéneas de coeficientes constante de orden mayor a 1.

Resultado El problema de valores iniciales (ecuación + condición que la solución debe satisfacer en algún punto) tiene una única solución

$$\left\{ \begin{array}{ll} y' - \lambda y & = 0 \\ y(t_0) & = y_0 \end{array} \right.$$

Entre todas las soluciones que son de la forma $y(t) = Ce^{\lambda t}$ hay una única que satisface $y(t_0) = y_0$:

$$y(t_0) = Ce^{\lambda t_0} = y_0 \Rightarrow C = y_0 e^{-\lambda t_0}$$

Entonces la única solución del problema de valores iniciale es $y(t) = y_0 e^{-\lambda t_0} e^{\lambda t} = y_0 e^{\lambda(t-t_0)}$.

Con este resultado podemos calcular soluciones de ecuaciones y de problemas de valores iniciales sencillos.

Ejercicio

Hallar todas las soluciones de $y' + 2y = 0$ que satisfacen $y(0) = 3$.

Ya sabemos que **todas** las soluciones de $y' + 2y = 0$ son de la forma $y(t) = Ce^{-2t}$, entre ellas buscaremos las que satisfacen la condición $y(0) = 3$.
Si

$$y(0) = 3 \Rightarrow Ce^{-2,0} = 3 \Rightarrow C = 3$$

por lo tanto la única solución del problema es $y(t) = 3e^{-2t}$.

Antes de estudiar las soluciones de ecuaciones homogéneas de mayor orden, resolvamos la ecuación de primer orden no homogénea ya que utilizaremos su solución para construir las soluciones de ecuaciones homogéneas de mayor orden.

Ecuaciones de primer orden no homogéneas

Calculemos las soluciones ecuaciones de primer orden no homogéneas del tipo

$$y' - \lambda y = f(t) \tag{5}$$

si pensamos que $f(t) = \frac{f(t)}{e^{\lambda t}} e^{\lambda t}$ y llamamos $g(t) = \frac{f(t)}{e^{\lambda t}}$, entonces podemos reescrbir la ecuación como

$$y' - \lambda y = g(t) e^{\lambda t}$$

Es fácil probar que si h satisface $h'(t) = g(t)$, es decir h una primitiva de g, entonces $y(t) = h(t)e^{\lambda t}$ es solución de (5):

$$y' - \lambda y(t) - \lambda y(t) = (h'(t)e^{\lambda t} + h(t)\lambda e^{\lambda t}) - \lambda h(t) e^{\lambda t} =$$

$$= h'(t)e^{\lambda t} = g(t)e^{\lambda t} = f(x)$$

Cómo son entonces todas las soluciones de (5)?
Elijamos una de las soluciones recién calculadas, es decir fijemos una primitiva de $g(t) = \frac{f(t)}{e^{\lambda t}}$, sea h y llamemos $y_p(t) = h(t)e^{\lambda t}$ (solución particular). Si a y_p le sumamos una solución de la ecuación homogénea asociada a (5) , $y_h(t) = Ce^{\lambda t}$, obtendremos otra solución de (5):

$$(D-\lambda Id)[y_p+y_h] = (D-\lambda Id)[y_p]+(D-\lambda Id)[y_h] = f(t)+0 = f(t)$$

Entonces si a una solución particular de (5) (que ya sabemos calcular) le sumamos cualquier solución de la ecuación homogénea , y_h, (sabemos calcularlas todas) obtenemos otra solucion de (5).

Observación

Para el caso de ecuaciones lineales algebraicas , $Ax = b$, ya conocíamos un resultado equivalente: si conocemos una solución de la ecuación, x_p y le sumamos las soluciones de $Ax = 0$, x_h, obtenemos todas las soluciones de la ecuación que son de la forma: $x_p + x_h$.
Para ecuaciones diferenciales lineales sigue siendo válida esa afirmación

Resultado Todas las soluciones de (5) son de la forma $y_p + y_h$: una solución particular mas las soluciones de la ecuación homogénea asociada

Sea y solución de (5), y sea y_p una solución calculada según vimos $y_p = g(t)e^{\lambda t}$, entonces $y - y_p$ es solución de la ecuación homogénea asociada ya que

$$(y-y_p)'-\lambda(y-y_p) = y'-y_p'-\lambda y+\lambda y_p = (y'-\lambda y)-(y_p'-\lambda y_p) = p(t)-p(t$$

Como nosotros conocemos como son todas las soluciones de la ecuación $y' - \lambda y = 0$, podemos afirmar que

$$y - y_p = Ce^{\lambda t} \Rightarrow y(t) = y_p(t) + Ce^{\lambda t}$$

Entonces todas las soluciones de (5) son de la forma $y(t) = y_p(t) + Ce^{\lambda t}$ donde y_p es alguna solución particular de (5) y C es constante.

