Producto Interno

Introducción

Definición

Un *producto interno* en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{K}$ que cumple los siguientes axiomas:

1. Para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x, y, z \in \mathbb{V}$:
   (a) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
   (b) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
3. $\langle x, x \rangle > 0$ si $x \neq 0_{\mathbb{V}}$

Observaciones

1. Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se dice que $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un *espacio euclídeo real* y cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ se dice que $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un *espacio euclídeo complejo*.

2. El axioma 3 necesita una aclaración cuando el cuerpo de escalares es complejo: el axioma 2 implica que $\langle x, x \rangle = \overline{\langle x, x \rangle}$ y por lo tanto el escalar $\langle x, x \rangle$ es un número real y tiene sentido decir que es mayor que cero.

3. El axioma 1. (b) nos indica cómo proceder cuando el escalar está a la izquierda pero no a la derecha; entonces, si éste es el caso: $\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\langle \lambda y, x \rangle} = \overline{\lambda \langle y, x \rangle} = \overline{\lambda}\ \overline{\langle y, x \rangle} = \overline{\lambda}\ \langle x, y \rangle$.

4. $\forall x \in \mathbb{V}$: $\langle 0_{\mathbb{V}}, x \rangle = \langle 0_{\mathbb{K}} x, x \rangle = 0_{\mathbb{K}} \langle x, x \rangle = 0_{\mathbb{K}}$. De esta observación y del axioma 3, resulta que $\forall x \in \mathbb{V} : \langle x, x \rangle = 0_{\mathbb{K}} \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{V}}$.

Ejemplo

$\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ definido por: $\langle x, y\rangle = y^* x$, donde $y^* = \overline{y^T}$ se llama *producto interno canónico* en $\mathbb{K}^n$.

1. Para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x, y, z \in \mathbb{K}^n$:

   (a) $\langle x + y, z\rangle$ por definición del producto interno
   $= z^*(x + y) = \overline{z^T}(x + y)$ por propiedades del producto de matrices
   $= \overline{z^T}x + \overline{z^T}y = z^*x + z^*y = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

   (b) $\langle \lambda x, y\rangle$ por definición del producto interno
   $= y^*(\lambda x)$ por propiedad del producto de escalar por matriz
   $= \overline{y^T}(\lambda x) = \lambda \overline{y^T} x = \lambda y^* x$ por definición del producto interno
   $= \lambda \langle x, y\rangle$

2. Para cada $\lambda \in \mathbb{K}^n$ $\langle x, y\rangle = y^* x$ por definición del producto interno; y como el producto interno es un escalar:
   $= (y^*x)^T = x^T\,(y^*)^T = \overline{\overline{x^T\bar{y}}}$ por propiedades del producto de matrices y de la conjugación
   $= \overline{x^*\overline{\overline{y}}} = \overline{x^*y} = \overline{\langle y, x\rangle}$ por la definición del producto interno.

3. Para cada $x \in \mathbb{K}^n$ $\langle x, x\rangle = \overline{\langle x, x\rangle}$. Por lo tanto, $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$ y, por definición del producto interno, $\langle x, x\rangle = \overline{x^T} x = \overline{x}^T x = |x_1|^2 + \cdots |x_n|^2 > 0$ si $x \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ (recordar que el módulo de un número complejo es un número real positivo si dicho número no es el $0_{\mathbb{C}}$.).
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\langle x, x\rangle = x^T x = x_1^2 + \cdots x_n^2 > 0$ si $x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$

Por ejemplo, sean $\mathbb{V} = \mathbb{C}^2$ y los vectores

$$x = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ -2-\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 2\mathrm{i} \\ 3-\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$$\langle x, y\rangle = \begin{pmatrix} -2\mathrm{i} & 3+\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ -2-\mathrm{i} \end{pmatrix} = -3-7\mathrm{i}$$

$$\langle y, x\rangle = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & -2+\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\mathrm{i} \\ 3-\mathrm{i} \end{pmatrix} = -3+7\mathrm{i} = \overline{\langle x, y\rangle}$$

Ejemplo

Si $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$, $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^T$, $y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}^T$ tal que $\langle x, y \rangle = x_1 y_1$ no es un producto interno porque si $x = \begin{pmatrix} 0 & x_2 \end{pmatrix}^T$, con $x_2 \neq 0$ se tiene que $\langle x, x \rangle = 0.0 = 0$ y $x \neq 0_{\mathbb{R}^2}$.

