Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

J.L. Mancilla Aguilar

1. Sistemas de ecuaciones diferenciales

A lo largo de estas notas consideraremos *sistemas de ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes*, es decir, sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1' & = & a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + f_1(t) \\ & \vdots & \\ y_n' & = & a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + f_n(t) \end{array}\right. ,$$

donde las funciones diferenciables $y_1, \ldots, y_n$ son las incógnitas, los coeficientes a_{ij} son constantes y las funciones $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ están definidas en un intervalo $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ y son continuas allí.

El sistema anterior se puede escribir en forma matricial

$$Y' = AY + F(t) \tag{1}$$

considerando

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}, \quad Y'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}.$$

Por ejemplo, el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1' & = & 2y_1 + y_2 - t \\ y_2' & = & -y_1 + 3y_2 + \cos(t) \end{array}\right. ,$$

es equivalente a la ecuación diferencial matricial

$$Y' = AY + F(t)$$

con

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \quad Y'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad F(t) = \begin{bmatrix} -t \\ \cos(t) \end{bmatrix}.$$

El sistema (1) se denomina homogéneo si $F(t) \equiv 0$ y no homogéneo en otro caso.

Una *solución* de (1) es una función $\Phi : \mathcal{J} \to \mathbb{C}^n$ con $\mathcal{J}$ un intervalo, $\Phi(t) = [\phi_1(t) \cdots \phi_n(t)]^t$ y $\phi_i : \mathcal{J} \to \mathbb{C}$ diferenciable en $\mathcal{J}$ para cada $i = 1, \ldots, n$, que satisface (1) para todo $t \in \mathcal{J}$, esto es

$$\Phi'(t) = A\Phi(t) + F(t) \quad \forall t \in \mathcal{J}.$$

Al igual que para ecuaciones diferenciales de primer orden, dados $t_0 \in \mathcal{I}$ e $Y_0 \in \mathbb{C}^n$, se considera también el *problema a valor inicial*

$$Y' = AY + F(t), \quad Y(t_0) = Y_0,$$

y se dice que una función $\Phi : \mathcal{J} \to \mathbb{C}^n$ es solución del mismo si Φ es solución de (1), $t_0 \in \mathcal{J}$ y $\Phi(t_0) = Y_0$.

2. Sistemas homogéneos

En lo que sigue consideraremos sistemas de ecuaciones diferenciales lineales homogéneos, es decir, de la forma:

$$Y' = AY \tag{2}$$

donde A es una matriz $n \times n$.

Puede demostrarse que las soluciones de (2) están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$ y son continuamente diferenciables, es decir, el conjunto $\mathcal{S}$ de soluciones de (2) es un subconjunto del espacio vectorial

$$\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) = \{\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n : \ \Phi = [\phi_1 \cdots \phi_n]^t, \ \phi_i \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), i = 1, \ldots, n\}.$$

Más aún, $\mathcal{S}$ es un subespacio de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$, ya que

1. $\Phi(t) \equiv 0$ es solución de (2).
2. Si Φ_1 y Φ_2 son soluciones de (2),
$$(\Phi_1 + \Phi_2)' = \Phi_1' + \Phi_2' = A\Phi_1 + A\Phi_2 = A(\Phi_1 + \Phi_2),$$
con lo cual $\Phi_1 + \Phi_2$ también es solución de (2).
3. Si Φ es solución de (2) y $c \in \mathbb{C}$, entonces
$$(c\Phi)' = c\Phi' = cA\Phi = A(c\Phi),$$
y $c\Phi$ resulta solución de (2).

El siguiente resultado informa sobre la dimensión del conjunto de soluciones de (2).

Teorema 1 El conjunto de soluciones de (2) es un subespacio de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ de dimensión n. En particular, si $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ es un conjunto linealmente independiente de soluciones de (2), entonces

$$Y = c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2 + \cdots + c_n\Phi_n, \quad c_i \in \mathbb{C}, \ i = 1, \ldots, n,$$

es la solución general de (2).

A un conjunto $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ de soluciones de (2) linealmente independiente — por lo tanto base del conjunto de soluciones de la ecuación (2)— se lo denomina **conjunto fundamental de soluciones** de (2).

El problema que surge ahora es cómo hallar un conjunto fundamental de soluciones del sistema homogéneo. Veremos a continuación que en el caso en que la matriz A es diagonalizable, este conjunto se obtiene directamente a partir de los autovalores y autovectores de la matriz (el Apéndice contiene un breve resumen de los resultados de matrices necesarios para abordar el tema).

2.1. Caso A diagonalizable

Antes de tratar el caso general consideremos el caso más simple, aquél en el cual la matriz A es diagonal:

$$Y' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} Y.$$

Este sistema es muy simple de resolver ya que y_i, la i-ésima componente de Y, debe satisfacer la ecuación diferencial de primer orden

$$y_i' = \lambda_i y_i,$$

cuya solución general es

$$y_i = c_i e^{\lambda_i t}, \quad c_i \in \mathbb{C}.$$

Luego, toda solución del sistema de ecuaciones es de la forma

$$Y(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = c_1(e_1 e^{\lambda_1 t}) + \cdots + c_n(e_n e^{\lambda_n t}),$$

con $c_1, \ldots, c_n$ constantes arbitrarias y $e_1, \ldots, e_n$ los vectores canónicos de $\mathbb{C}^n$. En particular, $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ con $\Phi_i(t) = e_i e^{\lambda_i t}$ para $i = 1, \ldots, n$, es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación.

Supongamos ahora que $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es diagonalizable. Entonces existe una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{C}^n$ compuesta por autovectores de A, es decir $Av_i = \lambda_i v_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Si consideramos las matrices $n \times n$,

$$P = [v_1 \cdots v_n] \qquad \text{y} \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

tenemos que P es inversible y que

$$A = PDP^{-1}.$$

Con el objeto de resolver (2), utilicemos el cambio de variables lineal $Y = PZ$. Teniendo en cuenta que $Z = P^{-1}Y$, $Z' = P^{-1}Y'$ y que $D = P^{-1}AP$, tenemos que Y es solución de (2) si y sólo si

$$Z' = P^{-1}Y' = P^{-1}(AY) = (P^{-1}AP)Z = DZ.$$

Como la solución general del sistema $Z' = DZ$ es

$$Z = c_1(e_1 e^{\lambda_1 t}) + \cdots + c_n(e_n e^{\lambda_n t}),$$

tenemos que la solución general de (2) es

$$Y = PZ = c_1(Pe_1)e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n(Pe_n)e^{\lambda_n t}.$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $Pe_i = v_i$, pues el producto de una matriz con el i-ésimo vector canónico da por resultado la i-ésima columna de la matriz, tenemos que

$$Y = c_1(v_1 e^{\lambda_1 t}) + \cdots + c_n(v_n e^{\lambda_n t}), \quad c_i \in \mathbb{C},\ i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

es la solución general de (2) y que $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ con $\Phi_i(t) = v_i e^{\lambda_i t}$ para $i = 1, \ldots, n$, es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación. La independencia lineal de $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ puede probarse directamente, ya que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Phi_i(t) = 0\ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Phi_i(0) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0,\ \forall i = 1, \ldots, n$$

pues $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de $\mathbb{C}^n$, o en forma indirecta apelando al Teorema 1, pues, por un lado (3) nos dice que $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ genera al conjunto $\mathcal{S}$ de soluciones del sistema, mientras que, por otra parte, el Teorema 1 afirma que la dimensión de $\mathcal{S}$ es n, entonces, necesariamente, $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ debe ser linealmente independiente ya que en caso contrario $\mathcal{S}$ tendría dimensión menor que n.

Hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 2 Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales lineal homogéneo a coeficientes constantes (2). Supongamos que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{C}^n$ compuesta por autovectores de A, esto es $Av_i = \lambda_i v_i$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n$.

Entonces $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ con $\Phi_i(t) = v_i e^{\lambda_i t}$ para $i = 1, \ldots, n$, es un conjunto fundamental de soluciones de (2).

Veamos ahora algunos ejemplos.

