Formas Cuadráticas

Una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$ es una función $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que se puede expresar en la forma

$$Q(x) = x^T A x$$

con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica.

Algunos ejemplos:

Ejemplo 1:

$Q: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\;Q(x) = x^T A x$ con $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ y efectuando el producto con $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ podemos escribir la fórmula finalmente como $Q(x) = 9{x_1}^2 - 4{x_2}^2$

En general, si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es diagonal se tiene que

$$Q(x) = a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{1\le i\le n} a_{ii}x_i^2.$$

A este tipo de forma cuadrática se la denomina forma *diagonal* o *sin productos cruzados*.

Ejemplo 2:

$Q: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ $Q(x) = 2{x_1}^2 - 4x_1x_2 + x_1x_3 + 5{x_2}^2 + {x_3}^2$ escribimos esta fórmula como producto de matrices $Q(x) = x^T A x$ con $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & \frac{1}{2} \\ -2 & 5 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En general, si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica y $Q(x) = x^T A x$ entonces

$$Q(x) = \sum_{1\leq i\leq n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}x_ix_j.$$

Ejemplo 3:

Dada la función $Q: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $Q(x) = x^T B x$ con $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ podemos decir que es una forma cuadrática?

Es claro que la matriz no es simétrica……pero, a no apresurarnos ya que

$$x^T B x = (x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (2x_1 - 2x_2 \quad x_1 + 3x_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= 2{x_1}^2 - 2x_1x_2 + x_1x_2 + 3{x_2}^2 = 2{x_1}^2 - x_1x_2 + 3{x_2}^2 = (x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

y ahora sí $Q(x) = x^T B x = x^T A x$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$ simétrica.

En general, si $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ está definida por $Q(x) = x^T B x$, con $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ no necesariamente simétrica, como

$$x^T B x = (x^T B x)^T = x^T B^T x \quad \Rightarrow \quad 2Q(x) = x^T B x + x^T B^T x = x^T (B + B^T) x,$$

se tiene que

$$Q(x) = x^T \left(\frac{B + B^T}{2} \right) x,$$

y por lo tanto $Q(x)$ es forma cuadrática, ya que $A = \left(\frac{B+B^T}{2}\right)$ es simétrica.

Eliminación de productos cruzados

Consideremos la forma cuadrática $Q(x) = x^T Ax$ con $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ simétrica.

Con el objetivo de simplificar la expresión de $Q(x)$ eliminando los términos de producto cruzado, hacemos un cambio de variable $x = Py$ siendo P una matriz ortogonal que diagonaliza a la matriz simétrica A.

De este modo como $A = PDP^T$

$$Q(x) = x^T Ax = (Py)^T A(Py) = y^T(P^T AP)y = \mathrm{y^T D y} = \breve{\mathrm{Q}}\,(\mathrm{y})$$

Y así $Q(x) = \breve{\mathrm{Q}}\,(\mathrm{y}) = \mathrm{y^T D y} = \mu_1 {y_1}^2 + \mu_2 {y_2}^2 + \cdots + \mu_n {y_n}^2$ con $D_A = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$

Recordando que la matriz P tiene por columnas una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, formada por autovectores de la matriz A.

Teorema 1 **(Teorema de los ejes principales)** *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica. Entonces existe un cambio de variable ortogonal $x = Py$ ($P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es ortogonal) que transforma la forma cuadrática $Q(x) = x^T Ax$ en una forma cuadrática sin productos cruzados, es decir,*

$$Q(x) = \tilde{Q}(y) = y^T Dy, \qquad \text{si } x = Py,$$

con $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonal. Además, los elementos de la diagonal de D son los autovalores de A y las columnas de la matriz P son autovectores de A y forman una b.o.n de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 4:

Consideremos $Q: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\ Q(x) = x^T A\, x$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

Es decir $Q(x) = {x_1}^2 + 10x_1x_2 + {x_2}^2$

La matriz A tiene autovalores $\mu_1 = -4$ y $\mu_2 = 6$ y autoespacios asociados $S_{\mu_1} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ y $S_{\mu_2} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Proponemos entonces el cambio de variables dado por $x = Py$ con $\mathbf{P}$ ortogonal para llevar la forma cuadrática a una sin productos cruzados usando el teorema de los ejes principales, ya que siendo A simétrica sabemos que admite una diagonalización ortogonal.