Resultado El el problema de valores iniciales tiene una única solución

$$\begin{cases} y' - \lambda y & = f(t) \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases}$$

Ejercicio

Hallar todas las soluciones de la ecuación $y' - \frac{y}{2} = te^{2t}$.

La ecuación tiene la forma (5) con $\lambda = 1/2$ y $f(t) = te^{2t}$ debemos entonces hallar una primitiva de $\frac{te^{2t}}{e^{\frac{1}{2}t}}$, es decir una h tal que $h'(t) = te^{\frac{3}{2}t}$. Elijamos $h(t) = \frac{2}{3}te^{\frac{3}{2}t} - \frac{4}{9}e^{\frac{3}{2}t}$, de donde $y_p(t) = \frac{2}{3}te^{2t} - \frac{4}{9}e^{2t}$.

Todas las soluciones de la ecuación se pueden escribir como

$$y_g(t) = y_p(t) + Ce^t = \frac{2}{3}te^{2t} - \frac{4}{9}e^{2t} + Ce^{\frac{1}{2}t}$$

Para el caso de problema de valores iniciales
Ejercicio Resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' + y & = t^2 \\ y(0) & = 3 \end{cases}$$

La solución general de la ecuación es $y_G(t) = y_p(t) + Ce^{-t}$. Para hallar y_p procedemos aomo lo hicimos anteriormente y obtenemos $y_p(t) = t^2 - 2t + 2$.
Para hallar la solución del problema de valores iniciales elegiremos C de manera que la solución $y(t) = t^2 - 2t + 2 + Ce^{-t}$ satisfage $y(0) = 3$,

$$y(0) = 2 + C = 3 \Rightarrow C = 1$$

La única solución del problema de valores inciales es $y(t) = t^2 - 2t + 2 + e^{-t}$

Ecuaciones homogéneas de orden mayor a 1

Sea una ecuación del tipo (2) cuyo polinomio característico es (ver (3)) $p(r) = r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$. Vamos a construir una base de soluciones, es decir una base del espacio nulo del operador diferencial lineal asociado a la ecuación , a partir de las raíces de p.

Ya vimos que existe una relación entre las raíces de p y las soluciones de la ecuación homogénea en el caso de primer orden. Extenderemos ese resultado a ecuaciones de orden n. Empecemos por las de segundo orden.

Busquemos las soluciones de

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{6}$$

Primer caso

Empecemos por el caso de ser

$$y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0, \quad p(r) = r^2 + a_1 r + a_0 \tag{7}$$

siendo **las raíces de p simples**, $r_1 \neq r_2$:
$p(r) = (r - r_1)(r - r_2) = r^2 - (r_1 + r_2)r + r_1 r_2$, resulta
$a_1 = -(r_1 + r_2)$, $a_0 = r_1 r_2$ y $p(r) = r^2 - (r_1 + r_2)r + r_1.r_2$.

La ecuación se escribe entonces como $y'' - (r_1 + r_2)y' + r_1.r_2 y = 0$ y como

$$(D - r_1 Id)[(D - r_2 Id)[y]] = 0$$

ya que

$$(D - r_1 Id)[(D - r_2 Id)[y]] = (D - r_1 Id)[y' - r_2 y] = (y' - r_2 y)' - r_1(y' - r_2 y) =$$

$$= y'' - r_1 y' - r_2 y' + r_1 r_2 y = y'' - (r_1 + r_2)y' + r_1 r_2 y$$

Ya sabemos cómo es el núcleo del operador $(D - r_1 Id)$ entonces reemplazando resulta

$$(D - r_1 Id)[(D - r_2 Id)[y]] = 0 \Rightarrow (D - r_2 Id)[y] = Ce^{r_2 t}$$

Es decir que las soluciones de (7) satisfacen $(D - r_1 Id)[y] = Ce^{r_2 t}$ o equivalentemente $y' - r_1 y = Ce^{r_2 t}$.
Procediendo como ya lo hicimos anteriormente, podemos resolver esta ecuación de primer orden no homgénea. Necesitaremos encontrar una solución particular (que también sabemos como hacerlo) y sumarle luego todas las soluciones de la ecuación homogénea asociada que este caso resulta: $y_p(t) = \frac{D}{r_2 - r_1} e^{r_2 t}$ que puede escribirse como $y_p(t) = Ae^{r_2 t}$. Finalmente

$$y_g(t) = A\, e^{r_2 t} + Ce^{r_1 t}$$

Hemos demostrado entonces el siguiente resultado

Resultado **Todas las soluciones de** $y'' - (r_1 + r_2)y' + r_1 r_2 y = 0$ **son de la forma** $y_g(t) = C\, e^{r_1 t} + D\, e^{r_2 t}$**.**
Una base del núcleo del operador $D^2 - (r_1 + r_2)D + r_1 r_2 Id$ **es** $\{e^{r_1 t},\ e^{r_2 t}\}$

