Matrices normales

Teorema espectral

Conceptos preliminares

Recordemos que una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) es *diagonalizable* en $\mathbb{K}^n$ si existe una base de $\mathbb{K}^n$ compuesta por autovectores de A. En tal caso, la matriz A es semejante a una matriz diagonal, esto es, existe una matriz $P \in \mathbb{K}^{n\times n}$ regular tal que $A = PD_AP^{-1}$, con D_A diagonal cuyos elementos de la diagonal principal son los autovalores de A y las columnas de la matriz P son los autovectores de A correspondientes a cada uno de los autovalores.

En todo este capítulo consideraremos el producto interno canónico de $\mathbb{K}^n$:

$$\langle x, y\rangle = y^* x, \quad \forall x, y \in \mathbb{K}^n$$

Recordemos que y^* designa el vector y transpuesto y conjugado.

Utilizaremos $\mathbb{K}^n$ ó $\mathbb{K}^{n\times n}$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ cuando las proposiciones sean aplicables a elementos de ambos espacios.

Trabajaremos con distintas clases de matrices:

En $\mathbb{K}^{n\times n}$:

Matrices simétricas: $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es *simétrica* si $A^T = A$.

Matrices ortogonales: $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es *ortogonal* si $AA^T = A^TA = I_n$. Las matrices ortogonales tienen columnas ortonormales.

Matrices antisimétricas: $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es *antisimétrica* si $A^T = -A$.

En $\mathbb{C}^{n\times n}$:

Matrices hermíticas: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es *hermítica* si $A^* = A$, donde A^* denota la matriz transpuesta y conjugada de A, llamada matriz *adjunta* de A.

Matrices unitarias: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es *unitaria* si $AA^* = A^*A = I_n$. Las matrices unitarias tienen columnas ortonormales.

Matrices antihermíticas: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es *antihermítica* si $A^* = -A$.

Relaciones entre las matrices A y A*

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$; entonces si $x, y \in \mathbb{K}^n$:

1. $\langle x, Ay\rangle = (Ay)^* x = y^* A^* x = \langle A^* x, y\rangle$.

2. $\operatorname{Nul}(A^*) = (\operatorname{Col}(A))^{\perp}$. Para demostrarlo hay que probar la doble inclusión:

   (a) $\operatorname{Nul}(A^*) \subseteq (\operatorname{Col}(A))^{\perp}$
   Sea $x \in \mathbb{K}^n$; entonces $x \in \operatorname{Nul}(A^*) \Leftrightarrow A^* x = 0_{\mathbb{K}^n} \Leftrightarrow \langle A^* x, y\rangle = 0, \ \forall y \in \mathbb{K}^n$
   Como $\langle A^* x, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$, resulta que $\langle x, Ay\rangle = 0$, y, dado que $Ay \in \operatorname{Col}(A)$, se concluye que $x \in (\operatorname{Col}(A))^{\perp}$.

   (b) $(\operatorname{Col}(A))^{\perp} \subseteq \operatorname{Nul}(A^*)$
   $x \in (\operatorname{Col}(A))^{\perp} \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0, \quad \forall y \in \operatorname{Col}(A)$. Si $y \in \operatorname{Col}(A)$: $y = Au$ para algún $u \in \mathbb{K}^n$; luego $\langle x, Au\rangle = 0$;
   como $\langle x, Au\rangle = \langle A^* x, u\rangle = 0$, para que esta igualdad se verifique para cualquier $u \in \mathbb{K}^n$ debe ser $A^* x = 0_{\mathbb{K}^n}$; luego $x \in \operatorname{Nul}(A^*)$.

3. $\mathrm{Col}(A) = (\mathrm{Nul}(A^*))^{\perp}$
   Se obtiene de (2), considerando $((\mathrm{Col}(A))^{\perp})^{\perp} = \mathrm{Col}(A)$.

4. $\mathrm{Nul}(A) = (\mathrm{Col}(A^*))^{\perp}$
   Se obtiene de (2) intercambiando A^* y A.

