

# Transformaciones Lineales

Episodio 11. Rotaciones en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ , Proyecciones, Simetrías.

Álgebra Lineal  
mfiuba@gmail.com

Departamento de Matemática  
FIUBA

31 de mayo de 2020

# Producto Escalar y Ángulo en $\mathbb{R}^n$

Si  $X, Y \in \mathbb{R}^n$  se define producto escalar entre  $X$  e  $Y$ :

$$X \cdot Y = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = X^T Y$$

Si  $X$  e  $Y$  son dos vectores no nulos en  $\mathbb{R}^n$  se dice que  $\theta$  es **el ángulo** que forman  $X$  e  $Y$  si :

$$\cos(\theta) = \frac{X \cdot Y}{\|X\| \|Y\|}, \text{ con } 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Se nota  $\alpha(X, Y) = \theta$

## Rotación en $\mathbb{R}^2$

La rotación de un vector en el plano es el resultado de aplicar un movimiento que queda determinado por un **centro** y un **ángulo** sin cambiar su longitud. El centro es el punto alrededor del cual **se gira** el vector a lo largo de un ángulo, que llamaremos ángulo de giro.

El **centro** de las rotaciones con las que vamos a trabajar siempre será el origen de  $\mathbb{R}^2$  y el ángulo se medirá como positivo cuando se gira en sentido contrario a las agujas del reloj.

Empecemos entonces por definir una transformación lineal  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de manera tal que gire en un ángulo  $\theta$  a cada vector de la base canónica y después verifiquemos que, efectivamente, estamos obteniendo la fórmula de una función que aplica una rotación a cada vector de  $\mathbb{R}^2$ .

Tomando la base canónica en  $\mathbb{R}^2$  tendremos que definir una tl  $R$ :

$$R\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ con } a^2 + b^2 = 1$$

$$R\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = w = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{ con } c^2 + d^2 = 1$$

Buscamos que el ángulo formado por los vectores  $v$  con  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $w$  con  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  sea  $\theta$ , entonces escribimos:

$$\cos(\theta) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}{1 \cdot 1} = a \Rightarrow a = \cos(\theta) \Rightarrow b^2 = 1 - a^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow b^2 = 1 - \cos^2(\theta) \Rightarrow b = \pm \sin(\theta)$ , como se debe cumplir que el giro es de un ángulo menor o igual a  $\pi \Rightarrow$  el vector  $v$  está en el primer o segundo cuadrante  $\Rightarrow b \geq 0 \Rightarrow b = \sin(\theta)$ .

$$\cos(\theta) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}{1 \cdot 1} = a \Rightarrow a = \cos(\theta) \Rightarrow b^2 = 1 - a^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow b^2 = 1 - \cos^2(\theta) \Rightarrow b = \pm \sin(\theta)$ , como se debe cumplir que el giro es de un ángulo menor o igual a  $\pi \Rightarrow$  el vector  $v$  está en el primer o segundo cuadrante  $\Rightarrow b \geq 0 \Rightarrow b = \sin(\theta)$ .

Análogamente, con  $R\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$  queda:

$$d = \cos(\theta) \text{ y como } c^2 = 1 - d^2 = 1 - \cos^2(\theta) \Rightarrow c = \pm \sin(\theta)$$

Ahora, si estamos rotando el vector  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  en un ángulo  $\theta \leq \pi$  siempre deberá cumplirse que  $c \leq 0 \Rightarrow c = -\sin(\theta)$

Entonces resumiendo tenemos:

$$R\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \end{pmatrix}$$

$$R\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\text{sen}(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Entonces la transformación que estamos buscando, ya quedó definida en la base canónica de  $\mathbb{R}^2$  y podemos encontrar su expresión general:

$$R\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 R\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + x_2 R\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$R\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -\text{sen}(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Podemos expresar más comodamente la transformación lineal a través de su matriz con respecto a la base canónica:

$$R\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Es cuestión de hacer cuentas verificar que efectivamente  $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  se cumple que :

$$\alpha \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \theta$$

Sólo se trata de desarrollar las cuentas con voluntad.