Ejemplo 1 Hallar la solución general del sistema de ecuaciones $Y' = AY$ con

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Los autovalores de A son $\lambda_1 = 6$ y $\lambda_2 = -1$, mientras que los autoespacios correspondientes son:

$$\mathcal{S}_{\lambda_1} = \text{gen}\{[-5\ 2]^t\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{S}_{\lambda_2} = \text{gen}\{[1\ 1]^t\}.$$

Entonces $\{[-5\ \ 2]^t; [1\ \ 1]^t\}$ es una base de $\mathbb{C}^2$ (en este caso también de $\mathbb{R}^2$) compuesta por autovectores de A, y, por lo tanto, $\{[-5e^{6t}\ \ 2e^{6t}]^t; [e^{-t}\ \ e^{-t}]^t\}$ es un conjunto fundamental de soluciones del sistema de ecuaciones. La solución general del sistema es:

$$Y(t) = c_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} e^{6t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Ejemplo 2 Resolver el problema a valores iniciales $Y' = AY$, $Y(0) = Y_0$ con

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Los autovalores de A son $\lambda_1 = 7$ doble y $\lambda_2 = -2$ simple.

Los autoespacios asociados a cada uno de esos autovalores son

$$\mathcal{S}_{\lambda_1} = \text{gen}\{[1\ 0\ 1]^t,\ [-1\ 1\ 0]^t\} \quad \text{y} \quad \mathcal{S}_{\lambda_2} = \text{gen}\{[-2\ \ -1\ \ 2]^t\}.$$

Luego, dado que $\{[1\ 0\ 1]^t;\ [-1\ 1\ 0]^t;\ [-2\ \ -1\ \ 2]^t\}$ es base de $\mathbb{C}^3$, la solución general del sistema es

$$Y(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{7t} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{7t} + c_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t},$$

con c_1, c_2 y c_3 constantes complejas arbitrarias.

Como queremos que $Y(0) = Y_0$, necesariamente

$$Y(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = Y_0.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones resultante se obtienen $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ y $c_3 = 1$, con lo cual la solución buscada es

$$Y(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{7t} + \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t} = \begin{bmatrix} e^{7t} - 2e^{-2t} \\ -e^{-2t} \\ e^{7t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Cuando la matriz A del sistema de ecuaciones $Y' = AY$ pertenece a $\mathbb{R}^{n\times n}$, es diagonalizable y todos sus autovalores son reales, siempre es posible hallar un conjunto linealmente independiente $\{v_1, \ldots, v_n\}$ compuesto por autovectores de A tal que $v_i \in \mathbb{R}^n$ para $i = 1, \ldots, n$; por lo tanto el conjunto fundamental de soluciones $\{v_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, v_n e^{\lambda_n t}\}$, que surge de aplicar el Teorema 2, está compuesto por funciones reales, cosa que se observa en los dos ejemplos anteriores.

Cuando A es real, pero tiene algún autovalor λ complejo, el conjunto fundamental de soluciones obtenido siguiendo el Teorema 2 contendrá algunas soluciones a valores complejos, cosa que no es conveniente en algunas aplicaciones. Sin embargo, aún en ese caso, siempre es posible hallar conjuntos fundamentales de soluciones compuestos por funciones reales.

Veamos primero el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3 Hallar un conjunto fundamental de soluciones del sistema $Y' = AY$ con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Su polinomio característico es $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$ y sus autovalores son $\lambda_1 = 1 + 2i$ y $\lambda_2 = 1 - 2i$ (note que uno es el conjugado del otro). Respecto de los autoespacios, estos son

$$\mathcal{S}_{\lambda_1} = \text{gen}\{[1\ \ 1+2i]^t\} \quad \text{y} \quad \mathcal{S}_{\lambda_2} = \text{gen}\{[1\ \ 1-2i]^t\}.$$

Observe que los generadores de $\mathcal{S}_{\lambda_1}$ y de $\mathcal{S}_{\lambda_2}$ obtenidos están relacionados entre sí, ya que conjugando componente a componente uno de ellos se obtiene el otro, es decir, si llamamos $v_1 = [1\ \ 1+2i]^t$ y $v_2 = [1\ \ 1-2i]^t$ entonces $v_2 = \overline{v}_1$.

Luego $\{\Phi_1, \Phi_2\}$ con $\Phi_1(t) = v_1 e^{\lambda_1 t}$ y $\Phi_2(t) = v_2 e^{\lambda_2 t}$ es un conjunto fundamental de soluciones del sistema, es decir

$$Y = c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2$$

es la solución general del sistema de ecuaciones.

Como $v_2 = \overline{v}_1$ y $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$ tenemos que

$$\Phi_2(t) = v_2 e^{\lambda_2 t} = \overline{v}_1 e^{\overline{\lambda}_1 t} = \overline{v}_1 e^{\overline{\lambda_1 t}} = \overline{v_1 e^{\lambda_1 t}} = \overline{\Phi_1(t)}.$$

Por lo tanto, si llamamos, respectivamente, $\Phi_1^R(t)$ y $\Phi_1^I(t)$ a las partes real e imaginaria de Φ_1, tenemos que

$$\Phi_1 = \Phi_1^R + i\Phi_1^I \qquad \text{y} \qquad \Phi_2 = \Phi_1^R - i\Phi_1^I.$$

Con lo cual la solución general del sistema se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} Y &= c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2 \\ &= c_1(\Phi_1^R + i\Phi_1^I) + c_2(\Phi_1^R - i\Phi_1^I) \\ &= (c_1 + c_2)\Phi_1^R + (ic_1 - ic_2)\Phi_1^I \\ &= c_1^*\Phi_1^R + c_2^*\Phi_1^I, \end{aligned}$$

donde $c_1^* = c_1 + c_2$ y $c_2^* = i(c_1 - c_2)$. Luego, toda solución del sistema es combinación lineal de Φ_1^R y Φ_1^I. Por otra parte Φ_1^R y Φ_1^I son soluciones del sistema, pues $\Phi_1^R = (\Phi_1 + \Phi_2)/2$ y $\Phi_1^I = (\Phi_1 - \Phi_2)/(2i)$. Como la dimensión del conjunto de soluciones es en este caso 2 y $\{\Phi_1^R, \Phi_1^I\}$ genera tal conjunto, necesariamente $\{\Phi_1^R, \Phi_1^I\}$ es linealmente independiente y por lo tanto conjunto fundamental de soluciones.

Vamos ahora a calcular Φ_1^R y Φ_1^I.

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1+2i \end{bmatrix} e^{(1+2i)t} \\ &= \begin{bmatrix} e^{(1+2i)t} \\ (1+2i)e^{(1+2i)t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^t\cos(2t) + ie^t\operatorname{sen}(2t) \\ (1+2i)(e^t\cos(2t) + ie^t\operatorname{sen}(2t)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^t\cos(2t) \\ e^t\cos(2t) - 2e^t\operatorname{sen}(2t) \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} e^t\operatorname{sen}(2t) \\ 2e^t\cos(2t) + e^t\operatorname{sen}(2t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\Phi_1^R(t) = \begin{bmatrix} e^t\cos(2t) \\ e^t\cos(2t) - 2e^t\operatorname{sen}(2t) \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \Phi_1^I = \begin{bmatrix} e^t\operatorname{sen}(2t) \\ 2e^t\cos(2t) + e^t\operatorname{sen}(2t) \end{bmatrix},$$

forman un conjunto fundamental de soluciones y la solución general del sistema es

$$Y(t) = c_1^*\begin{bmatrix} e^t\cos(2t) \\ e^t\cos(2t) - 2e^t\operatorname{sen}(2t) \end{bmatrix} + c_2^*\begin{bmatrix} e^t\operatorname{sen}(2t) \\ 2e^t\cos(2t) + e^t\operatorname{sen}(2t) \end{bmatrix}.$$

Cuando $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pero tiene algún autovalor complejo λ, siempre será posible proceder como en el ejemplo anterior para hallar un conjunto fundamental de soluciones reales del sistema $Y' = AY$, gracias al siguiente resultado, cuya demostración se encuentra en el Apéndice.