5. $\mathrm{Col}(A^*) = (\mathrm{Nul}(\mathrm{A}))^{\perp}$
   Se obtiene de (3) intercambiando A^* y A.

Matrices hermíticas

Los siguientes resultados son válidos también para matrices simétricas.

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Si A es hermítica $(A^* = A)$entonces:

1. Si $x, y \in \mathbb{C}^n : \langle x, Ay\rangle = \langle Ax, y\rangle$
   En efecto: $\langle x, Ay\rangle = (Ay)^* x = y^* A^* x = \langle A^* x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle$.

2. Los autovalores de A son reales.
   Dado que $\langle x, Ay\rangle = \langle Ax, y\rangle$, para $y = x$ resulta $\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle$. Si λ es autovalor de A, sea x un autovector de A de norma 1 asociado a λ,

$$\lambda = \lambda\langle x, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \overline{\lambda}\langle x, x\rangle = \overline{\lambda}$$

$$\lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejemplos: Los autovalores de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y de $B = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2$

3. Los autoespacios correspondientes a autovalores distintos son ortogonales, esto es, si λ y μ son dos autovalores distintos de la matriz A, entonces $S_\lambda \perp S_\mu$.
Hay que probar que si $x \in S_\lambda$ y $y \in S_\mu$: $\langle x, y\rangle = 0$.
Como λ y $\mu \in \mathbb{R}$: $\lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle = \langle x, \mu y\rangle = \mu\langle x, y\rangle$.
Luego, $\lambda\langle x, y\rangle = \mu\langle x, y\rangle$
Entonces, $(\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0$; como $\lambda \neq \mu$, resulta $\lambda - \mu \neq 0$ y por lo tanto $\langle x, y\rangle = 0$.

4. Existe una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ formada por autovectores de A.
Para probarlo emplearemos el siguiente
Lema. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n} : A^* = A$. Entonces, si λ es autovalor de A, sus multiplicidades algebraica y geométrica coinciden: $m.a.(\lambda) = m.g.(\lambda)$.

Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ los distintos autovalores de A. Como para cada uno de ellos

$$m.a.(\lambda_i) = m.g.(\lambda_i), \quad \forall i : 1 \leq i \leq k$$

entonces $\mathbb{C}^n = S_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus S_{\lambda_k} \qquad (1)$

Por otra parte, por la propiedad (3), $S_{\lambda_i} \perp S_{\lambda_j}$ si $i \neq j$.
Luego, para cada S_{λ_i} elegimos una base ortonormal, y como la suma (1) es directa, resulta

$$B_{\mathbb{C}^n} = B_{S_{\lambda_1}} \cup \cdots \cup B_{S_{\lambda_k}}$$

y así tenemos una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ formada por autovectores de A.

Por lo tanto la matriz A es diagonalizable unitariamente, es decir, A admite una descomposición de la forma $A = UD_AU^*$, con U unitaria.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, toda matriz simétrica es diagonalizable ortogonalmente, es decir, si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es tal que $A^T = A$, entonces existe $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal tal que $A = PD_AP^T$.

Observación. Una matriz diagonalizable unitariamente no necesariamente es hermítica, como se muestra a continuación:

Ejemplo. La matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ no es hermítica. Sus autovalores son $\lambda_1 = \mathrm{i}$ y $\lambda_2 = -\mathrm{i}$.

Los autoespacios asociados son: $S_{\lambda_1=\mathrm{i}}(A) = \operatorname{gen}\left\{\begin{pmatrix}\mathrm{i} & 1\end{pmatrix}^T\right\}$ y $S_{\lambda_2=-\mathrm{i}}(A) = \operatorname{gen}\left\{\begin{pmatrix}1 & \mathrm{i}\end{pmatrix}^T\right\}$.