El producto interno canónico en otros espacios vectoriales

Otros productos internos en diversos espacios vectoriales:

En $\mathbb{R}_n[x], \mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\mathrm{d}t, \quad \forall p, q \in \mathbb{R}_n[x]$$

En $\mathbb{K}^{n \times n}$:

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}\left(B^* A\right), \quad \forall A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

La matriz del producto interno

Dado un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{V}$ de dimensión finita n y $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ la *matriz de Gram*, denotada G_B, tal que

$$G_B = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_2, v_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \langle v_n, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix}$$

determina unívocamente el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en una base de $\mathbb{V}$ y se la llama *matriz del producto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *en la base* B.

Dados dos vectores $u, v \in \mathbb{V}$, si sus respectivos vectores de coordenadas en la base B son $[u]_B$ y $[v]_B$ es posible calcular el producto interno entre u y v empleando la matriz de Gram de la siguiente manera:

$$\langle u, v\rangle = [u]_B^T \; G_B \; \overline{[v]}_B$$

En efecto, si $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, $v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j$,

$$\langle u, v\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, v \right\rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, v\rangle \underbrace{=}_{\text{axioma } 1(a)}$$

$$= \langle \alpha_1 v_1, v\rangle + \cdots + \langle \alpha_n v_n, v\rangle \underbrace{=}_{\text{axioma } 1(b)}$$

$$= \alpha_1 \langle v_1, v\rangle + \cdots + \alpha_n \langle v_n, v\rangle =$$

$$= \alpha_1 \left\langle v_1, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \right\rangle + \cdots + \alpha_n \left\langle v_n, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \right\rangle =$$

$$= \alpha_1 \langle v_1, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n \rangle + \cdots + \alpha_n \langle v_n, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n \rangle =$$

$$= \alpha_1 \left(\langle v_1, v_1 \rangle \overline{\beta_1} + \cdots + \langle v_1, v_n \rangle \overline{\beta_n} \right) + \cdots + \alpha_n \left(\langle v_n, v_1 \rangle \overline{\beta_1} + \cdots + \langle v_n, v_n \rangle \overline{\beta_n} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_2, v_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \langle v_n, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\beta_1} \\ \vdots \\ \overline{\beta_n} \end{pmatrix}$$

$$= [u]_B^T \; G_B \; \overline{[v]}_B = \overline{[v]_B^T} \; G_B \; [u]_B = [v]_B^* \; G_B \; [u]_B$$

Propiedades de la matriz de un producto interno

1. Si G es la matriz de un producto interno, entonces $G_{ij} = \overline{G_{ij}}, \forall i,j.$, es decir, G es *hermítica*. Sin embargo esta condición no es suficiente. Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ no puede ser la matriz del producto interno en ninguna base, ya que si v es el primer elemento de la base, sería $\langle v, v \rangle = 0$.

2. La expresión $\langle u, v \rangle = u^T G \overline{v}$ define un producto interno en $\mathbb{K}^n$ si y sólo si la matriz G es hermítica y definida positiva, es decir, $\forall u \in \mathbb{K}^n : u^T G \overline{u} > 0$, si $u \neq 0_{\mathbb{K}^n}$.

Por ejemplo, si $G = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta) \\ \cos(\theta) & 1 \end{pmatrix}$, con $\theta \in (0, \pi)$ se cumple que $\forall x = (x_1 \quad x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$x^T \begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta) \\ \cos(\theta) & 1 \end{pmatrix} x = x_1^2 + 2x_1x_2\cos(\theta) + x_2^2$ completando cuadrados:

$= \underbrace{(x_1 + x_2\cos(\theta))^2}_{>0,\ x \neq 0_{\mathbb{R}^2}} + \underbrace{x_2^2\left(1 - \cos^2(\theta)\right)}_{>0,\ 0<\theta<\pi,\ x \neq 0_{\mathbb{R}^2}} > 0$; y como G es simétrica, la expresión $\langle x, y \rangle = x^T G y$ define un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

3. Cada elemento de la diagonal principal es positivo por el axioma 3 del producto interno: $\langle v_i, v_i\rangle > 0$ y $\langle v_i, v_i\rangle = 0 \Leftrightarrow v_i = 0_{\mathbb{V}}$ y $v_i \neq 0_{\mathbb{V}}$ por ser parte de una base.