Observación
Una vez más podemos relacionar la base del espacio nulo del operador diferencial, en este caso $(D - r1Id)(D - r_2 Id)$, con las raíıces del polinomio característico asociado a la ecuación :
$p(r) = r^2 - (r_1 + r_2)r + r_1 r_2 = (r - r_1)(r - r_2)$.
En este caso las dos raíces del polinomio son $r_1 \neq r_2$ y una base de soluciones es $\{e^{r_1 t},\ e^{r_2 t}\}$.

Completemos el análisis del caso en que p tiene raíces distintas contemplando la posibilidad de que sean complejas conjugadas: $\alpha + i\beta$ y $\alpha - i\beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. El polinomio resulta entonces $p(r) = r^2 - 2\alpha r + \alpha^2 + \beta^2$ y la ecuación

$$y'' - 2\alpha y' + (\alpha^2 + \beta^2)y = 0$$

Si procedemos como explicamos antes, resulta que la base de soluciones de la ecuación es $\left\{e^{(\alpha+i\beta)t},\, e^{(\alpha-i\beta)t}\right\}$. Llamamdo $y_{h_1}(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}$ y $y_{h_2}(t) = e^{(\alpha-i\beta)t}$, recordando que $e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t)) + i\,\mathrm{sen}(\beta t))$ y la linealidad del operador diferencial, sabemos que $D(y_{h_1} + y_{h_2})$ y $C(y_{h_1} - y_{h_2})$ también son soluciones para cualquier constante C y D.
Eligiendo $C = \frac{1}{2i}$ y $D = \frac{1}{2}$, obtenemos dos soluciones linealmente independientes de la ecuación, es decir una nueva base que resulta $\{e^{\alpha}\cos(\beta y),\, e^{\alpha}\,\mathrm{sen}(\beta t)\}$.
Resumamos este anaálisis en el siguiente resultado.

Resultado **Todas las soluciones de** $y'' - 2\alpha y' + (\alpha^2 + \beta^2)y = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ **son de la forma** $y_g(t) = Ae^{\alpha t}\cos(\beta t) + B\, e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)$.

Una base del espacio de soluciones es $\{e^{\alpha t}\cos(\beta t),\ e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)\}$

Estudiemos ahora el caso de raiz doble: $r_1 = r_2$.
Segundo caso Estudiemos ahora el caso $r_1 = r_2$, es decir que el polinomio característico p **tiene una raiz real doble**

$$y'' - 2\lambda\, y' + \lambda^2\, y = 0 \tag{8}$$

que puede escribirse como

$$(D - \lambda Id)^2[y] = 0$$

ya que

$$(D-\lambda Id)[(D-\lambda Id)[y]] = (D-\lambda Id)[y'-\lambda y] = (y'-\lambda y)'-\lambda(y'-\lambda y) = y''-$$

Ya sabemos que las soluciones de $(D - \lambda Id)[y] = 0$ son exponenciales, entonces reemplazando resulta

$$(D-\lambda Id)^2[y] = (D-\lambda Id)[(D-\lambda Id)[y]] = 0 \Rightarrow (D-\lambda Id)[y] = Ce^{\lambda t}$$

Es decir que las soluciones de (8) satisfacen $(D - \lambda Id)[y] = Ce^{\lambda t}$ o equivalentemente $y' - \lambda y = Ce^{\lambda}t$.
Procediendo como hicimos anteriormente, podemos resolver esta ecuación de primer orden no homgénea.

Necesitaremos encontrar una solución particular (sabemos como hacerlo) y sumarle luego todas las soluciones de la ecuación homogénea asociada. En este caso resulta $f(t) = Ce^{\lambda t}$ y $g(t) = \frac{f(t)}{e^{\lambda t}} = C$, de donde h tal que $h'(t) = g(t)$ es $h(t) = Ct$. Entonces $y_p(t) = Cte^{\lambda t}$ y finalmente

$$y_g(t) = C\, te^{\lambda t} + D\, e^{\lambda t}$$

Hemos demostrado entonces el siguiente resultado

Resultado **Todas las soluciones de** $y'' - 2\lambda\, y' + \lambda^2\, y = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$ **son de la forma** $y_g(t) = C\, te^{\lambda t} + D\, e^{\lambda t}$**.**
Una base del espacio de soluciones es $\left\{te^{\lambda t},\ e^{\lambda t}\right\}$

Observación Nuevamente podemos relacionar la base del espacio nulo del operador diferencial, en este caso $(D - \lambda Id)^2$, con las raíces del polinomio característico asociado a la ecuación : $p(r) = r^2 - 2\lambda r + \lambda^2 = (r - \lambda)^2$. En este caso las dos raíces del polinomio coinciden (raiz doble) $r_1 = r_2 = \lambda$ y la base de soluciones es $\left\{te^{\lambda t},\ e^{\lambda t}\right\}$.