## Rotación en $\mathbb{R}^3$

El movimiento de rotación queda definido como el movimiento que aplica un ángulo de giro a los vectores de un plano, alrededor de un eje, ortogonal a dicho plano. (El ángulo se considera positivo cuando el giro es en sentido contrario a las agujas del reloj.)

## Rotación en $\mathbb{R}^3$

El movimiento de rotación queda definido como el movimiento que aplica un ángulo de giro a los vectores de un plano, alrededor de un eje, ortogonal a dicho plano. (El ángulo se considera positivo cuando el giro es en sentido contrario a las agujas del reloj.)

Vamos a presentar explícitamente los casos más sencillos, que serían las rotaciones de ángulo  $\theta$  en sentido positivo alrededor de cada uno de los ejes coordenados.

Para cada caso, tal como hicimos para  $R^2$  definiremos la transformación lineal, sobre la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ , para cada una de las siguientes rotaciones:

- ▶ Rotación de ángulo  $\theta$  en sentido positivo del plano  $xy$  alrededor del eje  $z$ .
- ▶ Rotación de ángulo  $\theta$  en sentido positivo del plano  $xz$  alrededor del eje  $y$ .
- ▶ Rotación de ángulo  $\theta$  en sentido positivo del plano  $yz$  alrededor del eje  $x$ .

- ▶ Rotación de ángulo  $\theta$  en sentido positivo del plano  $xy$  alrededor del eje  $z$ .

Obviamente vamos a usar lo que ya trabajamos para  $\mathbb{R}^2$ .

Sabemos que el vector  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  quedará fijo y los vectores canónicos del eje  $x$  y el eje  $y$  rotarán en el plano  $xy$ , en sentido antihorario, como antes:

$$R \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{sen}(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la matriz de rotación de ángulo  $\theta$  alrededor del eje  $z$  :

$$R_{\theta,z} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De la misma forma, podemos obtener las matrices de rotación de ángulo  $\theta$ , en sentido positivo, con respecto al eje x y con respecto al eje y, respectivamente:

$$R_{\theta,x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$R_{\theta,y} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

# Proyectores

Vamos a definir proyector, formalmente, como un endomorfismo ( $\Pi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ ) en cualquier espacio vectorial  $\mathbb{V}$  que cumple:

$$\Pi \circ \Pi = \Pi$$

Empecemos por algunas observaciones:

a **Si  $w \in \text{Im}(\Pi) \Rightarrow \Pi(w) = w$ .**

Pues si  $w \in \text{Im}(\Pi) \Rightarrow \exists v \in \mathbb{V} / \Pi(v) = w$

Como  $\Pi \circ \Pi = \Pi \Rightarrow (\Pi \circ \Pi)(v) = \Pi(v)$

$\Pi(\Pi(v)) = \Pi(v)$ , reemplazando  $\Pi(v)$  por  $w$ , queda:

$\Pi(w) = w; \forall w \in \text{Im}(\Pi)$ . ✓

b  $\boxed{\text{Nu}(\Pi) \oplus \text{Im}(\Pi) = \mathbb{V}}$

Supongamos que  $v \in \text{Nu}(\Pi) \cap \text{Im}(\Pi)$ .

Entonces, como  $v \in \text{Im}(\Pi) \Rightarrow \Pi(v) = v$ .

Como  $v \in \text{Nu}(\Pi) \Rightarrow \Pi(v) = 0_{\mathbb{V}} \Rightarrow v = 0_{\mathbb{V}}$

b  $\boxed{\text{Nu}(\Pi) \oplus \text{Im}(\Pi) = \mathbb{V}}$

Supongamos que  $v \in \text{Nu}(\Pi) \cap \text{Im}(\Pi)$ .

Entonces, como  $v \in \text{Im}(\Pi) \Rightarrow \Pi(v) = v$ .