Observar que $\langle \begin{pmatrix}\mathrm{i} & 1\end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix}1 & \mathrm{i}\end{pmatrix}^T \rangle = \begin{pmatrix}1 & -\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{i} \\ 1\end{pmatrix} = \mathrm{i} - \mathrm{i} = 0.$

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{i}/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & \mathrm{i}/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{i}/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & \mathrm{i}/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Matrices unitarias

Sea $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Si U es unitaria $(UU^* = U^*U = I_n)$ entonces:

1. Sus autovalores tienen módulo 1.
   Si λ es autovalor de U asociado al autovector $x \in \mathbb{C}^n$: $Ux = \lambda x$.
   $\|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux\rangle = \langle \lambda x, \lambda x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle\overline{\lambda} = |\lambda|^2\|x\|^2$
   Por otra parte, $\|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux\rangle = (Ux)^*Ux = x^*U^*Ux = x^*x = \|x\|^2$
   Por lo tanto, $|\lambda|^2\|x\|^2 = \|x\|^2$; como $x \neq 0_{\mathbb{C}^n}$, debe ser $|\lambda|^2 = 1 \Leftrightarrow |\lambda| = 1$.

2. El determinante de una matriz unitaria tiene módulo 1.

3. Si $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ son matrices unitarias, entonces UV es unitaria.

4. Para todo $x, y \in \mathbb{C}^n$: $\langle Ux, Uy\rangle = (Uy)^*Ux = y^*(U^*U)x = y^*x = \langle x, y\rangle$.
   La multiplicación por una matriz unitaria preserva el producto interno.

5. Si $x \in \mathbb{C}^n$ entonces $\|Ux\| = \|x\|$.
La multiplicación por una matriz unitaria preserva las longitudes, es decir, la transformación lineal $\mathcal{U} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ es una *isometría.*

6. Los autovectores de una matriz unitaria asociados a autovalores distintos son ortogonales.
Sean x, y autovectores de U asociados a los autovalores λ y μ, respectivamente. De la propiedad (4): $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$. (1)
Por otra parte, $\langle Ux, Uy \rangle = \langle \lambda x, \mu y \rangle = \lambda \overline{\mu} \langle x, y \rangle$ (2)
Entonces, de (1) y (2): $\langle x, y \rangle = \lambda \overline{\mu} \langle x, y \rangle$

$(\lambda \overline{\mu} - 1)\langle x, y \rangle = 0$, como λ y μ son distintos, el producto $\lambda \overline{\mu}$ no es igual a 1; en efecto, como $|\overline{\mu}| = 1$ resulta $\overline{\mu} = \dfrac{1}{\mu}$, de modo que $\lambda \overline{\mu} = \dfrac{\lambda}{\mu} \neq 1$.
Luego, para que la igualdad se cumpla debe ser $\langle x, y \rangle = 0$ y así, $x \perp y$.

7. La matriz U es inversible y $U^{-1} = U^*$.
Como los autovalores de U tienen módulo 1 y el determinante de una matriz es igual al producto de sus autovalores, se concluye que el determinante de U es distinto de cero, con lo cual U resulta inversible. Por otra parte, dado que $U^*U = UU^* = I$, por definición de matriz inversa es $U^* = U^{-1}$.

8. U es unitaria si y sólo si U^* es unitaria.
U es unitaria $\Leftrightarrow U^*U = UU^* = I \Leftrightarrow (U^*U)^* = (UU^*)^* = I^* \Leftrightarrow U^*(U^*)^* = (U^*)^*U^* = UU^* = I$, y por lo tanto, las filas de U son una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$.

Matrices antihermíticas

Los siguientes resultados son válidos también para matrices antisimétricas.

Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Si A es antihermítica $(A^* = -A)$ entonces:

1. Para todo $x \in \mathbb{C}^n : x^* A x$ es imaginario puro o cero.
2. Los autovalores de A son imaginarios puros o cero.
3. Los autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales.
4. Existe $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitaria tal que $A = U D_A U^*$.

Semejanza de matrices

Recordemos la definición de matrices semejantes.

Una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es *semejante* a otra matriz $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ si existe una matriz regular $P \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que $A = PBP^{-1}$.