Resolvamos algunos ejercicios.

Ejercicio

Construir una ecuación diferencial lineal homogénea a coeficintes constates de orden mínimo que admita a e^t por solución.

Como e^t es solución, sabemos que 1 es raiz del polinomio característico, por lo tanto la ecuación debe ser de orden por lo menos 1. La ecuación $y' - y = 0$ es una ecuación de primer orden que satisface lo pedido.

Ejercicio

Construir una ecuación diferencial lineal homogénea a coeficientes constates de orden mínimo que admita a te^t por solución.

Dado que te^t es solución, sabemos que 1 es raiz doble del polinomio característico, $p(r) = (r-1)^2 q(x)$ por lo tanto la ecuación debe ser de orden por lo menos 2.
La ecuación $y'' - 2y + y = 0$ es una ecuación de segundo orden que satisface lo pedido.

Si entre las soluciones de una ecuación homogńea parecen sen(αt) y cos(αt) asociamos a raíces complejas.

Ejercicio

Construir una ecuación diferencial lineal homogénea a coeficientes constates de orden mínimo que admita a $sen(3t)$ por solución.
El hecho de que $sen(3t) = e^{0.t}\,\text{sen}(3t)$ sea solución nos dice que el polinomio característico tiene raíces complejas con parte imaginaria 3 y parte real 0:
$p(r) = (r - (0 + 3i))(r - (0 - 3i))q(x) = (r^2 + 9)q(x)$ por lo tanto la ecuación debe ser de orden por lo menos 2.
La ecuación $y'' + 9y = 0$ es una ecuación de segundo orden que satisface lo pedido.

Respecto al problema de valores iniciales, para estas ecuaciones vale un resultado similar al correspondiente a ecuaciones de primer orden ya que a partir de la expresión de **todas** las soluciones de una ecuación de segundo orden homogénea, podemos concluir que

Resultado Existe una única solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'' + a_1 y' + a_0 y & = 0 \\ y(t_0) & = y_0 \\ y'(t_0) & = z_0 \end{cases}$$

Si consideramos que una base de soluciones de la ecuación homogénea es ϕ_1 y ϕ_2 y planteamos una solución del problema de valores iniciales como $y = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$, las constantes c_1, c_2 deben satisfacer

$$\begin{cases} (c_1\phi_1 + c_2\phi_2)(t_0) & = y_0 \\ (c_1\phi_1' + c_2\phi_2')(t_0) & = z_0 \end{cases} \tag{9}$$

Este sistema cuyas incógnitas son c_1 y c_2 siempre admite solución ya que el determinante de la matriz asociada es el wronskiano

$$W_{\phi_1,\phi_2}(t_0)$$

que es no nulo por ser ϕ_1, ϕ_2 **base** del espacio nulo asociado al operador diferencial.

Entonces existe única solución del sistema: c_1 y c_2 con las que podemos armar la única solución del problema de valores iniciales.

Para ecuaciones homogéneas de orden mayor a 2 podemos , así como lo hicimos para el caso de segundo orden, descomponemos el operador expresándolo como composición de operadores de menor orden e ir resolviendo por etapas. Sin embargo vale un resultado similar al caso de segundo orden que permite hallar una base del espacio de soluciones a partir de las raíces del polinomio característico

Resultado **Sea una ecuación del tipo,**
$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$,
cuyo polinomio característico es
$p(r) = r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$. **Si** $r_1, \cdots r_k$ **son las raíces (reales o complejas) de** p, r_j **con multiplicidad** $n_j \in \mathbb{N}$, $n_1 + \ddots + n_k = n$: $p(r) = (r - r_1)^{n_1} \cdots (r - r_k) n_k$, **el conjunto**
$\left\{ e^{r_1 t}, te^{r_1 t}, \cdots, t^{n_1 - 1} e^{r_1 t}, \cdots, e^{r_k t}, te^{r_k t}, \cdots, t^{n_k - 1} e^{r_k t} \right\}$ **es una base de soluciones de la ecuación**

Resolvamos algún ejercicio

Ejercicio

Hallar todas las soluciones de $y''' - 3y'' + 4y = 0$.