Es decir, existe $\mathbf{P}$ ortogonal: $A = PDP^T$ donde la matriz P se construye eligiendo por columnas a autovectores de la matriz A asociados a cada autovalor, de norma 1.

De manera que

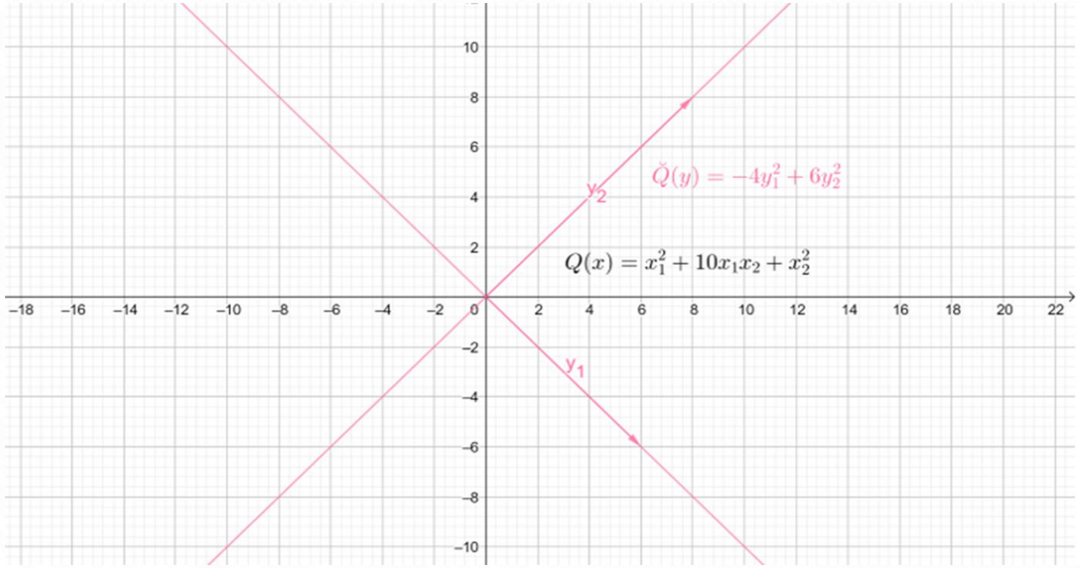
Usando $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ se llega a la forma cuadrática

$$\breve{Q}\,(y) = y^T D y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -4{y_1}^2 + 6{y_2}^2$$

El cambio de variable que hemos efectuamos para eliminar los productos cruzados puede ser interpretado geométricamente de la siguiente manera:
Llamemos u_1 al primer vector de la b.o.n. B (que es la primera columna de P) y u_2 al segundo vector de B (segunda columna de P). Entonces, si $x \in \mathbb{R}^2$ y $x = Py$ tenemos que

$$x = Py = [u_1\ u_2][y_1\ y_2]^T = y_1 u_1 + y_2 u_2,$$

con lo cual y no es otra cosa que el vector de coordenadas de x en la base B, es decir, $y = [x]_B$.