Lema 1 Supongamos que $\lambda = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ es un autovalor de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Entonces $\overline{\lambda} = a - ib$ también es autovalor de A y $v \in \mathbb{C}^n$ es autovector de A asociado a λ si y sólo si $\overline{v}$ es autovector de A asociado a $\overline{\lambda}$.

En particular, si $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es base de $\mathcal{S}_\lambda$ entonces $\{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_r\}$ es base de $\mathcal{S}_{\overline{\lambda}}$.

El Lema 1 asegura que siempre podremos hacer lo efectuado en el Ejemplo 3 para construir un conjunto fundamental de soluciones reales cuando A es real pero tiene algún autovalores complejos.

En efecto, si $\{\lambda, \overline{\lambda}\}$ es un par de autovalores complejos conjugados de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y la multiplicidad geométrica de λ (y por lo tanto de $\overline{\lambda}$) es r, podemos encontrar una base $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ de $\mathcal{S}_\lambda$, y, a partir de ella, r soluciones linealmente independientes del sistema de ecuaciones:

$$\Phi_1(t) = v_1 e^{\lambda t},\ \Phi_2(t) = v_2 e^{\lambda t}, \ldots, \Phi_r(t) = v_r e^{\lambda t}.$$

Como $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_r\}$ es base de $\mathcal{S}_{\overline{\lambda}}$, también tenemos las r soluciones linealmente independientes:

$$\Phi_1^*(t) = \overline{v}_1 e^{\overline{\lambda} t},\ \Phi_2^*(t) = \overline{v}_2 e^{\overline{\lambda} t}, \ldots, \Phi_r^*(t) = \overline{v}_r e^{\overline{\lambda} t}.$$

Debido a que $\Phi_i^*(t) = \overline{\Phi_i(t)}$ para $i = 1, \ldots, r$, lo que generan las funciones

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_r, \Phi_1^*, \Phi_2^*, \ldots, \Phi_r^*$$

es igual a lo que generan,

$$\Phi_1^R, \Phi_1^I, \Phi_2^R, \Phi_2^I, \ldots, \Phi_r^R, \Phi_r^I,$$

siendo, respectivamente, Φ_i^R y Φ_i^I las partes real e imaginaria de Φ_i.

En efecto, como $\Phi_i = \Phi_i^R + i\Phi_i^I$ y $\Phi_i^* = \Phi_i^R - i\Phi_i^I$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^r \alpha_i \Phi_i + \sum_{i=1}^r \alpha_i^* \Phi_i^* &= \sum_{i=1}^r (\alpha_i \Phi_i + \alpha_i^* \Phi_i^*) \\
&= \sum_{i=1}^r [(\alpha_i + \alpha_i^*)\Phi_i^R + (i\alpha_i - i\alpha_i^*)\Phi_i^I] \\
&= \sum_{i=1}^r (\alpha_i + \alpha_i^*)\Phi_i^R + \sum_{i=1}^r (i\alpha_i - i\alpha_i^*)\Phi_i^I \\
&= \sum_{i=1}^r \beta_i \Phi_i^R + \sum_{i=1}^r \beta_i^* \Phi_i^I,
\end{aligned}$$

donde $\beta_i = \alpha_i + \alpha_i^*$ y $\beta_i^* = i(\alpha_i - \alpha_i^*)$, para $i = 1, \ldots, r$.

Luego, si las funciones $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_r, \Phi_1^*, \Phi_2^*, \ldots, \Phi_r^*$ forman parte de un conjunto fundamental de soluciones del sistema y se las reemplaza por las funciones $\Phi_1^R, \Phi_1^I, \Phi_2^R, \Phi_2^I, \ldots, \Phi_r^R, \Phi_r^I$, el conjunto resultante sigue generando el total de soluciones del sistema de ecuaciones y es linealmente independiente debido a que la cantidad de funciones que componen el conjunto sigue siendo la misma.

Ejemplo 4 Consideremos la ecuación $Y' = AY$ con

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico de A es

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^4 + 2\lambda + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = (\lambda + i)^2(\lambda - i)^2.$$

Por lo tanto, $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = -i$, son los autovalores de A. Notamos que la multiplicidad algebraica de ambos autovalores es 2.

Calculemos el autoespacio asociado a λ_1. Para ello resolvemos el sistema de ecuaciones lineales homogéneo $(A - iI)x = 0$ y obtenemos

$$\mathcal{S}_{\lambda_1} = \mathrm{gen}\left\{ \begin{bmatrix} -1+i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1-3i \\ 0 \\ 1+i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Por el Lema 1, conjugando componente a componente los generadores de $\mathcal{S}_{\lambda_1}$ se obtienen generadores de $\mathcal{S}_{\lambda_2}$:

$$\mathcal{S}_{\lambda_2} = \mathrm{gen}\left\{ \begin{bmatrix} -1-i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1+3i \\ 0 \\ 1-i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Como ambos subespacios tienen dimensión 2, la matriz A es diagonalizable. Para hallar un conjunto fundamental de soluciones compuesto por funciones reales, de acuerdo con lo que hemos desarrollado, sólo debemos hallar las partes real e imaginaria de las soluciones complejas que se obtienen a partir de uno de los autovalores, por ejemplo, las de las que provienen de $\lambda_1 = i$:

$$\Phi_1(t) = \begin{bmatrix} -1+i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{it} \quad \text{y} \quad \Phi_2(t) = \begin{bmatrix} 1-3i \\ 0 \\ 1+i \\ 1 \end{bmatrix} e^{it}.$$

Como

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) &= \begin{bmatrix} (-1+i)e^{it} \\ e^{it} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1+i)(\cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t)) \\ \cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\cos(t) - \mathrm{sen}(t) \\ \cos(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \cos(t) - \mathrm{sen}(t) \\ \mathrm{sen}(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \Phi_2(t) &= \begin{bmatrix} (1-3i)e^{it} \\ 0 \\ (1+i)e^{it} \\ e^{it} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-3i)(\cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t)) \\ 0 \\ (1+i)(\cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t)) \\ (\cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(t) + 3\,\mathrm{sen}(t) \\ 0 \\ \cos(t) - \mathrm{sen}(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \mathrm{sen}(t) - 3\cos(t) \\ 0 \\ \cos(t) + \mathrm{sen}(t) \\ \mathrm{sen}(t) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

la solución general del sistema es

$$\begin{aligned} Y(t) = c_1 \begin{bmatrix} -\cos(t) - \operatorname{sen}(t) \\ \cos(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &+ c_2 \begin{bmatrix} \cos(t) - \operatorname{sen}(t) \\ \operatorname{sen}(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &+ c_3 \begin{bmatrix} \cos(t) + 3\operatorname{sen}(t) \\ 0 \\ \cos(t) - \operatorname{sen}(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(t) - 3\cos(t) \\ 0 \\ \cos(t) + \operatorname{sen}(t) \\ \operatorname{sen}(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2.2. Caso A no diagonalizable

En estas notas sólo estudiaremos el caso en que $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ó $\mathbb{R}^{3\times 3}$ no es diagonalizable. Para poder hacerlo necesitamos algunos resultados de álgebra lineal.

Cuando una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ no es diagonalizable, es decir, no existen matrices $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ inversible y $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonal tal que

$$A = PDP^{-1},$$

o, en otras palabras, A no es semejante a una matriz diagonal, es necesario recurrir a lo que se denominan *formas de Jordan*. Aceptemos el siguiente resultado sin demostración.

Teorema 3 Dada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existe una matriz inversible $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que

$$P^{-1}AP = J \qquad (A = PJP^{-1})$$

con $J \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz que tiene la siguiente estructura en bloques

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{l-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & J_l \end{bmatrix}, \tag{4}$$

donde cada bloque J_i es una matriz $k_i \times k_i$ de la forma

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \tag{5}$$

para algún autovalor λ_i de A.

A una matriz que tiene la forma (5) se la denomina bloque de Jordan correspondiente al autovalor λ_i.

Notamos que la suma de los números k_i es n y que un mismo autovalor de A podría aparecer en más de un bloque, es decir, podría ser que $\lambda_i = \lambda_j$ para algún par de índices $i \neq j$. La multiplicidad algebraica de un autovalor λ de A es igual a la suma de los k_i correspondientes a bloques J_i en los cuales aparece λ, mientras que la multiplicidad geométrica de λ es igual a la cantidad de bloques en los cuales éste aparece.