El polinomio asociado es $p(r) = r^3 - 3r^2 + 4 = (r-2)^2(r+1)$ cuyas raíces son : 2 raiz doble y -1 raiz simple.
Por lo tanto una base del espacio de soluciones es $B = \left\{e^{2t}, te^{2t}, e^{-t}\right\}$ y todas las soluciones son de la forma

$$y(t) = Ae^{2t} + Bte^{2t} + Ce^{-t}$$

Ya aprendimos a resolver ecuaciones no homogéneas de primer orden. Estudiaremos ahora el caso de orden mayor a 1. Empezaremos por las ecuaciones de segundo orden.

Ecuaciones de segundo orden no homogéneas

Para resolver ecuaciones de segundo orden no homogéneas, del tipo

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f \tag{10}$$

cuyo polinomio característico es $p(r) = (r - r_1)(r - r_2)$ pudiendo ser r_1 y r_2 reales complejas o $r_1 = r_2$.
planteamos la ecuación a partir del operador diferencial $D - \lambda Id$:

$$(D - r_1 Id)(D - r_2 Id)[y] = (D - r_1)[(D - r_2 Id)[y]] = f$$

llamando $z = (D - r_2 Id)[y]$ resulta

$$(D - r_1 Id)[z] = f$$

Sabemos encontrar z ya que z es la solución de una ecuación de primer orden no homogénea

$$z' - r_1 z = f$$

y la podemos describir como $z_G = z_p + z_h$.
Una base del espacio de soluciones de la ecuación homogénea asociada es $\{e^{r_1 t}\}$ y para calcular una solución particular procedemos como lo hicimos anteriormente.
A partir de $z' - r_1 z = p$, reescrbiéndola como $z' - r_1 z = \frac{f(t)}{e^{r_1 t}} e^{r_1 t}$ y llamando $g(t) = \frac{f}{e^{r_1 t}}$ resulta $z' - r_1 z = g(t)e^{r_1 t}$.
Buscamos entonces h de manera que $h' = g$ y obtenemos una solución particular de la forma

$$z_p(t) = h(t)e^{r_1 t}$$

Entonces

$$z_G(t) = h(t)e^{r_1 t} + Ae^{r_1 t}$$

Para hallar la solución de la ecuación (10) recordamos que $(D - r_2 Id)[y] = z$.
Nuevamente $y_g = y_p + y_h$ y sabemos que $y_h = Be^{r_2 t}$ resta entonces calcular una y_p.
La solución y_p satisface

$$y - r_2 y = z = h(t)e^{r_1 t} + Ae^{r_1 t}$$

y podemos proceder como lo hicimos antes calculando m, una primitiva de $\frac{z}{e^{r_2 t}} = \frac{h(t)e^{r_1 t} + Ae^{r_1 t}}{e^{r_2 t}} = h(t)e^{(r_1 - r_2)t} + Ae^{(r_1 - r_2)t}$ y obtener

$$y_p(t) = m(t)e^{r_2 t}$$

Si $r_2 \neq r_1$, una primitiva de será de la forma $m(t) = l(t) + \frac{A}{r_2 - r_1} e^{(r_1 - r_2)t}$ donde l es una primitiva de $h(t)e^{(r_1 - r_2)t}$ y $y_p(t) = l(t)e^{r_2 t} + \frac{A}{r_2 - r_1} e^{r_1 t}$.
Finalmente

$$y_g = l(t)e^{r_2 t} + De^{r_1 t} + Ce^{r_2 t}$$

Si $r_1 = r_2$, $z_G(t) = z_p(t) + Ae^{r_1 t}$ con $z_p(t) = g(t)e^{r_1 t}$ (g tal que $g'(t) = \frac{f(t)}{e^{r_1 t}}$) y resulta $y_G(t) = y_p(t) + Be^{r_1 t}$.
Para calcular y_p procedemos como siempre: $y_p(t) = m(t)e^{r_1 t}$, con $m'(t) = g(t) + A$, es decir $m(t) = l(t) + At$.

Finalmente la solución general resulta de la forma

$$y_G(t) = s(t) + Ate^{r_1 t} + Be^{r_1 t}$$

Resumamos lo observado en el siguiente

Resolvamos algún ejercicio

Ejercicio

Resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y & = & (t+1)e^t \\ y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 2 \end{cases}$$

vamos a hallar la solución general , $y_g = y_p + y_h$, para luego ajustar las condiciones iniciales.
Sabemos que para este caso $p(r) = r^2 - 5r + 6 = (r-2)(r-3)$ y $y_h = Ae^{2t} + Be^{3t}$.