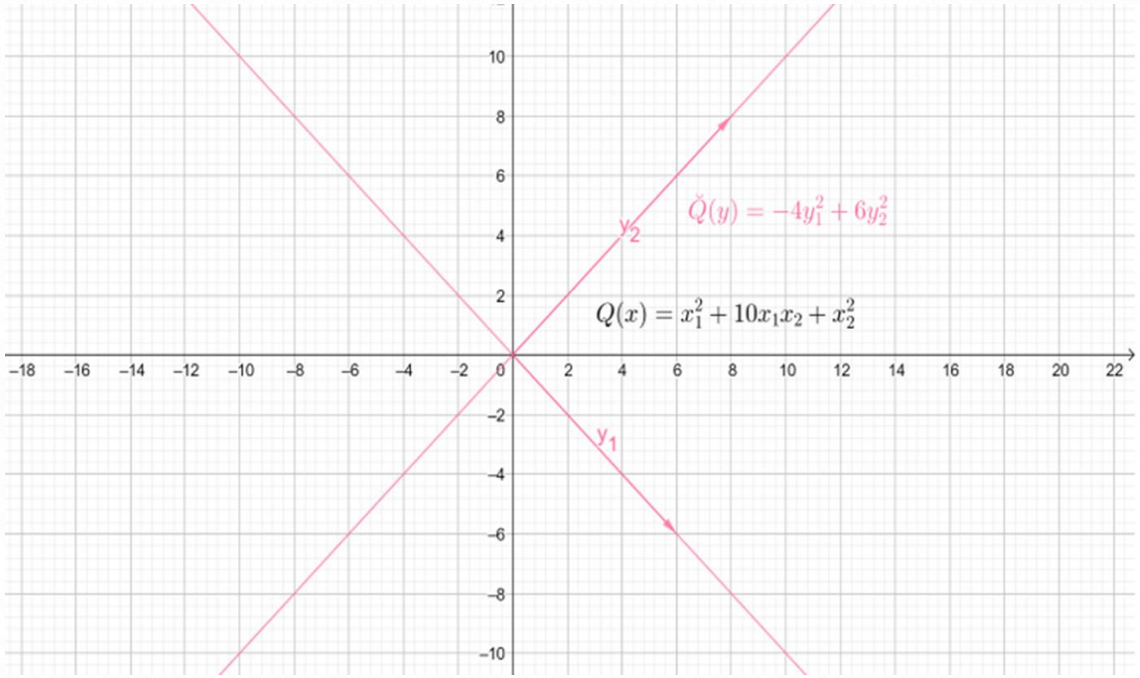


$$\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right]^B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$P = [u_1 \quad u_2] \text{ con } u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ y } u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$\breve{Q}\,(y) = -4{y_1}^2 + 6{y_2}^2$ es el valor de $Q(x) = {x_1}^2 + 10x_1x_2 + {x_2}^2$ pero en función de las coordenadas de x en el sistema cartesiano y_1y_2.

A las rectas que generan las columnas de P se las denominan *ejes principales* de la forma cuadrática Q.



Es usual tomar a la matriz P con el $\det(P) = 1$ pues de esa manera el sistema de ejes ortogonales definidos por las columnas de P se obtiene rotando los ejes cartesianos originales

Clasificación de formas cuadráticas

Definición. Dada una forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ decimos que Q es:

a) Definida positiva (d.p.) si $Q(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

b) Semidefinida positiva (s.d.p.) si $Q(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

c) Definida negativa (d.n.) si $Q(x) < 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

d) Semidefinida negativa (s.d.n.) si $Q(x) \leq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

e) Indefinida si no es ninguna de las anteriores, es decir, si existen x y x^* tales que $Q(x) > 0$ y $Q(x^*) < 0$.

Definición. Dada una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, decimos que A es definida positiva, semidefinida positiva, etc, si la forma cuadrática asociada $Q(x) = x^T Ax$ es, respectivamente, definida positiva, semidefinida positiva, etc.

Algunos ejemplos:

- $Q: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad Q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3{x_1}^2 + {x_2}^2 + 4{x_3}^2 > 0 \ \forall x \neq 0_{R^3} \Rightarrow$

  Q es definida positiva.
- $Q: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad Q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -{x_1}^2 - 3{x_3}^2 \leq 0 \ \forall x \in R^3$ y $Q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, Q es semi definida negativa.
- $Q: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad Q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 4{x_1}^2 + {x_2}^2 - 2{x_3}^2$ en este caso $Q\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 4$

  y $Q\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2$ de modo que Q es indefinida.