4. La matriz del producto interno es regular.

Verificamos las propiedades con otro ejemplo: sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}_1[x]$, el producto interno $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x$ y la base $B = \{1, x\}$. Calculamos la matriz del producto interno en la base B:

$$\langle 1, 1\rangle = \int_0^1 \mathrm{d}x = x|_0^1 = 1; \quad \langle 1, x\rangle = \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}; \quad \langle x, x\rangle = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Luego $G_B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, que verifica $G_B^T = G_B, \det(G_B) = \frac{1}{12} > 0$ y los elementos de la diagonal principal son positivos.

Norma inducida por un producto interno

Todo espacio euclídeo $\mathbb{V}$ se convierte en un espacio normado si se define una función, denominada *norma inducida* por el producto interno, tal que

$$\|\cdot\| : \mathbb{V} \to \mathbb{R}_0^+ : \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \forall x \in \mathbb{V}$$

Por ejemplo, sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}_1[x]$ y el producto interno $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x$. Calculamos la norma del vector $p(x) = x$:

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Luego $\|x\| = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Propiedades de la norma

1. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbb{V} : \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

   Demostración. En base a los axiomas de producto interno y la definición de norma:

$$\|\alpha x\|^2 = \langle \alpha x, \alpha x \rangle = \alpha \bar{\alpha} \langle x, x \rangle = |\alpha|^2 \langle x, x \rangle = |\alpha|^2 \|x\|^2 \Leftrightarrow \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

2. $\forall x \in \mathbb{V} : \|x\| \geq 0 \wedge \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{V}}$

   Demostración.

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} > 0 \text{ si y sólo si } x \neq 0_{\mathbb{V}}$$

$$\text{y} \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\langle 0_{\mathbb{V}}, 0_{\mathbb{V}} \rangle} = \sqrt{0} = 0 \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{V}}$$

3. Desigualdad de Cauchy-Schwarz: $\forall x, y \in \mathbb{V} : |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$

Demostración. Sean $y \neq 0_{\mathbb{V}}$, y el vector $\quad x - \dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y$

y calculemos el cuadrado de su norma:

$$0 \leq \left\| x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y \right\|^2 = \left\langle x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y, x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y \right\rangle =$$

$$= \langle x, x\rangle - \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle y, y\rangle} \langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \langle y, x\rangle + \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle y, y\rangle} \langle y, y\rangle =$$

$$= \|x\|^2 - \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\|y\|^2} \langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2} \langle y, x\rangle + \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\|y\|^2} \langle x, y\rangle =$$

$$= \|x\|^2 - \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\|y\|^2} \langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2} \overline{\langle x, y\rangle} + \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\|y\|^2} \langle x, y\rangle =$$

observar que los dos últimos términos tienen signos opuestos:

$$= \|x\|^2 - \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\|y\|^2} \langle x, y\rangle$$

finalmente:

$$0 \leq \|x\|^2 - \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\|y\|^2} \langle x, y\rangle \Leftrightarrow \|x\|^2 \|y\|^2 \leq \overline{\langle x, y\rangle} \langle x, y\rangle \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|x\| \|y\| \leq |\langle x, y\rangle|$$

Si $y = 0_{\mathbb{V}}$ la desigualdad se cumple: $|\langle x, 0_{\mathbb{V}}\rangle| \leq \|x\| \|0_{\mathbb{V}}\| = 0$

4. Desigualdad triangular: $\forall x, y \in \mathbb{V} : \|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Demostración. $\|x \pm y\|^2 = \langle x \pm y, x \pm y\rangle = \|x\|^2 \pm \langle x, y\rangle \pm \langle y, x\rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 \pm \langle x, y\rangle \pm \overline{\langle x, y\rangle} + \|y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2$

como se trata de números reales: $\mathrm{Re}\langle x, y\rangle \leq |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$