Para calcular una solución particular , y_p, planteamos

$$(D - 2Id)(D - 3Id)[y] = (t + 1)e^t$$

$$(D - 2Id)[z] = (t + 1)e^t, \qquad z = (D - 3Id)[y]$$

Resolviendo esta ecuación para z resulta $z_G = z_p + Ae^{2t}$ y $z_p(t) = g(t)e^{2t}$ donde g es una primitiva para $\frac{(t+1)e^t}{e^{2t}} = (t + 1)e^{-t}$, por ejemplo $-te^{-t} - 2e^{-t}$.
Entonces

$$z_G = (-te^{-t} - 2e^{-t})e^{2t} + Ae^{2t} = -te^t - 2e^t + Ae^{2t}.$$

Para hallar y resolvemos

$$(D - 3Id)[y] = -te^t - 2e^t + Ae^{2t}$$

buscando nuevamente una solución particular y las soluciones de la ecuación homogénea

$$y_G(t) = y_p(t) + Be^{3t}$$

con $y_p(t) = h(t)e^{3t}$ siendo h una primitiva de
$\frac{-te^t - 2e^t + Ae^{2t}}{e^{3t}} = (-t-2)e^{-2t} + Ae^{-t}$, por ejemplo
$\frac{t}{2}e^{-2t} + \frac{5}{4}e^{-2t} - Ae^{-t}$ de donde $y_p = \frac{t}{2}e^t + \frac{5}{4}e^t - Ae^{-t}$
Resulta entonces

$$y_G = e^t(\frac{t}{2} + \frac{5}{4}) + Ce^{2t} + Be^{3t}$$

Con este mismo procedimiento podemos hallar soluciones para ecuaciones no homogéneas de mayor orden descomoniéndolas como composición de operadores disferenciales de menor orden pero puede resultar bastante trabajoso. A continuación vamos a introducir otros métodos para hallar las soluciones.

Ecuaciones no homogéneas de mayor orden

Con el procedimiento explicado anteriormente para las ecuaciones de segundo orden podemos calcular soluciones particulares descomponiendo en operador diferencial como composición de operadores de menor orden e ir resolviendo progresivamente las ecuaciones que se obtienen. Sin embargo puede resultar muy largo y engorroso.

Presentamos a continuación otros métodos para calcular las soluciones de ecuaciones diferenciales a coeficientes constantes no homogéneas

■**Método del** *aniquilador*
Este método saca ventaja de la posibilidad de calcular **todas** las soluciones para el caso homogéneo.
(Adaptaremos en este caso la notación que figura en los Ejercicios 2.31 y 2.32)

Supongamos que la ecuación está descripta por un operador diferencial lineal L:

$$L(v) = w$$

y sea A otro operador diferencial lineal que satisface $A(w) = 0$.
Entonces

$$A(L(v)) = A(w) = 0$$

es decir que v es solución, es decir $v \in Nu(L)$, entonces $(A \circ L)v = 0$: $v \in Nu(A \circ L)$.

Como $(A \circ L)$ también es un operador lineal conocemos una base de soluciones de $(A \circ L)v = 0$, es decir una base del $Nu(A \circ L)$. Si $(A \circ L)$ es de orden n, sea $B : \{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n\}$ una base de $Nu(A \circ L)$ y expresemos cualquier $v \in Nu(A \circ L)$ como

$$v = a_1\phi_1 + a_2\phi_2 + \cdots + a_n\phi_n$$

En esta expresión habrá términos que estén en el $Nu(L)$ sean por ejemplo los k primeros y el resto no:

$$v = (a_1\phi_1 + a_2\phi_2 + \cdots + a_k\phi_k) + (a_{k+1}\phi_{k+1} + \cdots + a_n\phi_n)$$

Notemos que $v_h = a_1\phi_1 + a_2\phi_2 + \cdots + a_k\phi_k$ será solución de la ecuación homogénea asociada a la ecuación original: $L(v) = 0$.

Entonces si llamamos $v_p = a_{k+1}\phi_{k+1} + \cdots + a_n\phi_n$, tenemos

$$v = v_h + v_p$$

v_p satisface $A(L(v_p)) = 0$ pero no sabemos si satisface $L(v_p) = L(a_{k+1}\phi_{k+1} + \cdots + a_n\phi_n) = w$. Debemos entonces ajustar los coeficientes de v_p: $a_{k+1}, \cdots, a_n$ de manera que se satisfaga $L(v_p) = w$ obteniendo así una solución particular de la ecuación no homogénea original

$$L(v) = L(v_h + v_p) = 0 + w$$

Es importante notar que para resolver una ecuación con este método debemos hallar el aniquilador A: un operador diferencial lineal satisfaga $Aw = 0$.

Resolvamos un ejercicio utilizando este procedimiento del *aniquilador*.

Ejercicio

Resolver la ecuación $y'' - 3y' + 2y = t^2$.