Cuando A es diagonalizable, la matriz J está compuesta sólo por bloques 1×1, es decir, J es una matriz diagonal. Si A no es diagonalizable, entonces por lo menos algún bloque de J debe ser de dimensión $k \times k$ con $k > 1$.

A continuación analizamos la forma que adquiere la matriz J en el caso en que $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ó $\mathbb{R}^{3\times 3}$ no es diagonalizable y las condiciones que deben satisfacer las columnas de la matrix P. En primer lugar observamos que necesariamente los autovalores de A deben ser reales, ya que, si A es 2×2 y tiene un autovalor complejo, entonces el conjugado de éste también es autovalor y A resulta diagonalizable. Si A es 3×3, A necesariamente posee un autovalor real, ya que el polinomio característico es de grado impar. Si tuviese además un autovalor complejo, como el conjugado de éste también sería autovalor, A tendría tres autovalores distintos y por lo tanto sería diagonalizable.

Caso $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, A no diagonalizable. A necesariamente posee un autovalor doble $\lambda \in \mathbb{R}$ de multiplicidad geométrica 1, con lo cual la matriz J posee un solo bloque correspondiente a λ:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Respecto de la matriz $P = [v_1\ v_2]$, P deber ser inversible y $AP = PJ$. La primera condición se cumple si y sólo si $\{v_1, v_2\}$ es l.i. Respecto de la condición $AP = PJ$, como

$$AP = A[v_1\ v_2] = [Av_1\ Av_2]$$

y

$$PJ = [\lambda v_1\ v_1 + \lambda v_2],$$

$$AP = PJ \Leftrightarrow Av_1 = \lambda v_1,\ Av_2 = v_1 + \lambda v_2 \Leftrightarrow (A - \lambda I)v_1 = 0,\ (A - \lambda I)v_2 = v_1.$$

En resumen, la matriz P se obtiene hallando un par de vectores v_1 y v_2 l.i. que satisfagan las condiciones

$$(A - \lambda I)v_1 = 0,\ (A - \lambda I)v_2 = v_1.$$

Observamos que v_1 es autovector de A asociado a λ.

Caso $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, A no diagonalizable. En este caso hay varias posibilidades para la matriz J. Respecto de la matriz P damos sin demostración las condiciones que deben satisfacer sus columnas, ya que estas condiciones pueden deducirse procediendo como en el caso 2×2.

1. A tiene un autovalor triple $\lambda \in \mathbb{R}$ de multiplicidad geométrica 1. En este caso J consta de un sólo bloque 3×3 correspondiente a λ:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Respecto de $P = [v_1\ v_2\ v_3]$, $\{v_1, v_2, v_3\}$ debe ser l.i. y satisfacer las condiciones

$$(A - \lambda I)v_1 = 0,\ (A - \lambda I)v_2 = v_1,\ (A - \lambda I)v_3 = v_2.$$

Observamos que v_1 es autovector de A asociado a λ.

2. A tiene un autovalor triple $\lambda \in \mathbb{R}$ de multiplicidad geométrica 2. En este caso J debe tener dos bloques de Jordan correspondientes a λ de dimensiones 2×2 y 1×1, con lo cual

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Respecto de $P = [v_1\ v_2\ v_3]$, $\{v_1, v_2, v_3\}$ debe ser l.i. y satisfacer las condiciones

$$(A - \lambda I)v_1 = 0,\ (A - \lambda I)v_2 = v_1,\ (A - \lambda I)v_3 = 0.$$

Observamos que v_1 y v_3 son autovectores de A asociados a λ.

3. A tiene un autovalor doble $\lambda \in \mathbb{R}$ de multiplicidad geométrica 1 y un autovalor $\mu \in \mathbb{R}$ simple. En este caso J debe tener dos bloques de Jordan, uno de ellos correspondiente a λ de dimensión 2×2 y otro correspondiente a μ de dimensión 1×1, luego

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Respecto de $P = [v_1\ v_2\ v_3]$, $\{v_1, v_2, v_3\}$ debe ser l.i. y satisfacer las condiciones

$$(A - \lambda I)v_1 = 0,\ (A - \lambda I)v_2 = v_1,\ (A - \mu I)v_3 = 0.$$

Observamos que v_1 y v_3 son autovectores de A asociados a λ y μ respectivamente

Resolución de (2) en el caso no diagonalizable

Aplicamos a continuación lo expuesto sobre formas de Jordan a la resolución de sistemas con matrices no diagonalizables. Comencemos por el caso $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Consideremos el sistema (2) con $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ no diagonalizable. Entonces existen $P = [v_1\ v_2]$ inversible y J de la forma (6) tales que

$$A = PJP^{-1}.$$

Aplicando el cambio de variable $Y = PZ$ tenemos que Y es solución de (2) si y sólo si

$$Z' = P^{-1}Y' = P^{-1}AY = P^{-1}APZ = JZ.$$

El sistema $Z' = JZ$ es más simple que el sistema original, pues es de la forma

$$z_1' = \lambda z_1 + z_2 \tag{10}$$
$$z_2' = \lambda z_2 \tag{11}$$

Resolviendo (11) obtenemos

$$z_2 = c_2 e^{\lambda t}, \quad c_2 \in \mathbb{C}.$$

Reemplazando z_2 en (10) por la solución obtenida, queda la ecuación lineal de primer orden no homogénea

$$z_1' = \lambda z_1 + c_2 e^{\lambda t},$$

cuya solución general es (verificarlo)

$$z_1 = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Luego, la solución general de $Z' = JZ$ es

$$Z(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \\ c_2 e^{\lambda t} \end{bmatrix} = c_1 e_1 e^{\lambda t} + c_2 (t e_1 + e_2) e^{\lambda t},$$

donde e_1 y e_2 son los vectores canónicos de $\mathbb{C}^2$.

Finalmente, la solución general de (2) es

$$Y(t) = PZ(t) = c_1 (Pe_1) e^{\lambda t} + c_2 (t(Pe_1) + Pe_2) e^{\lambda t} = c_1 v_1 e^{\lambda t} + c_2 (t v_1 + v_2) e^{\lambda t},$$

pues $Pe_1 = v_1$ y $Pe_2 = v_2$.

Observamos que $\{\Phi_1, \Phi_2\}$ con $\Phi_1(t) = v_1 e^{\lambda t}$ y $\Phi_2(t) = (t v_1 + v_2) e^{\lambda t}$ es un conjunto fundamental de soluciones de (2).

Ejemplo 5 Consideremos el sistema $Y' = AY$ con

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico de A es $p_A(\lambda) = (\lambda + 3)^2$, con lo cual $\lambda = -3$ es un autovalor doble. El autoespacio asociado a λ es

$$\mathcal{S}_\lambda = \text{gen}\{[3\ 1]^t\}$$

con lo cual A no es diagonalizable.

Por lo desarrollado anteriormente, la solución general del sistema será de la forma

$$Y(t) = c_1 v_1 e^{-3t} + c_2 (t v_1 + v_2) e^{-3t}$$

con $\{v_1, v_2\}$ l.i. y tal que

$$(A + 3I) v_1 = 0 \qquad \text{y} \qquad (A + 3I) v_2 = v_1.$$

Como la primera condición dice que v_1 debe ser autovector, podemos tomar $v_1 = [3\ 1]^t$. Para obtener v_2 resolvemos el sistema no homogéneo $(A + 3I)x = v_1$, es decir

$$\begin{bmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

cuya solución general es $x = [1/2\ \ 0]^t + \alpha [3\ \ 1]^t$. Como sólo necesitamos un vector v_2 que cumpla la ecuación, tomamos $\alpha = 0$ y obtenemos $v_2 = [1/2\ \ 0]^t$. Claramente, $\{v_1, v_2\}$ es l.i.