Ejemplo

La matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es semejante a $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ porque $A = PBP^{-1}$, siendo $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Las matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico (y por ende, los mismos autovalores), el mismo determinante y la misma traza.

Observación. La afirmación recíproca de la anterior es falsa. En efecto, sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Las matrices A y B tienen los mismos autovalores, el mismo determinante y la misma traza pero no son semejantes, porque si lo fueran, existiría P regular tal que $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = PP^{-1} = I$, pero $A \neq I$.

Por último, dos matrices A y B son *unitariamente semejantes* si y sólo si existe una matriz $U \in \mathbb{K}^{n\times n}$ unitaria tal que $B = UAU^*$.

En síntesis, las matrices $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ que hemos estudiado (hermíticas, unitarias y antihermíticas, y, en el caso real, simétricas, ortogonales y antisimétricas) pertenecen a un conjunto de matrices denominadas *normales*, que verifican $AA^* = A^*A$ ($AA^T = A^TA$, en el caso real) es decir, matrices que conmutan con su adjunta.

Asimismo, algunas de las propiedades que hemos estudiado se resumen en el llamado

Teorema espectral

Caso complejo Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. La matriz A es normal.
2. Existe una base de $\mathbb{C}^n$ formada por autovectores de A.
3. A es unitariamente semejante a una matriz diagonal.

Caso real Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. La matriz A es normal.
2. Existe una base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores de A.
3. A es ortogonalmente semejante a una matriz diagonal.

Matrices definidas y semidefinidas positivas

Definición

La matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es *definida positiva* si y sólo si $A^* = A$ y $x^*Ax > 0 \quad \forall x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0_{\mathbb{K}^n}$.

Definición

La matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es *semidefinida positiva* si y sólo si $A^* = A$ y $x^*Ax \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{K}^n$.

Proposición

La matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es definida positiva si y sólo si todos los autovalores son positivos.

$\Rightarrow$) Sea $x \neq 0_{\mathbb{K}^n}$: $Ax = \lambda x$; como A es hermítica $\lambda \in \mathbb{R}$
entonces: $x^*Ax = x^*\lambda x = \lambda x^*x = \lambda\|x\|^2 > 0$. Dado que $\|x\|^2 > 0$ si $x \neq 0_{\mathbb{K}^n}$, para que el producto sea positivo debe ser $\lambda > 0$.

$\Leftarrow$) como A es hermítica existe una base ortonormal de $\mathbb{K}^n$ compuesta por autovectores de A. Sea $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{K}^n$, siendo $Av_i = \lambda_i v_i$

$$\forall x \in \mathbb{K}^n : x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

$$Ax = A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} A\left(\alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i v_i$$

Calculamos $x^* Ax$:

$$x^* Ax = \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha}_j v_j^*\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i v_i\right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha}_i \alpha_i \lambda_i v_j^* v_i =$$

Obsérvese que cuando $i \neq j : \langle v_i, v_j \rangle = v_j^* v_i = 0$.

$$= \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha}_i \alpha_i \lambda_i \|v_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \lambda_i > 0, \quad \forall x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0_{\mathbb{K}^n}$$

Otro criterio para determinar si una matriz es definida positiva es el siguiente:

$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es definida positiva si y sólo si todos los menores principales de A son positivos, esto es, $\det(A_k) > 0, \quad \forall k : 1 \leq k \leq n$:

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(a_{11}\right) \\ A_2 &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &\vdots \\ A_n &= A \end{aligned}$$

$$\det(A_1) > 0 \wedge \det(A_2) > 0 \wedge \cdots \wedge \det(A) > 0$$

Para matrices semidefinidas positivas todos menores principales tienen que ser no negativos y todos los autovalores deben ser no negativos.