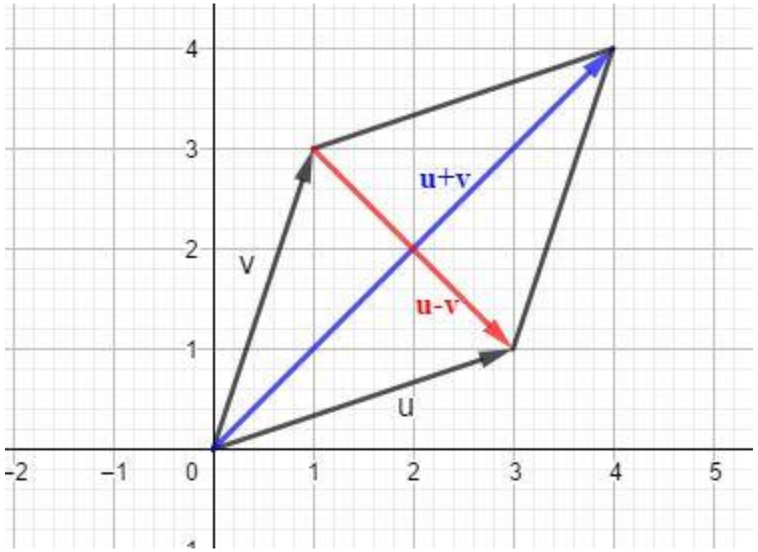
Entonces, $\|x \pm y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \Leftrightarrow \|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Identidad del paralelogramo

1. Para una norma dada $\|\cdot\|$ en un espacio vectorial $\mathbb{V}$, existe un producto interno en $\mathbb{V}$, tal que $\langle v, v\rangle = \|v\|^2$, si y sólo si se cumple la identidad del paralelogramo

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

Geométricamente significa que en un paralelogramo la suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales es igual al doble de la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados.



2. Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial en el cual la norma $\|\cdot\|$ satisface la identidad del paralelogramo se cumple que la función

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$$

es un producto interno en $\mathbb{V}$, tal que $\langle v, v\rangle = \|v\|^2$. La identidad se deduce de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \qquad (1) \\ \|u-v\|^2 &= \langle u-v, u-v\rangle = \|u\|^2 - 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \qquad (2) \end{aligned}$$

Restando (2) de (1) se obtiene que $\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4\langle u, v\rangle$.
Este resultado, llamado *forma polar de* $\langle u, v\rangle$ muestra que el producto interno puede obtenerse a partir de la norma. Lo ilustramos con un ejemplo:

Hallar un producto interno en $\mathbb{R}^2$ tal que el triángulo de vértices $(0,0),(1,0),(0,1)$ sea equilátero.
Llamemos $u = (1 \quad 0)^T$ y $v = (0 \quad 1)^T$. Entonces $u+v = (1 \quad 1)^T$ y $u-v = (1 \quad -1)^T$.

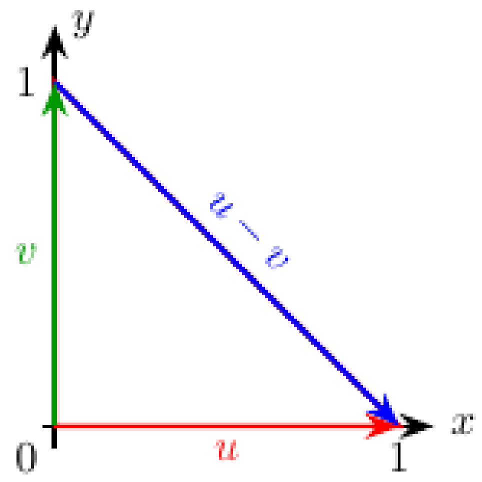
Si debe ser, según vemos en la figura, $\|u-v\| = \|u\| = \|v\|$ para que el triángulo sea equilátero, reemplazamos estas condiciones en la expresión de la ley del paralelogramo:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2; \quad \|u+v\|^2 = 3\|u\|^2$$