Entonces, la solución general del sistema es

$$
\begin{aligned}
Y(t) &= c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \left(t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^{-3t} \\
&= c_1 \begin{bmatrix} 3e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} (3t + \frac{1}{2})e^{-3t} \\ te^{-3t} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

El caso $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ con A no diagonalizable se resuelve en forma similar al caso 2×2, es decir, mediante el cambio de variables $Y = PZ$, con P inversible y tal que $A = PJP^{-1}$, siendo J una matriz en bloques de Jordan, se transforma el sistema (2) en el sistema más simple

$$Z' = JZ.$$

Se resuelve este último y luego se vuelve a la variable original Y mediante la relación $Y = PZ$.

A continuación describimos la soluciones de $Z' = JZ$ en cada caso (resuélvalo usted mismo) y escribimos la solución general de (2) en función de los vectores que componen la matriz $P = [v_1\ v_2\ v_3]$.

Caso 1. J es de la forma (7). La solución general de $Z' = JZ$ es

$$Z(t) = c_1 e_1 e^{\lambda t} + c_2 (te_1 + e_2) e^{\lambda t} + c_3 \left(\frac{t^2}{2} e_1 + te_2 + e_3 \right) e^{\lambda t},$$

y, por lo tanto $Y = PZ$ es

$$Y(t) = c_1 v_1 e^{\lambda t} + c_2 (tv_1 + v_2) e^{\lambda t} + c_3 \left(\frac{t^2}{2} v_1 + tv_2 + v_3 \right) e^{\lambda t},$$

pues $Pe_i = v_i$ para $i = 1, 2, 3$.

Caso 2. J es de la forma (8). La solución general de $Z' = JZ$ es

$$Z(t) = c_1 e_1 e^{\lambda t} + c_2 (te_1 + e_2) e^{\lambda t} + c_3 e_3 e^{\lambda t},$$

y, por lo tanto $Y = PZ$ es

$$Y(t) = c_1 v_1 e^{\lambda t} + c_2 (tv_1 + v_2) e^{\lambda t} + c_3 v_3 e^{\lambda t},$$

pues $Pe_i = v_i$ para $i = 1, 2, 3$.

Caso 3. J es de la forma (9). La solución general de $Z' = JZ$ es

$$Z(t) = c_1 e_1 e^{\lambda t} + c_2 (te_1 + e_2) e^{\lambda t} + c_3 e_3 e^{\mu t},$$

y, por lo tanto $Y = PZ$ es

$$Y(t) = c_1 v_1 e^{\lambda t} + c_2 (tv_1 + v_2) e^{\lambda t} + c_3 v_3 e^{\mu t},$$

pues $Pe_i = v_i$ para $i = 1, 2, 3$.

Ejemplo 6 Resolver el sistema

$$Y' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} Y.$$

Dado que la matriz A del sistema es triangular superior, sus autovalores son los elementos de la diagonal. Luego $\lambda = 2$ es un autovalor triple.

Dado que la matriz

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

es de rango 2, el autoespacio correspondiente a $\lambda = 2$ es de dimensión 1 y por lo tanto la matriz J de Jordan que corresponde es la de la forma (7).

Luego la solución general del sistema será de la forma

$$Y(t) = c_1 v_1 e^{2t} + c_2(tv_1 + v_2)e^{2t} + c_3 \left(\frac{t^2}{2} v_1 + tv_2 + v_3 \right) e^{2t},$$

con $\{v_1, v_2, v_3\}$ l.i. y tal que satisface las condiciones

$$(A - 2I)v_1 = 0, \ (A - 2I)v_2 = v_1, \ (A - 2I)v_3 = 0.$$

Para hallar v_1 resolvemos $(A - 2I)x = 0$, cuya solución general es

$$x = \alpha[1 \ \ 0 \ \ 0]^t.$$

Con $\alpha = 1$ obtenemos $v_1 = [1 \ \ 0 \ \ 0]^t$. Ahora, con tal v_1, resolvemos $(A - 2I)x = v_1$ cuya solución general es

$$x = [0 \ 1 \ 0]^t + \alpha[1 \ 0 \ 0]^t.$$

Ponemos $\alpha = 0$ y obtenemos $v_2 = [0 \ 1 \ 0]^t$.

Finalmente resolvemos $(A - 2I)x = v_2$, cuya solución es

$$x = \left[0 \ \ -\frac{6}{5} \ \ \frac{1}{5} \right]^t + \alpha[1 \ 0 \ 0]^t.$$

Obtenemos $v_3 = [0 \ \ -\frac{6}{5} \ \ \frac{1}{5}]^t$ tomando $\alpha = 0$. Claramente $\{v_1, v_2, v_3\}$ es l.i. Entonces, la solución general del sistema es

$$\begin{aligned} Y(t) &= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \left(t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^{2t} + c_3 \left(\frac{t^2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} \right) e^{2t} \\ &= c_1 \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} e^{2t} \\ (t - \frac{6}{5})e^{2t} \\ \frac{1}{5} e^{2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y $\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}$, con

$$\Phi_1(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_2(t) = \begin{bmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \Phi_3(t) = \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} e^{2t} \\ (t - \frac{6}{5})e^{2t} \\ \frac{1}{5} e^{2t} \end{bmatrix}$$

es un conjunto fundamental de soluciones.

Ejemplo 7 Hallar la solución del problema a valor inicial

$$Y' = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} Y, \qquad Y(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Primero buscamos la solución general del sistema de ecuaciones. El polinomio característico de la matriz A del sistema es $p_A(\lambda) = (\lambda - 3)^3$. Luego $\lambda = 3$ es un autovalor triple de A.

Como

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

tiene rango 1, el autoespacio asociado a λ es de dimensión 2, con lo cual A no es diagonalizable. En este caso la matriz J de Jordan que corresponde es la de la forma dada en (8) y la solución general del sistema es de la forma

$$Y(t) = c_1 v_1 e^{3t} + c_2(tv_1 + v_2)e^{3t} + c_3 v_3 e^{3t},$$

con $\{v_1, v_2, v_3\}$ un conjunto l.i. que satisface las relaciones

$$(A - 3I)v_1 = 0, \ (A - 3I)v_2 = v_1, \ (A - 3I)v_3 = 0.$$

La primera y la tercera igualdad dicen que v_1 y v_3 deben ser autovectores, luego, procedemos a buscar el autoespacio $\mathcal{S}_\lambda$. Resolviendo la ecuación $(A - 3I)x = 0$ concluimos que

$$\mathcal{S}_\lambda = \text{gen}\{[1\ 0\ 0]^t, [0\ 0\ 1]^t\}.$$

En principio parecería que cualquier par de autovectores linealmente independientes servirían para definir v_1 y v_3. Sin embargo esto no es así. Por ejemplo, si definimos $v_1 = [1\ 0\ 0]^t$, nos encontramos con que el sistema de ecuaciones $(A - 3I)x = v_1$ es incompatible y por lo tanto no podemos definir v_2. Lo mismo sucede si tomamos $v_1 = [0\ 0\ 1]^t$.

La forma correcta de proceder es la siguiente: elegimos v_1 de modo tal que v_1 sea autovector de A y el sistema $(A - 3I)x = v_1$ sea compatible. Entonces, como v_1 debe ser autovector y $\mathcal{S}_\lambda = \text{gen}\{[1\ 0\ 0]^t, [0\ 0\ 1]^t\}$, v_1 debe ser de la forma $v_1 = [\alpha\ 0\ \beta]$. Consideramos ahora el sistema $(A - 3I)x = v_1$ y determinamos α y β para que éste sea compatible:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta - \frac{\alpha}{3} \end{array}\right],$$

luego $\beta - \frac{\alpha}{3} = 0$ o, equivalentemente, $\alpha = 3\beta$. Tomamos $\beta = 1$ y $\alpha = 3$ y obtenemos $v_1 = [3\ 0\ 1]^t$. Usamos tal v_1 para hallar v_2. Resolviendo la ecuación $(A - 2I)x = v_1$ vemos que $v_2 = [0\ 1\ 0]^t$ es solución de la misma.

v_3 se elige de modo tal que sea autovector y que el conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ sea l.i. Elegimos entoces $v_3 = [0\ 0\ 1]^t$.