Como  $v \in \text{Nu}(\Pi) \Rightarrow \Pi(v) = 0_{\mathbb{V}} \Rightarrow v = 0_{\mathbb{V}}$

Con esto demostramos que  $\text{Nu}(\Pi)$  e  $\text{Im}(\Pi)$  están en suma directa, para ver que su suma es  $\mathbb{V}$ , basta con aplicar el teorema de las dimensiones de  $\text{Nu}(T)$  e  $\text{Im}(T)$  para  $T$  transformación lineal.

$$\dim(\text{Nu}(\Pi)) + \dim(\text{Im}(\Pi)) = \dim(\mathbb{V})$$

$$\text{y } \text{Nu}(\Pi) \oplus \text{Im}(\Pi) \subseteq \mathbb{V} \Rightarrow \text{Nu}(\Pi) \oplus \text{Im}(\Pi) = \mathbb{V}.$$



## Propiedad

En lo que sigue:  $\mathbb{V}$  es un  $\mathbb{K}$  espacio vectorial y  $S_1$  y  $S_2$  subespacios de  $\mathbb{V}$ , tal que  $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{V}$

1.  $\Pi_{S_1 S_2} + \Pi_{S_2 S_1} = I_{\mathbb{V}}$

Como

$S_1 \oplus S_2 = \mathbb{V} \Rightarrow \forall v \in \mathbb{V}, \exists n$  únicos  $v_1, v_2$  tal que  $v = v_1 + v_2$ .

Entonces:

$$\begin{aligned}\Pi_{S_1 S_2}(v) &= \Pi_{S_1 S_2}(v_1 + v_2) \\ &= \Pi_{S_1 S_2}(v_1) + \Pi_{S_1 S_2}(v_2) \\ &= v_1 + 0_{\mathbb{V}} = v_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_{S_2 S_1}(v) &= \Pi_{S_2 S_1}(v_1 + v_2) \\
 &= \Pi_{S_2 S_1}(v_1) + \Pi_{S_2 S_1}(v_2) \\
 &= 0_{\mathbb{V}} + v_2 = v_2
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 [\Pi_{S_1 S_2} + \Pi_{S_2 S_1}](v) &= \Pi_{S_1 S_2}(v) + \Pi_{S_2 S_1}(v) \\
 &= v_1 + v_2 = v \quad \forall v \in \mathbb{V}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_{S_1 S_2} + \Pi_{S_1 S_2} &= I_{\mathbb{V}} \checkmark \\
 \Pi_{S_1 S_2} &= I_{\mathbb{V}} - \Pi_{S_2 S_1}
 \end{aligned}$$

# Simetría

En base a la proyección, podemos encontrar rápidamente la fórmula para definir la **Simetría con respecto a  $S_1$  en la dirección de  $S_2$** :

$\sum_{S_1 S_2}(v) = v - 2\Pi_{S_2 S_1}(v)$  Es directo ver que:

- ▶  $\sum_{S_1 S_2}(v) = v \quad \forall v \in S_1$
- ▶  $\sum_{S_1 S_2}(v) = -v \quad \forall v \in S_2$

Por lo tanto resultará muy sencillo definir la simetría sobre una base de  $\mathbb{V}$  que contenga simultáneamente una base de  $S_1$  y de  $S_2$ .

## Algunos Ejemplos

- ▶ Hallar la proyección de  $\mathbb{R}^3$  sobre el plano

$$S_1 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{en la dirección de la recta dada}$$

$$\text{por } S_2 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Tal como vimos, la proyección buscada será una transformación lineal, que tiene como Núcleo el subespacio  $S_2$  y como Imagen el subespacio  $S_1$ . Definimos la transformación lineal sobre la base de  $\mathbb{R}^3$ :