Ejemplo

Determinar para qué valores de α la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha \\ 2\alpha & 1 \end{pmatrix}$ es definida positiva.

i. $A^T = A$

ii. $p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2\alpha \\ 2\alpha & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4\alpha^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1-2\alpha \quad \vee \quad \lambda = 1+2\alpha$

A es definida positiva $\Leftrightarrow 1-2\alpha > 0 \quad \wedge \quad 1+2\alpha > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > -1/2 \quad \alpha < 1/2 \quad \Leftrightarrow \quad |\alpha| < 1/2$

Ejemplo

Sea la proyección

$$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 : T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & -1/2\\0 & 0 & 0\\-1/2 & 0 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

sobre cierto subespacio $S\subset\mathbb{R}^3$. Probar que $[T]_{E^3_{\mathbb{R}}}$ es semidefinida positiva.

La matriz $A=[T]_{E^3_{\mathbb{R}}}$ cumple que $A^T=A$ y sus autovalores son $\lambda_1=0$ (doble), $\lambda_2=1$.

Luego, la matriz A es semidefinida positiva.

También podemos calcular los subdeterminantes de A:

$$\det(1/2)=1/2>0 \quad\wedge\quad \det\begin{pmatrix}1/2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}=0 \quad\wedge\quad \det\begin{pmatrix}1/2 & 0 & -1/2\\0 & 0 & 0\\-1/2 & 0 & 1/2\end{pmatrix}=0$$

Isometrías

El operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : T(x) = Ax$, con $A = \begin{pmatrix} \cos\,\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\,\theta \end{pmatrix}$, que es la rotación de ángulo θ, en sentido antihorario alrededor del origen de coordenadas, es una isometría. Dado que la matriz A es ortogonal, cada vector de $\mathbb{R}^2$ y su transformado tienen la misma longitud, esto es, T preserva la norma.

La matriz asociada $A = [T]_{E_{\mathbb{R}^2}}$, donde $E_{\mathbb{R}^2}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$, no tiene autovalores en $\mathbb{R}$ si $\theta \neq \mathrm{k}\pi, \mathrm{k} \in \mathbb{Z}$.

Definición

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial con producto interno. Entonces el operador $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es una *isometría* si

$$\mathrm{d}\,(T(x), T(y)) = \mathrm{d}(x, y)$$

donde d es la *distancia* entre dos elementos de $\mathbb{V}$.

Proposiciones

1. T es una isometría si y sólo si preserva la norma.

   $\Rightarrow)\ \forall x \in \mathbb{V} : \|T(x)\| = \mathrm{d}\left(T(x), 0\right) = \mathrm{d}(x, 0) = \|x\|$

   $\Leftarrow)\ \forall x, y \in \mathbb{V} : \mathrm{d}\left(T(x), T(y)\right) = \|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| = \|x - y\| = \mathrm{d}(x, y)$

2. T preserva el producto interno si y sólo si preserva la norma.

   $\Rightarrow)\ \forall x, y \in \mathbb{V} : \langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$; si $x = y : \langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle \Leftrightarrow \|T(x)\|^2 = \|x\|^2 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \|T(x)\| = \|x\|$. Luego T preserva la norma.

$\Leftarrow$) En el caso real:

Si $\|T(x)\| = \|x\| \Rightarrow \langle T(x), T(y)\rangle = \frac{1}{4}\left(\|T(x)+T(y)\|^2 - \|T(x)-T(y)\|^2\right) =$

$= \frac{1}{4}\left(\|T(x+y)\|^2 - \|T(x-y)\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) =$

$= \frac{1}{4}\left(\langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle\right) = \frac{1}{4}\left(4\langle x, y\rangle\right) = \langle x, y\rangle$

En el caso complejo: Si $\|T(x)\| = \|x\| \Rightarrow \langle T(x), T(y)\rangle =$

$= \frac{1}{4}\left(\|T(x)+T(y)\|^2 - \|T(x)-T(y)\|^2 + \mathrm{i}\|T(x)+\mathrm{i}T(y)\|^2 - \mathrm{i}\|T(x)-\mathrm{i}T(y)\|^2\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2 - \mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2\right)$

Operando como en el caso anterior, resulta: $= \frac{1}{4}\left(4\langle x, y\rangle\right) = \langle x, y\rangle$

Por lo tanto, T preserva el producto interno.