Con esta elección de los vectores v_i obtenemos la solución general

$$Y(t) = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \left(t \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^{3t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}.$$

Imponiendo ahora la condición inicial determinamos los valores de las constantes c_i:

$$Y(0) = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 1.$$

Luego, la solución buscada es

$$Y(t) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + \left(t \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^{3t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} = \begin{bmatrix} 3+3t \\ 1 \\ 2+t \end{bmatrix} e^{3t}.$$

3. Sistemas no homogéneos

En lo que sigue veremos cómo resolver el sistema no homogéneo (1).

3.1. Resolución mediante cambio de variables

En la sección 2 vimos que el sistema homogéneo (2) puede resolverse mediante un cambio de variables adecuado. El mismo cambio de variables también permite la resolución del sistema no homogéneo (1). En efecto, si la matriz A de la ecuación (1) es diagonalizable, es decir, $A = PDP^{-1}$ con P inversible y D diagonal, mediante el cambio de variables $Y = PZ$ tenemos que Y es solución de (1) si y sólo si

$$Z' = P^{-1}Y' = P^{-1}(AY + F(t)) = P^{-1}APZ + P^{-1}F(t) = DZ + P^{-1}F(t).$$

Entonces, llamando $F^*(t) = P^{-1}F(t)$, tenemos que Y es solución de (1) si y solo si $Y = PZ$ y Z es solución de

$$Z' = DZ + F^*(t). \tag{12}$$

Como la matriz D es diagonal, el sistema (12) consta de n ecuaciones lineales no homogéneas de primer orden que pueden ser resueltas empleando alguno de los métodos ya estudiados.

Ejemplo 8 Resolver el sistema de ecuaciones

$$Y' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Los autovalores de la matriz del sistema son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 3$ y los correspondientes autoespacios son

$$\mathcal{S}_{\lambda_1} = \text{gen}\{[1 \;\; 1]^t\} \quad \text{y} \quad \mathcal{S}_{\lambda_2} = \text{gen}\{[1 \;\; -1]^t\}.$$

Por lo tanto, si A es la matriz del sistema y definimos

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

tenemos que $A = PDP^{-1}$.

Entonces, con el cambio de variables $Y = PZ$, tenemos que Z debe ser solución del sistema

$$Z' = DZ + F^*(t),$$

con

$$F^*(t) = P^{-1}F(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^t}{2} \\ \frac{e^t}{2} \end{bmatrix},$$

lo cual es equivalente a que las componentes de $Z = [z_1 \ z_2]^t$ satisfagan las ecuaciones:

$$z_1' = z_1 + \frac{e^t}{2} \qquad\qquad z_2' = 3z_2 + \frac{e^t}{2}.$$

Resolviendo estas ecuaciones tenemos que

$$z_1 = c_1 e^t + \frac{te^t}{2} \qquad \text{y} \qquad z_2 = c_2 e^{3t} - \frac{e^t}{4}.$$

Por lo tanto

$$Z = \begin{bmatrix} c_1 e^t + \frac{te^t}{2} \\ c_2 e^{3t} - \frac{e^t}{4} \end{bmatrix} \Longrightarrow Y = PZ = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^t + \frac{te^t}{2} \\ c_2 e^{3t} - \frac{e^t}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{3t} + \frac{2t-1}{4} e^t \\ c_1 e^t - c_2 e^{3t} + \frac{2t+1}{4} e^t \end{bmatrix}.$$

Si A no es diagonalizable, empleamos el cambio de variables $Y = PZ$ con P una matriz inversible tal que $A = PJP^{-1}$ con J la matriz de Jordan correspondiente. En este caso la ecuación que satisface Z es

$$Z' = JZ + F^*(t) \quad \text{con} \quad F^*(t) = P^{-1}F(t).$$

Si bien ahora las ecuaciones que componen el sistema involucran más de una incógnita, su estructura triangular facilita su resolución, como muestra el siguiente

Ejemplo 9 Resolver el sistema de ecuaciones

$$Y' = \begin{bmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}.$$

Como hemos visto en el Ejemplo 5, la matriz del sistema posee un único autovalor $\lambda = -3$ cuyo autoespacio asociado está generado por el vector $v = [3 \ \ 1]^t$.

Por lo tanto la forma de Jordan que corresponde en este caso es

$$J = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Por lo desarrollado en la sección anterior, la matriz $P = [v_1 \ v_2]$ se obtiene buscando dos vectores l.i., v_1 y v_2 tales que $(A + 3I)v_1 = 0$ y $(A + 3I)v_2 = v_1$. Como v_1 debe ser autovector, tomamos $v_1 = v$. Respecto de v_2, por lo hecho en el Ejemplo 5, podemos tomar $v_2 = [1/2 \ \ 0]^t$.

Luego

$$P = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces, con el cambio de variable $Y = PZ$ tenemos que la ecuación para Z es

$$Z' = JZ + F^*(t)$$

con

$$F^*(t) = P^{-1}F(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 2-6t \end{bmatrix}.$$

En consecuencia, las componentes de $Z = [z_1 \;\; z_2]^t$ deben satisfacer las ecuaciones:

$$z_1' = -3z_1 + z_2 + t \qquad\qquad z_2' = -3z_2 + 2 - 6t. \tag{13}$$

La diferencia con el caso diagonalizable es que ahora las ecuaciones no pueden resolverse en forma independiente, sino que primero debemos resolver la correspondiente a z_2.

La solución general de $z_2' = -3z_2 + 2 - 6t$ es

$$z_2 = c_2 e^{-3t} + \frac{4-6t}{3}.$$

Reemplazando z_2 en la primera ecuación de (13), obtenemos la ecuación

$$z_1' = -3z_1 + c_2 e^{-3t} + \frac{4-6t}{3} + t,$$

cuya solución general es

$$z_1 = (c_1 + c_2 t)e^{-3t} + \frac{5-3t}{9}.$$

Luego

$$Z = \begin{bmatrix} (c_1 + c_2 t)e^{-3t} + \frac{5-3t}{9} \\ c_2 e^{-3t} + \frac{4-6t}{3} \end{bmatrix} \Longrightarrow Y = PZ = \begin{bmatrix} [3c_1 + (\frac{1}{2} + 3t)c_2]e^{-3t} + \frac{7-6t}{3} \\ (c_1 + c_2 t)e^{-3t} + \frac{5-3t}{9} \end{bmatrix}.$$

El método expuesto implica, además del cálculo de la matriz P y de su inversa, la resolución de n ecuaciónes diferenciales de primer orden, lo cual cual puede resultar inconveniente si la matriz posee autovalores complejos o n es relativamente grande. Por ello es conveniente disponer de otros métodos de resolución.

3.2. Método de variación de parámetros

En lo que sigue expondremos un método para la resolución de sistemas no homogéneos conocido como *método de variación de parámetros.* Antes de ello es conveniente enunciar el siguiente resultado, típico en sistemas que reciben el apelativo “lineal”.

Teorema 4 Supongamos que Φ_p es una solución particular de (1). Entonces Φ es solución de (1) si y sólo si

$$\Phi = \Phi_p + \Phi_h$$

con Φ_h solución del sistema homogéneo (2).

Demostración. Supongamos primero que $\Phi = \Phi_p + \Phi_h$ con Φ_h solución del sistema homogéneo (2). Entonces

$$\Phi' = \Phi_p' + \Phi_h' = A\Phi + F(t) + A\Phi_h = A\Phi + F(t).$$

Por lo tanto Φ es solución de (1).

Supongamos ahora que Φ es solución de (1). Sea $\Phi_h = \Phi - \Phi_p$. Como

$$\Phi_h' = \Phi' - \Phi_p' = A\Phi + F(t) - A\Phi_p - F(t) = A\Phi_h,$$

Φ_h es solución de la ecuación homogénea (2). La demostración finaliza teniendo en cuenta que, por la definición de Φ_h, $\Phi = \Phi_p + \Phi_h$. $\square$.

De acuerdo con el Teorema 4, la resolución del problema (1) se reduce a la resolución de (2) por un lado y a encontrar una solución particular de (1) por el otro.

El método de variación de parámetros que expondremos a continuación, produce como resultado final una solución particular de la ecuación no homogénea. Para aplicarlo es prerrequisito conocer un conjunto fundamental de soluciones $\{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n\}$ del sistema homogéneo.