En este caso es: $L(y) = (D^2 - 3D + 2Id)(y)$ y elijamos $A = D^3$: $D^3(t^2) = 0$, entonces $w = t^2 \in Nul(A)$. El operador $A \circ L$ es $A \circ L(y) = y^{(5)} - 3y^{(4)} + 2y^{(3)}$, su polinomio carcterístico es $p(r) = r^5 - 3r^4 + 2r^2$ y sus raíces son : 0 raiz triple, 1 y 2.
Por lo tanto una base de su n'ucleo es :$\left\{e^{0t}, te^{0t}, t^2e^{0t}, e^{2t}, e^t\right\}$,
Entonces proponemos

$$y = a_1e^{0t} + a_2te^{0t} + a_3t^2e^{0t} + a_4e^{2t} + a_5e^t$$

Notemos que $a_4e^{2t} + a_e^t$ están en el núcleo de L para cualquier valor de a_4 y a_5, sea entonces $y_h = a_4e^{2t} + a_3e^t$.
Con los términos restantes construiremos una solución particular y_p que debe verificar $L(y_p) = t^2$.

Reemplazando obtenemos

$$(a_1 e^{0t}+a_2 te^{0t}+a_3 t^2 e^{0t})''-3(a_1 e^{0t}+a_2 te^{0t}+a_3 t^2 e^{0t})'+2(a_1 e^{0t}+a_2 te^{0t}+a$$

y operando resulta

$$2a_3-3(a_2+2ta_3)+2(a_1+ta_2+t^2 a_3) = t^2 \Rightarrow 2a_3 = 1, \quad -6a_3+2a_2 = 0. \quad 2$$

de donde

$$a_3 = 1/2, \quad a_2 = 3/2, \quad a_1 = 7/4$$

Finalmente la solución particular es

$$y_p = \frac{7}{4} + \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}t^2$$

y la solución general

$$y_G(t) = y_p(t)+y_h(t) = \frac{7}{4}+\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}t^2+a_4 e^{2t}+a_5 e^t, \qquad \forall a_4, a_5 \in \mathbb{R}$$

■**Método de los** *coeficientes indeterminados*

A partir del procedimiento explicado anteriormente, resume las posibles y_p según sea el término independientes de la ecuación.

Resultado

Sea una ecuación del tipo

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t)$$

con polinomio característico $p(r) = r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$.
En la siguiente tabla se exhiben el tipo de soluciones particulares que admite la ecuación según sea la f:

f	y_p
polinomio grado m	polinomio general grado m
e^{at}	Ce^{at}
e^{at} polinomio de grado n	e^{at} polinomio general de grado n
$Ke^{at}\cos(wt)$	$Ce^{at}\cos(wt) + De^{at}\,\mathrm{sen}(wt)$
$Ke^{at}\,\mathrm{sen}(wt)$	$Ce^{at}\cos(wt) + De^{at}\,\mathrm{sen}(wt)$

En caso de que la y_p que propone la tabla sea solución de la ecuación homogénea asociada, sabemos que esta solución está asociada a lguna raiz del polinomio característico , sea r_a con multiplicidad n_a. En ese caso debemos modificar la y_p que aparece en la tabla reemplazándola por $t^{n_a} y_p$.
En el caso de ser f combinación lineal de las funciones que aparecen en la primera columna, se propone como y_p una combinación lineal de las soluciones particulares propuestas en la segunda columna.

Observemos que si bien por medio de este método podemos hallar una y_p de forma más rápida, NO podemos utilizarlo para cualquier f, solamente cuando f es del tipo que aparece en la tabla.

Resolvamos algún ejercicio utilizando este resultado:

Ejercicio

Calcular todas las soluciones de $y'' - 5y' + 6y = 4e^{2t} + \cos(t)$.

Las raíces del polinomio característico $p(r) = r^2 - 5r + 6$ son $r_1 = 2$, $r_2 = 3$ y consecuentemente las soluciones de la ecuación homogénea asociada son

$$y_h(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$$

Para hallar una solución particular observamos la tabla anterior. Siendo e^{2t} solución de la ecuación homogénea proponemos para el término $4e^{2t}$ algo de la forma Kte^{2t}.

Para es segundo término proponemos según la tabla

$$L\cos(t) + M\operatorname{sen}(t)$$

Reemplazando

$$y_p(t) = Kte^{2t} + L\cos(t) + M\,\mathrm{sen}(t)$$

en la ecuación obtenemos

$$K = -\frac{1}{4},\ L = \frac{1}{10},\ M = -\frac{1}{10}$$

Todas las soluciones de la ecuación se pueden escribir como

$$y_G(t) = -\frac{1}{4}te^{2t} + \frac{1}{10}\cos(t) - \frac{1}{10}\,\mathrm{sen}(t) + C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$$

Las constantes C_1 y C_2 se podrán determinar en caso de tener que ajustar valores de la función y/o su derivada en alguún punto.