Reemplazando ahora en la identidad de polarización:

$$\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4\langle u,v\rangle; \quad 2\|u\|^2 = 4\langle u,v\rangle$$

es decir, el producto interno debe verificar: $\langle u,u\rangle = 2\langle u,v\rangle$



Según la matriz del producto interno en la base canónica de $\mathbb{R}^2$:

$$G_{E_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} \langle u, u\rangle & \langle u, v\rangle \\ \langle u, v\rangle & \langle v, v\rangle \end{pmatrix}$$

siendo, en este ejemplo, $u = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}^T$ y $v = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}^T$ entonces, un producto interno que verifica es:

$$\langle u, v\rangle = u^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} v, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^2$$

En efecto: $\|u\|^2 = \langle u, u\rangle = 2 \Rightarrow \|u\| = \|v\| = \sqrt{2}$
$\|v\|^2 = \langle v, v\rangle = 2 \Rightarrow \|v\| = \sqrt{2}$
$\|u - v\|^2 = \langle u - v, u - v\rangle = 2 \Rightarrow \|u - v\| = \sqrt{2}$

3. Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial en el cual la norma $\|\cdot\|$ satisface la identidad del paralelogramo se cumple que la función

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + \mathrm{i}\|u+\mathrm{i}v\|^2 - \mathrm{i}\|u-\mathrm{i}v\|^2\right)$$

es un producto interno en $\mathbb{V}$, tal que $\langle v, v\rangle = \|v\|^2$. La identidad se deduce de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle = \|u\|^2 + 2\ \mathrm{Re}\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \qquad (3) \\ \|u-v\|^2 &= \langle u-v, u-v\rangle = \|u\|^2 - 2\ \mathrm{Re}\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \qquad (4) \end{aligned}$$

Restando (4) de (3) se obtiene que

$$\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4\ \mathrm{Re}\langle u, v\rangle \qquad (5)$$

Del mismo modo:

$$\begin{aligned}
\|u+\mathrm{i}v\|^2 &= \langle u+\mathrm{i}v, u+\mathrm{i}v\rangle = \|u\|^2 + 2\ \mathrm{Im}\langle u,v\rangle + \|v\|^2 && (6)\\
\|u-\mathrm{i}v\|^2 &= \langle u-\mathrm{i}v, u-\mathrm{i}v\rangle = \|u\|^2 - 2\ \mathrm{Im}\langle u,v\rangle + \|v\|^2 && (7)
\end{aligned}$$

multiplicando ambos miembros de (6) y (7) por i y restando estas expresiones resulta:

$$\mathrm{i}\|u+\mathrm{i}v\|^2 - \mathrm{i}\|u-\mathrm{i}v\|^2 = 4\mathrm{i}\ \mathrm{Im}\langle u,v\rangle \qquad (8)$$

sumando las expresiones (5) y (8):

$$\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + \mathrm{i}\|u+\mathrm{i}v\|^2 - \mathrm{i}\|u-\mathrm{i}v\|^2 = 4\ \mathrm{Re}\langle u,v\rangle + 4\mathrm{i}\ \mathrm{Im}\langle u,v\rangle = 4\langle u,v\rangle$$

es decir:

$$\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$$

Ángulo entre vectores

Sean x e y dos vectores no nulos en un espacio euclídeo real. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

$$-\|x\|\|y\| \leq \langle x, y\rangle \leq \|x\|\|y\|$$

$$-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1$$

Entonces

$$\cos(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Por ejemplo, calculemos el ángulo entre las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ con el producto interno definido en $\mathbb{R}^{2\times 2}$ por: $\langle X, Y \rangle = \operatorname{tr}\left(Y^T X\right)$

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}\left(B^T A\right) = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\langle A, A \rangle = \operatorname{tr}\left(A^T A\right) = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\langle B, B \rangle = \operatorname{tr}\left(B^T B\right) = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\cos(\theta) = \frac{\langle A, B \rangle}{\|A\|\|B\|} \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Ortogonalidad de vectores

En un espacio euclídeo dos vectores son ortogonales si el producto interno entre ellos es igual a cero.