El método es como sigue: Se plantea una solución particular de la ecuación (1) de la forma

$$\Phi_p = \sum_{i=1}^{n} u_i \Phi_i$$

con funciones u_i a determinar. Como queremos que Φ_p sea solución del sistema de ecuaciones, debe cumplirse que

$$\Phi_p' = A\Phi_p + F(t). \tag{14}$$

Dado que

$$\Phi_p' = \sum_{i=1}^{n} (u_i\Phi_i)' = \sum_{i_1}^{n} u_i'\Phi_i + \sum_{i=1}^{n} u_i\Phi_i'$$

y $\Phi_i' = A\Phi_i$, tenemos que

$$\Phi_p' = \sum_{i=1}^{n} u_i'\Phi_i + \sum_{i=1}^{n} u_i A\Phi_i = \sum_{i=1}^{n} u_i'\Phi_i + A\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\Phi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} u_i'\Phi_i + A\Phi_p.$$

Reemplazando en (14) Φ_p' por $\sum_{i=1}^{n} u_i'\Phi_i + A\Phi_p$, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} u_i'\Phi_i + A\Phi_p = A\Phi_p + F(t),$$

y, por lo tanto, Φ_p es solución de (1) si y sólo si

$$\sum_{i=1}^{n} u_i'\Phi_i = F(t).$$

Esta última igualdad puede ser expresada en forma matricial:

$$M(t)\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_n' \end{bmatrix} = F(t), \tag{15}$$

con $M(t) = [\Phi_1(t)\ \Phi_2(t) \cdots \Phi_n(t)]$ (la i-ésima columna de $M(t)$ es $\Phi_i(t)$).

Entonces, si $u_1, u_2, \ldots, u_n$ son funciones diferenciables que satisfacen (15), $\Phi_p = \sum_{i=1}^{n} u_i \Phi_i$ resulta solución particular de (1).

El siguiente resultado, que damos sin demostración, garantiza la existencia de tales funciones u_i.

Teorema 5 Sea $\{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n\}$ un conjunto fundamental de soluciones de (2). Entonces el determinante de la matriz $M(t) = [\Phi_1(t)\ \Phi_2(t) \cdots \Phi_n(t)]$ es no nulo para todo $t \in \mathbb{R}$.

En efecto, debido al teorema anterior, el sistema de ecuaciones (15) es compatible determinado para todo $t \in \mathbb{R}$, con lo cual las derivadas de las funciones u_i pueden ser determinadas en forma unívoca, más aún, como $M(t)$ resulta inversible para todo t,

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_n' \end{bmatrix} = [M(t)]^{-1} F(t), \tag{16}$$

y las funciones u_i se obtienen integrando el lado derecho de la igualdad.

Ejemplo 10 Resolver el sistema no homogéneo $Y' = AY + F(t)$ con

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad F(t) = \begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix}.$$

De acuerdo con el Ejemplo 1, $\{[-5e^{6t}\ 2e^{6t}]^t; [e^{-t}\ e^{-t}]^t\}$ es un conjunto fundamental de soluciones del sistema homogéneo.

Para hallar una solución particular empleamos el método de variación de parámetros. Planteamos una solución $\Phi_p = u_1\Phi_1 + u_2\Phi_2$ con $\Phi_1(t) = [-5e^{6t}\ 2e^{6t}]^t$ y $\Phi_2(t) = [e^{-t}\ e^{-t}]^t$. Por lo desarrollado arriba, u_1' y u_2' deben ser soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} -5e^{6t} & e^{-t} \\ 2e^{6t} & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix}.$$

Resolviendo estas ecuaciones mediante la regla de Cramer obtenemos:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} t & e^{-t} \\ 2t & e^{-t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5e^{6t} & e^{-t} \\ 2e^{6t} & e^{-t} \end{vmatrix}} = \frac{te^{-t} - 2te^{-t}}{-7e^5t} = \frac{1}{7}te^{-6t}$$

y

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} -5e^{6t} & t \\ 2e^{6t} & 2t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5e^{6t} & e^{-t} \\ 2e^{6t} & e^{-t} \end{vmatrix}} = \frac{-10te^{6t} - 2te^{6t}}{-7e^5t}\frac{12}{7}te^t.$$

Integrando hallamos las primitivas

$$u_1 = -\left(\frac{1}{252} + \frac{t}{42}\right)e^{-6t} \qquad \text{y} \qquad u_2 = \frac{12}{7}(t-1)e^t.$$

Luego

$$\Phi_p(t) = -\left(\frac{1}{252} + \frac{t}{42}\right)e^{-6t}\begin{bmatrix} -5e^{6t} \\ 2e^{6t} \end{bmatrix} + \frac{12}{7}(t-1)e^t\begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{6}t - \frac{61}{36} \\ \frac{5}{3}t - \frac{2119}{1232} \end{bmatrix}$$

y la solución general del sistema es

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \frac{11}{6}t - \frac{61}{36} \\ \frac{5}{3}t - \frac{2119}{1232} \end{bmatrix} + c_1\begin{bmatrix} -5e^{6t} \\ 2e^{6t} \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}.$$

4. Apéndice

4.1. Matrices

Dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$, cada una de sus columnas puede ser interpretada como un vector de $\mathbb{C}^n$. Entonces, si denominamos a_i a la i-ésima columna de A, tenemos que $a_i \in \mathbb{C}^n$ y que $A = [a_1\ a_2 \cdots a_m]$.

Por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, sus columnas son $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Los siguientes resultados sobre el producto de matrices son de utilidad en las aplicaciones, y dan otra perspectiva sobre esta operación.

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ con $A = [a_1\ a_2 \cdots a_m]$ y $a_i \in \mathbb{C}^n$ y sea $x = [x_1\ x_2 \cdots x_m]^t \in \mathbb{C}^m$, entonces el producto de A por x es igual a la siguiente combinación lineal de las columnas de A:

$$Ax = [a_1\ a_2 \cdots a_m]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_ma_m.$$

Por ejemplo, si A es la matriz del ejemplo anterior y $x = [1\ -2]^t$,

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

lo cual coincide, por supuesto, con el producto calculado empleando la regla usual para la multiplicación de matrices.

Entonces, de acuerdo con lo anterior, el producto de una matriz A por un vector x no es otra cosa que la combinación lineal de las columnas de A cuyos coeficientes son las componentes de x.

Recíprocamente, toda combinación lineal de las columnas de A puede expresarse en la forma Ax con $x \in \mathbb{C}^m$. En efecto, si $y = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_m a_m$, entonces $y = Ax$ con $x = [\alpha_1 \cdots \alpha_m]^t$.

Notamos que de la interpretación precedente del producto de una matriz por un vector, se desprende en forma inmediata que el producto de $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ con el i-ésimo vector canónico de $\mathbb{C}^m$, $e_i = [0 \cdots 1 \cdots 0]^t$, donde el 1 está la i-ésima posición y el resto son ceros, da por resultado la i-ésima columna de A. En efecto

$$Ae_i = 0.a_1 + \cdots + 1.a_i + \cdots + 0.a_m = a_i.$$

Respecto del producto de una matriz $B \in \mathbb{C}^{r\times n}$ con $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$, se tiene que

$$BA = B[a_1\ a_2 \cdots a_m] = [Ba_1\ Ba_2 \cdots Ba_m],$$

es decir, la i-ésima columna del producto BA es el producto de B con la i-ésima columna de A.

4.2. Autovalores y autovectores

En lo que sigue repasaremos algunos resultados básicos sobre autovalores y autovectores de matrices cuadradas que se utilizan en la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

De aquí en adelante A será siempre un matriz $n \times n$ de componentes posiblemente complejas.

Definiciones básicas

Un número $\lambda \in \mathbb{C}$ es un *autovalor* de A si y sólo si existe un vector $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$ tal que $Av = \lambda v$.

Si λ es autovalor de A se dice que $v \in \mathbb{C}^n$ es un *autovector* de A asociado al autovalor λ si $v \neq 0$ y $Av = \lambda v$.