■**Método de** *variación de las constantes*

Lo expondremos para el caso de ecuaciones de segundo orden.

Se busca una solución particular de la ecuación

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

de la forma

$$y_p = c_1(t)\phi_1(t) + c_2(t)\phi_2(t)$$

donde $\phi_1(t), \phi_2(t)$ son una base de soluciones de la ecuación homogénea (que sabemos calcular) y los coeficientes $c_1(t), c_2(t)$ son funciones a determinar a partir del sistema

$$\left\{ \begin{array}{ll} c_1'\phi_1 + c_2'\phi_2 & = 0 \\ c_1'\phi_1' + c_2'\phi_2' & = f \end{array} \right. \tag{11}$$

Este sistema cuyas incógnitas son $c_1'(t)$ y $c_2'(t)$ siempre admite solución ya que el determinante de la matriz asociada es el wronskiano: $W_{\phi_1,\phi_2}(t)$ que es no nulo por ser ϕ_1, ϕ_2 **base** del espacio nulo asociado al operador diferencial.

Resolverlo significa hallar c_1' y c_2', funciones que luego deberemos integrar para hallar c_1 y c_2 y a partir de ellas construir $y_p = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$.

Probemos que si c_1, c_2 son soluciones de (11), entonces $c_1(t)\phi_1(t) + c_2(t)\phi_2(t)$ es una solución de la ecuación $y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$.

Observemos que a partir de la primera ecuación del sistema derivando obtenemos

$$c_1'\phi_1 + c_2'\phi_2 = 0 \Rightarrow c_1''\phi_1 + c_1'\phi_1' + c_2''\phi_2 + c_2'\phi_2' = 0$$

Reemplazando y_p en la ecuación resulta (omitimos la variable t)

$$y_p'' + a_1 y_p' + a_0 y_p = (c_1\phi_1 + c_2\phi_2)'' + a_1(c_1\phi_1 + c_2\phi_2)' + a_0(c_1\phi_1 + c_2\phi_2) =$$

$$= c_1''\phi_1 + c_1'\phi_1' + c_1'\phi_1' + c_1\phi_1'' + c_2''\phi_2 + c_2'\phi_2' + c_1'\phi_2' + c_2\phi_2'' + a_1(c_1'\phi_1 + c_1\phi_1' + c_2'$$

Reordemos la expresión anterior

$$(c_1''\phi_1+c_1'\phi_1'+c_2''\phi_2+c_2'\phi_2')+c_1\phi_1''+c_1'\phi_1'+c_2'\phi_2'+c_2\phi_2''+a_1(c_1'\phi_1+c_2'\phi_2)+a_1($$

$$=0+c_1(\phi_1''+a_1\phi_1'+a_0\phi_1)+c_2(\phi_2''+a_1\phi_2'+a_0\phi_2)+c_1'\phi_1'+c_2'\phi_2'=0+c_1{,}0+c_2$$

Este método nos permite hallar una solución particular.
La solución general se completará calculando las soluciones de la ecuación homogénea asociada.

Observemos que este método no tiene restricciones acerca de la f como pasaba con el método anterior. Siempre que podamos resolver el sistema (11) podremos hallar un y_p.

Resolvamos un ejercicio utilizando este procedimiento.

Ejercicio

Hallar todas las soluciones de la ecuación

$$y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = t$$

Las soluciones de la ecuación homogénea asociada son :
$\phi_1(x) = e^{2t}$, $\phi_2(x) = e^{3t}$ por lo que el sistema (11) resulta

$$\begin{cases} c_1' e^{2t} + c_2' e^{3t} & = 0 \\ c_1' 2e^{2t} + c_2' 3e^{3t} & = t \end{cases}$$

de donde resulta (segunda fila-2 primera fila) $c_2' = te^{-3t}$.

Integrando llegamos a $c_2(t) = -\frac{1}{3}te^{-3t} - \frac{1}{9}e^{-3t}$.
Como de la primera ecuación sabemos que
$c_1'(t) = -c_2'(t)e^{3t}/e^{2t} = -te^{-2t}$.
Integrando llegamos a

$$c_1(t) = -\frac{t}{2}e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t}$$

Una solución particular de la ecuación es

$$y_p(t) = c_1(t)e^{2t} + c_2(t)e^{3t} = -\frac{t}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}t - \frac{1}{9} = -\frac{5}{6}t - \frac{13}{36}$$

La solución general de la ecuación es entonces

$$y_G(t) = -\frac{5}{6}t - \frac{13}{36} + Ae^{2t} + Be^{3t}, \; \forall A, B \in \mathbb{R}$$