Por ejemplo, sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}_1[x]$ y el producto interno $\langle p, q\rangle = \int_0^2 p(x)q(x)\mathrm{d}x$;

los vectores $p(x) = 1, q(x) = x - 1$ son ortogonales porque

$$\langle 1, x-1\rangle = \int_0^2 (x-1)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 - x\Big|_0^2 = 0$$

Observaciones

1. Si x es ortogonal a y para $x \neq 0_{\mathbb{V}}, y \neq 0_{\mathbb{V}}$ entonces $\theta = \frac{\pi}{2}$.

2. Si el conjunto x, y es linealmente dependiente en $\mathbb{V}$ entonces $\theta = 0 \vee \theta = \pi$.

3. $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos(\theta)$.

Conjunto ortogonal de vectores

Un subconjunto A de un $\mathbb{K}$-espacio euclídeo $\mathbb{V}$ es un conjunto *ortogonal* si $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ para todo par de elementos x_i, x_j de A, con $i \neq j$.

Un conjunto ortogonal se llama *ortonormal* si cada uno de sus elementos tiene norma 1: $\|x_i\| = 1, \ \forall x_i \in A$.

Observación: El elemento $0_{\mathbb{V}}$ es ortogonal a todo elemento de $\mathbb{V}$. Asimismo es el único elemento ortogonal a sí mismo.

Ejemplos:

1. Las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ ó $\mathbb{C}^n$ son conjuntos ortonormales con sus respectivos productos internos canónicos.
2. En $\mathbb{R}_1[x]$, la base canónica $\{1, x\}$ no es un conjunto ortogonal con el producto interno $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x$:
   En efecto:
$$\langle 1, x \rangle = \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \neq 0$$

¿Cómo construir un conjunto ortogonal de vectores?

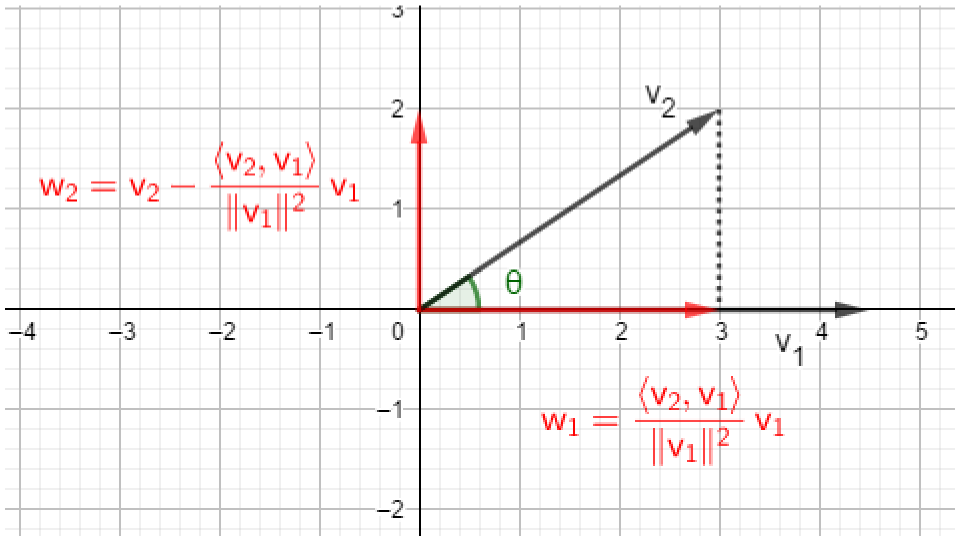
Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio euclídeo y $B = \{v_1, v_2\}$ una base de $\mathbb{V}$. Queremos hallar, a partir de B, una base ortogonal $B' = \{w_1, w_2\}$, de modo que w_1 sea ortogonal a w_2 con el producto interno dado.

A partir del vector v_1 queremos un vector $w_1 = \alpha v_1$ de modo que sea ortogonal a $w_2 = v_2 - \alpha v_1$, según el gráfico adjunto. Entonces $\langle v_2 - \alpha v_1, v_1\rangle = 0$. Aplicando propiedades del producto interno resulta: $\langle v_2, v_1\rangle - \alpha\langle v_1, v_1\rangle = 0$. Luego:

$$\alpha = \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}$$

$$w_1 = \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1$$



Observar que si $\theta \in (0, \pi/2)$