De acuerdo con los ejemplos anteriores cuando la forma cuadrática carece de términos de producto cruzado, es decir cuando $Q(x) = x^T D x$ con $D = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$

Se tiene que Q es:

- definida positiva si $\mu_j > 0\ \forall j$
- semidefinida positiva si $\mu_j \geq 0\ \forall j$
- definida negativa si $\mu_j < 0\ \forall j$
- semidefinida negativa si $\mu_j \leq 0\ \forall j$
- indefinida si existen un par de índices i, j tales que $\mu_i > 0$ y $\mu_j < 0$

Si $Q(x) = x^T A x$ con A simétrica, empleando nuevamente el cambio de variables dado por $x = Py$ con P ortogonal , eliminando los términos de producto cruzado , tenemos que $Q(x) = \mathrm{y}^{\mathrm{T}}\mathrm{Dy} = \breve{\mathrm{Q}}\ (\mathrm{y})$ con D diagonal.

Como Q y $\breve{\mathrm{Q}}$ tienen el mismo signo, y el signo en el último caso está determinado por los elementos de la diagonal , que son finalmente los autovalores de A, podemos concluir que :

Teorema 2

Sea $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ simétrica con autovalores $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_n$, entonces $Q(x) = x^T A x$ es

- definida positiva si $\mu_j > 0\ \forall j$
- semidefinida positiva si $\mu_j \geq 0\ \forall j$
- definida negativa si $\mu_j < 0\ \forall j$
- semidefinida negativa si $\mu_j \leq 0\ \forall j$
- indefinida si existen un par de índices i, j tales que $\mu_i > 0$ y $\mu_j < 0$

Ejemplo 1:

$$Q: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad Q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Como $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es simétrica y tiene autovalores

$\mu_1 = 4$; $\mu_2 = 3$ y $\mu_3 = 1 \Rightarrow Q$ es definida positiva.

Ejemplo 2:

Determinar para que valores de α

$Q: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}\ Q(x) = 3{x_1}^2 + 4x_1x_2 + 3{x_2}^2 + (\alpha^2 - 9){x_3}^2$ es semidefinida positiva

Escribimos $Q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2-9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ y siendo

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2-9 \end{pmatrix}$ simétrica, necesitamos pedir que sus autovalores sean mayores o iguales que cero.

Los autovalores de A son $\mu_1 = 5$; $\mu_2 = 1$ y $\mu_3 = \alpha^2 - 9$

Siendo $\mu_1 = 5$ y $\mu_2 = 1$ mayores que cero, pedimos entonces que:

$$\mu_3 = \alpha^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 \geq 9 \Leftrightarrow |\alpha| \geq 3 \Leftrightarrow \alpha \geq 3 \text{ ó } \alpha \leq -3$$

Conclusión

La Q es semidefinida positiva $\Leftrightarrow \alpha \geq 3$ ó $\alpha \leq -3$

Conjuntos de Nivel

Vamos a ver ahora cómo el cambio de variables que elimina los productos cruzados nos ayuda en el estudio de los conjuntos de nivel de una forma cuadrática. (En este punto se presupone que el alumno conoce las ecuaciones canónicas de las cónicas y las cuádricas.)

Dada una forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, para $c \in \mathbb{R}$ se define el conjunto de nivel c como

$$\mathcal{N}_c(Q) = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Q(x) = c\}.$$

Es decir, $\mathcal{N}_c(Q)$ es el conjunto de todos los puntos de $\mathbb{R}^n$ en los cuales Q toma el valor c. Si Q representa una temperatura, el conjunto de nivel es lo que se conoce como isoterma, si Q fuese una energía potencial en $\mathbb{R}^3$, entonces el conjunto de nivel es lo que usualmente se denomina superficie equipotencial.

Para determinar qué tipo de conjunto es $\mathcal{N}_c(Q)$, empleando un cambio de variables $x = Py$ que elimine productos cruzados, tenemos que $Q(x) = \tilde{Q}(y) = y^T Dy$ con D diagonal, y que, para un dado $c \in \mathbb{R}$,

$$Q(x) = c \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{Q}(y) = c.$$

Entonces, teniendo en cuenta la interpretación geométrica del cambio de variables, tenemos que el conjunto de nivel $\mathcal{N}_c(Q)$ se obtiene rotando adecuadamente el conjunto de nivel $\mathcal{N}_c(\tilde{Q})$ (los ejes y_i se hacen coincidir con las rectas generadas por las columnas de P). En particular, ambos conjuntos de nivel tienen la misma forma geométrica.