Observación

El operador $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n : T(x) = Ux$, con $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria, es una isometría, ya que:

$$\langle T(x), T(x)\rangle = \langle Ux, Ux\rangle = (Ux)^*Ux = x^*U^*Ux = x^*x = \langle x, x\rangle$$

Luego $\|T(x)\| = \|x\|$ y por lo tanto preserva el producto interno.

si T está definida como $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : T(x) = Px$, con $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces, además de preservar la norma y el producto interno, preserva los ángulos:

$$\cos\left(\widehat{T(x), T(y)}\right) = \frac{\langle T(x), T(y)\rangle}{\|T(x)\|\|T(y)\|} = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} = \cos(\widehat{x, y})$$

Ejemplo. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la reflexión sobre el subespacio $S = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\right\}$. Considerando el producto interno canónico, hallar $[T]_{E_{\mathbb{R}^3}}$ y comprobar que es ortogonal, y por lo tanto T es una isometría.

Sea $B = \left\{v_1 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^T, v_2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\end{pmatrix}^T, v_3 = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix}^T\right\}$, $v_1, v_2 \in S$ y $v_3 \in S^{\perp}$. Luego:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= v_1 \\ T(v_2) &= v_2 \\ T(v_3) &= -v_3 \end{aligned}$$

entonces B es una base de autovectores y $\lambda_1 = 1$ (doble), $\lambda_2 = -1$ son autovectores de T.

$$[T]_{E_{\mathbb{R}^3}} = M_B^{E_{\mathbb{R}^3}} [T]_B \; M_{E_{\mathbb{R}^3}}^B$$

$$[T]_{E_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{E_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

esta matriz tiene columnas ortonormales.

Ejemplo. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la rotación de ángulo θ alrededor del eje x_3:

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\ \theta & -\text{sen}\ \theta & 0 \\ \text{sen}\ \theta & \cos\ \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

la matriz

$$A = [T]_{E_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} \cos\ \theta & -\text{sen}\ \theta & 0 \\ \text{sen}\ \theta & \cos\ \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es ortogonal, y por lo tanto la transformación T es una isometría.

Su polinomio característico es

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \cos\ \theta - \lambda & -\text{sen}\ \theta & 0 \\ \text{sen}\ \theta & \cos\ \theta - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\cos\ \theta\ \lambda + 1\right) = 0$$

y sus soluciones son $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \cos\ \theta + \text{i}\ \text{sen}\ \theta, \lambda_3 = \cos\ \theta - \text{i}\ \text{sen}\ \theta$;

El autoespacio asociado a $\lambda_1 = 1$ es el conjunto solución del sistema $\begin{cases} (\cos\ \theta - 1)x_1 - \text{sen}\ \theta\ x_2 = 0 \\ \text{sen}\ \theta\ x_1 + (\cos\ \theta - 1)x_2 = 0 \end{cases}$

como $\det \begin{pmatrix} \cos\ \theta - 1 & -\text{sen}\ \theta \\ \text{sen}\ \theta & \cos\ \theta - 1 \end{pmatrix} = (\cos\ \theta - 1)^2 + \text{sen}^2\ \theta = \cos^2\ \theta - 2\ \cos\ \theta + 1 + \text{sen}^2\ \theta =$

$= 2 - 2\ \cos\ \theta = 4\ \text{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)$, el sistema tiene únicamente la solución $x_1 = x_2 = 0$;

si $\theta \neq 2\text{k}\pi, \text{k} \in \mathbb{Z}$; en este caso, los autovectores correspondientes a $\lambda_1 = 1$ son de la forma $\begin{pmatrix} 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}^T$, $x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Si $\theta = 2\text{k}\pi$:, $A = I_{3\times 3}$ y en este caso cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ es un autovector.

Si $\theta = (2\text{k}+1)\pi, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, sus autovectores son todos los del plano $x_3 = 0$; en este caso tenemos una simetría con respecto al eje x_3.