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Definimos:

$$T((1\ 1\ 1)^T) = (1\ 1\ 1)^T$$

$$T((1\ 2\ 0)^T) = (1\ 2\ 0)^T$$

$$T((1\ 2\ 1)^T) = (0\ 0\ 0)^T$$

Con esto, la transformación lineal que buscamos queda definida. Si queremos encontrar su fórmula, en función de las coordenadas de un vector en la base canónica, un camino posible es:

$$X \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow X =$$

$$\alpha(1\ 1\ 1)^T + \beta(1\ 2\ 0)^T + \gamma(1\ 2\ 1)^T; \text{ con } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Resolvemos el sistema que queda de igualar coordenada a coordenada, triangulando la matriz correspondiente:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 2 & 2 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & x_3 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & -1 & 0 & x_3 - x_1 \end{array} \right)$$

Obtenemos:

$$\alpha = 2x_1 - x_2;$$

$$\beta = x_1 - x_3;$$

$$\gamma = -2x_1 + x_2 + x_3.$$

y queda:

$$\begin{aligned} T(x_1 \ x_2 \ x_3) &= (2x_1 - x_2)T((1 \ 1 \ 1)^T) + (x_1 - x_3)T((1 \ 2 \ 0)^T) \\ &\quad + (-2x_1 + x_2 + x_3)T((1 \ 2 \ 1)^T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T((x_1 \ x_2 \ x_3)^T) &= (2x_1 - x_2)(1 \ 1 \ 1)^T + (x_1 - x_3)(1 \ 2 \ 0)^T \\ &\quad + (-2x_1 + x_2 + x_3)(0 \ 0 \ 0)^T \end{aligned}$$

Finalmente obtenemos:

$$T \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 - x_3 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

De paso, obtuvimos:

$$[T]_E^E = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E \text{ la base canónica de } \mathbb{R}^3$$

Para hallar  $[T]_E^E$  también podríamos haber buscado  $[T]_B^B$  y después multiplicar a izquierda y derecha por los cambios de base adecuados. (*Tarea para la noche insomne.*)

- Hallar la matriz respecto de la base canónica, de la simetría de  $\mathbb{R}^3$  con respecto a  $S_1 = \{(x_1 \ x_2 \ x_3)^T / 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ , en la dirección de la recta  $S_2 = \text{gen} \{(1 \ 1 \ 1)^T\}$ .

Como dijimos antes, la forma más simple de definir una isometría es definir cuanto vale en una base de  $\mathbb{R}^3$  que contiene simultáneamente una base de  $S_1$  y de  $S_2$ . Primero entonces buscamos una base de  $S_1$ . Para encontrar los generadores, de la ecuación que define a  $S_1$  sacamos que  $x_3 = 2x_1 + x_2$  y  $S_1 = \text{gen} = \{(1 \ 0 \ 2)^T, (0 \ 1 \ 1)^T\}$  (estos vectores son l.i.) El generador de  $S_2$  es l.i. con los generadores de  $S_1$ , pues no cumple con la ecuación que define a  $S_1$ . Así que :

$B = \{(1 \ 0 \ 2)^T, (0 \ 1 \ 1)^T, (1 \ 1 \ 1)^T\}$  es una base de  $\mathbb{R}^3$ .

Sobre esta base es muy sencillo definir la simetría:

$$F((1 \ 0 \ 2)^T) = (1 \ 0 \ 2)^T;$$

$$F((0 \ 1 \ 1)^T) = (0 \ 1 \ 1)^T;$$

$$F((1 \ 1 \ 1)^T) = -(1 \ 1 \ 1)^T.$$

Aquí ya tenemos definida la simetría que buscamos sobre la base  $B$  y la matriz con respecto a este base es:

$$[F]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si queremos hallar  $[F]_E^E$ , tenemos:

$$[F]_E^E = M_B^E [F]_B^B M_E^B$$

$$M_B^E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M_E^B = (M_B^E)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$[F]_E^E = M_B^E [F]_B^B M_E^B$$

Reemplazamos:

$$[F]_E^E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$[F]_E^E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{S_1 S_2} \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \checkmark$$