Ejemplo:

Consideremos $Q\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $Q(x) = x^T A\, x$ con $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Queremos graficar el conjunto de nivel

$Q(x) = 16$

Es decir, $Q(x) = \frac{5}{2}x_1^2 + 3x_1x_2 + \frac{5}{2}x_2^2 = 16$

La matriz A tiene autovalores $\mu_1 = 4$ y $\mu_2 = 1$ y autoespacios asociados $S_{\mu_1} = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ y

$S_{\mu_2} = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.

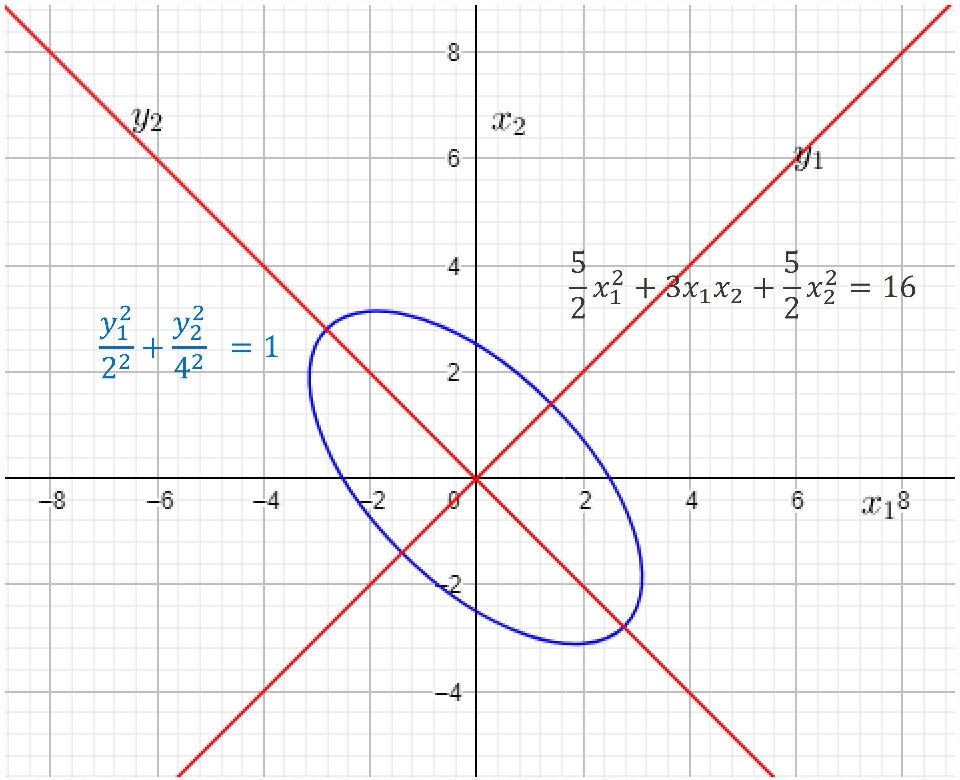
Proponemos entonces el cambio de variables dado por $x = Py$

Con $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ $\breve{Q}\,(y) = y^T D y = (y_1 \quad y_2)\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \; 4y_1^2 + y_2^2$

Como , $Q(x) = \frac{5}{2}x_1^2 + 3x_1x_2 + \frac{5}{2}x_2^2 = 16 \Longrightarrow \breve{Q}\,(y) = 4y_1^2 + \; y_2^2 = 16$

La curva de nivel resultante es una elipse cuya forma canónica es:

$$\frac{y_1^2}{2^2} + \frac{y_2^2}{4^2} \;\; = 1$$


y_2
x_2
y_1
$\frac{5}{2}x_1^2 + 3x_1x_2 + \frac{5}{2}x_2^2 = 16$
$\frac{y_1^2}{2^2} + \frac{y_2^2}{4^2} = 1$
x_1
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8

Ejemplo:

Considerando $Q\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ $Q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Queremos graficar el conjunto de nivel $Q(x) = 144$.