El *autoespacio* asociado al autovalor λ de la matriz A es el conjunto formado por todos los autovectores asociados a λ junto con el vector nulo (el vector nulo <u>no</u> es autovector):

$$\mathcal{S}_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^n :\ Av = \lambda v\}.$$

$\mathcal{S}_\lambda$ es un subespacio de $\mathbb{C}^n$ de dimensión mayor o igual a 1. A la dimensión de $\mathcal{S}_\lambda$ se la denomina *multiplicidad geométrica* del autovalor λ y se la denota usualmente μ_λ. La multiplicidad geométrica del autovalor indica la cantidad máxima de autovectores asociados a λ que son linealmente independientes.

Los autovalores de la matriz A se calculan usualmente con el auxilio de su *polinomio característico*:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$

donde I es la matriz identidad $n \times n$. Notamos que los coeficientes de p_A son números reales si A tiene componentes reales.

Como es sabido, p_A es un polinomio de grado n y sus raíces son los autovalores de A. La *multiplicidad algebraica* de un autovalor λ es la multiplicidad de λ como raíz de p_A, y se la denota usualmente m_λ.

Las multiplicidades algebraica y geométrica de un autovalor λ están relacionadas a través de la desigualdad: $\mu_\lambda \leq m_\lambda$.

Diagonalización de matrices

Se dice que A es diagonalizable si existen $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ inversible y $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonal tales que

$$A = PDP^{-1}.$$

Teorema 6 A es diagonalizable si y sólo si es posible hallar una base de $\mathbb{C}^n$ compuesta por autovectores de A.

Demostración. Supongamos primero que A es diagonalizable. Sean entonces $P = [v_1\ v_2 \cdots v_n] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ($v_i \in \mathbb{C}^n$) inversible y

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = [\lambda_1 e_1\ \lambda_2 e_2 \cdots \lambda_n e_n], \tag{17}$$

tales que $A = PDP^{-1}$.

Como P es inversible, el conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ compuesto por las columnas de P es l.i. y por lo tanto base de $\mathbb{C}^n$. Por otro lado, como

$$AP = A[v_1\ v_2 \cdots v_n] = [Av_1\ Av_2 \cdots Av_n], \tag{18}$$

$$PD = P[\lambda_1 e_1\ \lambda_2 e_2 \cdots \lambda_n e_n] = [\lambda_1 Pe_1\ \lambda_2 Pe_2 \cdots \lambda_n Pe_n] = [\lambda_1 v_1\ \lambda_2 v_2 \cdots \lambda_n v_n] \tag{19}$$

y $AP = PD$, tenemos que $Av_i = \lambda_i v_i$, es decir, que cada v_i es autovector de A.

Recíprocamente, si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{C}^n$ compuesta por autovectores de A, es decir, $Av_i = \lambda_i v_i$ para cierto autovalor λ_i de A, consideramos $P = [v_1\ v_2 \cdots v_n]$ y la matriz D definida en (17). Como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de $\mathbb{C}^n$, P resulta inversible.

De las igualdades $Av_i = \lambda_i v_i$, $i = 1, \ldots, n$, se deduce, teniendo en cuenta (18) y (19), que $AP = PD$, y de allí que $A = PDP^{-1}$ con lo cual finaliza la demostración del teorema. □

Notamos que de la prueba del teorema se deduce que la matrices P y D que diagonalizan la matriz A se construyen del siguiente modo: Se buscan n autovectores de A que sean l.i. y con ellos se forma la matriz P poniéndolos como columnas de la misma. La matriz diagonal D se obtiene poniendo en su diagonal los autovalores de A en el orden en que se ubicaron los correspondientes autovectores en la matriz P.

Recordamos que la condición necesaria y suficiente para que puedan hallarse n autovectores de A linealmente independientes es que las multiplicidades algebraica y geométrica de cada autovalor λ coincidan, esto es, $\mu_\lambda = m_\lambda$. Esta condición se cumple automáticamente en el caso en que todos los autovalores son simples, es decir, en el caso en que la matriz A tiene n autovalores distintos. Luego, para que A <u>no sea diagonalizable</u> es necesario (pero no suficiente) que alguno de sus autovalores tenga multiplicidad algebraica mayor a 1.

Autovalores complejos de matrices reales

El siguiente resultado, utilizado para la construcción de conjuntos fundamentales de soluciones reales para sistemas de ecuaciones con autovalores complejos, vincula los autoespacios asociados a pares de autovalores conjugados.

Lema 2 Supongamos que $\lambda = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ es un autovalor de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Entonces $\overline{\lambda} = a - ib$ también es autovalor de A y $v \in \mathbb{C}^n$ es autovector de A asociado a λ si y sólo si $\overline{v}$ es autovector de A asociado a $\overline{\lambda}$.

En particular, si $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es base de $\mathcal{S}_\lambda$ entonces $\{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_r\}$ es base de $\mathcal{S}_{\overline{\lambda}}$.

Demostración. Supongamos que $\lambda \in \mathbb{C}$ es autovalor de A y que $v \in \mathbb{C}^n$ es un autovector de A asociado a λ. Entonces $Av = \lambda v$. Teniendo en cuenta que A es real, tenemos que

$$A\overline{v} = \overline{Av} = \overline{\lambda v} = \overline{\lambda}\overline{v}.$$

Como $v \neq 0$, $\overline{v} \neq 0$ y por lo tanto $\overline{\lambda}$ es autovalor de A y $\overline{v}$ es autovector de A asociado a $\overline{\lambda}$. Hasta aquí hemos probado que si λ es autovalor de A entonces $\overline{\lambda}$ también es autovalor de A y que si v es autovector de A asociado al autovalor λ entonces $\overline{v}$ es autovector de A asociado al autovalor $\overline{\lambda}$.

Recíprocamente, por lo anterior, si $\mu = \overline{\lambda}$ es autovalor de A entonces $\lambda = \overline{\mu}$ también es autovalor de A y si u es autovector de A asociado a μ entonces $v = \overline{u}$ es autovector de A asociado a λ. De esto último se deduce que todo autovector u de A asociado al autovalor $\overline{\lambda}$ es de la forma $u = \overline{v}$ con v autovector asociado al autovalor λ.

Finalmente, si $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es base de $\mathcal{S}_\lambda$, entonces todo elemento de $\mathcal{S}_\lambda$ es de la forma

$$v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i.$$

Usando lo anterior, tenemos que entonces todo elemento $u \in \mathcal{S}_{\overline{\lambda}}$ es de la forma

$$u = \overline{\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i} = \sum_{i=1}^{r} \overline{\alpha_i}\, \overline{v}_i = \sum_{i=1}^{r} \beta_i\, \overline{v}_i,$$

con lo cual $\{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_r\}$ genera $\mathcal{S}_{\overline{\lambda}}$ y, en particular, $\dim(\mathcal{S}_{\overline{\lambda}}) \leq \dim(\mathcal{S}_\lambda)$. Con un razonamiento análogo (considerando $\overline{\lambda}$ en lugar de λ), obtenemos que $\dim(\mathcal{S}_{\overline{\lambda}}) \geq \dim(\mathcal{S}_\lambda)$. Entonces $\dim(\mathcal{S}_{\overline{\lambda}}) = \dim(\mathcal{S}_\lambda)$ y necesariamente $\{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_r\}$ debe ser linealmente independiente y por lo tanto base de $\mathcal{S}_{\overline{\lambda}}$. $\square$

5. Bibliografía

La que sigue es una lista de referencias para aquellos interesados en profundizar algunos de los temas tratados.

Las siguientes referencias contienen material básico sobre sistemas de ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones prácticas:

- Robert Borrelli y Courtney S. Coleman, *Ecuaciones Diferenciales: Una Perspectica de Modelación*, Oxford University Press, 2002.
- Paul Blanchard, Robert L. Devaney y Glen R. Hall, *Ecuaciones diferenciales*, Thomson, 1999.
- Dennis G. Zill, *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado*, 7ma edición, Thomson, 2001.

De carácter más avanzado y con una orientación hacia el estudio de sistemas dinámicos:

- Morris W. Hirsch y Stephen Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, 1974.

Sobre formas de Jordan pueden consultarse, entre otros:

- Kenneth Hoffman y Ray Kunze, *Álgebra Lineal*, Prentice Hall, 1984.
- Gilbert Strang, *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1989.