Es decir, $Q(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 = 144$

A tiene autovalores

$\mu_1 = 4$; $\mu_2 = 3$ y $\mu_3 = 1$ y autoespacios asociados

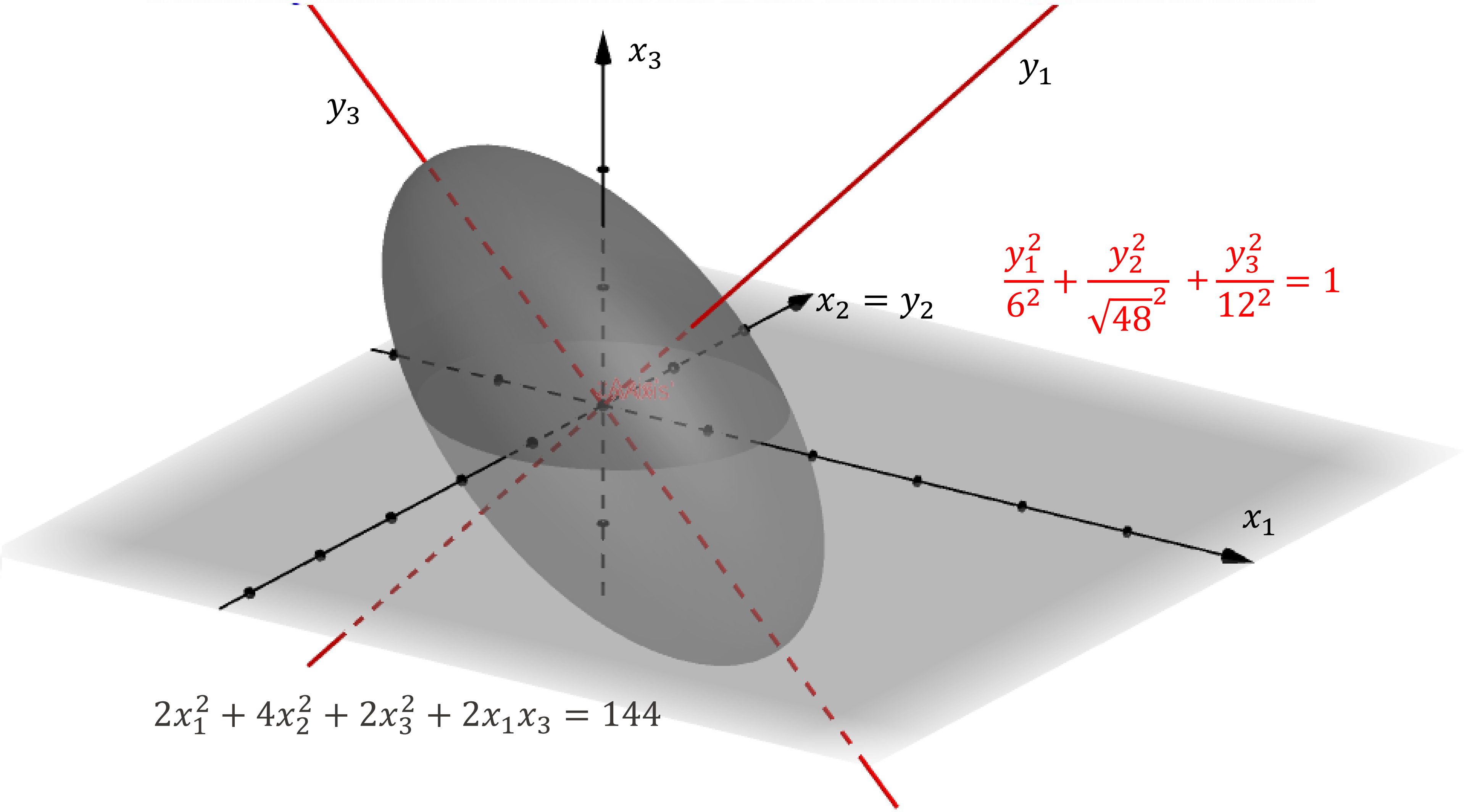
$S_{\mu_1} = gen\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, $S_{\mu_2} = gen\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right\}$ y $S_{\mu_3} = gen\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right\}$.

Proponemos entonces el cambio de variables dado por $x = Py$

Con $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ $\breve{Q}\,(y) = y^T D y = 4y_1^2 + 3y_2^2 + y_3^2$

Como , $Q(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1 x_3 = 144 \Longrightarrow \breve{Q}\,(y) = 4y_1^2 + 3y_2^2 + y_3^2 = 144$
La superficie de nivel resultante es un elipsoide cuya forma canónica es:

$$\frac{y_1^2}{6^2} + \frac{y_2^2}{\sqrt{48}^2} + \frac{y_3^2}{12^2} = 1$$


x_3
y_3
y_1
$x_2 = y_2$
x_1
$\frac{y_1^2}{6^2} + \frac{y_2^2}{\sqrt{48}^2} + \frac{y_3^2}{12^2} = 1$
$2x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 = 144$

Ejercicio 6 de la guía 6

6. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ el producto interno canónico en $\mathbb{R}^n$ y sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Demostrar que

$$\langle x, y \rangle_A := \langle Ax, y \rangle$$

define un producto interno en $\mathbb{R}^n$ si, y sólo si, A es definida positiva.

H) $\boldsymbol{< x, y >_A = < Ax, y >}$ **define un producto interno** $\Rightarrow$ $\boldsymbol{T)A}$ **es definida positiva (simétrica y si** $\boldsymbol{x \neq 0}$ $\boldsymbol{(x^T A x) > 0}$**)**

- $< x, y >_A = < Ax, y > = (Ax)^T y = x^T A^T y = (x^T A^T y)^T = y^T A x \ (1)$
  $< y, x >_A = < Ay, x > = (Ay)^T x = y^T A^T x \ (2)$
  De (1) y (2) $\boldsymbol{A^T = A}$
- $< \alpha x, y >_A = < A\alpha x, y > = (A\alpha x)^T y = (\alpha x)^T A^T y = \alpha\, x^T A^T y = \alpha\, (Ax)^T y = \alpha < x, y >_A$
  se cumple $\forall A$
- $< x + z, y >_A = < A(x + z), y > = (A(x + z))^T y = (x + z)^T A^T y = x^T A^T y + z^T A^T y =$
$< Ax, y > + < Az, y > = < x, y >_A + < z, y >_A$ *se cumple* $\forall A$
- $< x, x >_A = < Ax, x > = (Ax)^T x = x^T A^T x = (x^T A^T x)^T = x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0$

$\Rightarrow$ A **es definida positiva**.

H) A es definida positiva (simétrica y si $\boldsymbol{x \neq 0}$ $\left(\boldsymbol{x^T A x}\right) > \mathbf{0}$) $\Longrightarrow$
T) $< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >_A = < \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{y} >$ define un producto interno

- $< x, y >_A = < Ax, y > = (Ax)^T y = x^T A^T y = (x^T A^T y)^T = y^T A x = y^T A^T x = (Ay)^T x$

  $= y^T A^T x = (Ay)^T x = < Ay, x > = < y, x >_A$ A es simétrica

- $< \alpha x, y >_A = < A\alpha x, y > = (A\alpha x)^T y = (\alpha x)^T A^T y = \alpha\, x^T A^T y = \alpha\, (Ax)^T y = \alpha < x, y >_A$ se cumple$\forall A$
- $< x + z, y >_A = < A(x + z), y > = (A(x + z))^T y = (x + z)^T A^T y = x^T A^T y + z^T A^T y =$ $< Ax, y > + < Az, y > = < x, y >_A + < z, y >_A$ *se cumple*$\forall A$

- $< x, x >_A = < Ax, x > = (Ax)^T x = x^T A^T x = (x^T A^T x)^T = x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0$

A es definida positiva