
Álgebra II (Primer cuatrimestre, 2022)
GUÍAS DE TRABAJOS PRÁCTICOS
Primera parte. Versión 1.3 [En construcción]

Cuando podemos trasladar un problema práctico al lenguaje de la matemática, podemos, al mismo tiempo, “abstraernos” de las características secundarias del problema y, haciendo uso de fórmulas y teoremas generales, obtener resultados precisos. De este modo la abstracción de la matemática constituye su potencia; esta abstracción es una necesidad práctica.

A. N. KOLMOGOROV

GLOSARIO DE SÍMBOLOS

 : Alto. Estos ejercicios son importantes, pudiendo ser o no difíciles de resolver. Se recomienda fuertemente resolverlos.

 : Curva peligrosa. Estos ejercicios pueden ser más difíciles de lo que parecen a simple vista, o por el contrario, si se miran bien resultan más fáciles de lo que parecen. Ante la duda, consulte a los docentes del curso.

 : “Siga siga”. Lea detenidamente el enunciado. Si cree entender qué es lo que hay que hacer (ya ha resuelto un ejercicio previamente de espíritu similar), pase al siguiente. Ante la duda, resuélvalo.

 : Solo para artesanos. Estos ejercicios son de naturaleza teórica y exigen un buen dominio del arte y una cuota de imaginación.

 : Oráculo. Proporciona pistas y sugerencias para resolver algunos ejercicios. A veces, propone una situación.

 . El ejercicio requiere utilizar una máquina.

Guía 1

PRELIMINARES Y NOTACIÓN

En todo lo que sigue, y salvo que se diga lo contrario, se utiliza la siguiente notación:

1. \mathbb{N} denota el conjunto de todos los números naturales, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
2. \mathbb{Z} denota el conjunto de todos los números enteros,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

3. \mathbb{N}_0 denota el conjunto de todos los números enteros no negativos,

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

4. \mathbb{R} denota el conjunto (cuerpo) de todos los números reales.
5. \mathbb{R}^+ denota el conjunto de números reales no negativos, y \mathbb{R}_*^+ el conjunto de los números reales positivos.
6. \mathbb{C} denota el conjunto (cuerpo) de todos los números complejos. Por definición $z \in \mathbb{C}$ si, y sólo si $z = a + ib$, donde $i^2 = -1$ y $a, b \in \mathbb{R}$. La expresión $\bar{z} = a - ib$ se utiliza para designar al conjugado de z . Obsérvese que $z + \bar{z} = 2a$ y que $z - \bar{z} = i2b$. La *fórmula de Euler* establece que

$$e^z = e^{a+ib} = e^a (\cos(b) + i \operatorname{sen}(b)).$$

7. Dado $n \in \mathbb{N}$, \mathbb{I}_n denota el conjunto $\{1, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$. Nótese que $\{x_i : i \in \mathbb{I}_n\}$ denota el conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ cuyos elementos son x_1, x_2, \dots, x_n .
8. Dado un conjunto no vacío \mathbb{I} , $\{x_i : i \in \mathbb{I}\}$ denota el conjunto cuyos elementos están indexados por el conjunto \mathbb{I} .
9. Salvo que se diga lo contrario, las letras i, j, k, l denotan índices en algún subconjunto de \mathbb{N} , n y m denotan números naturales, u, v, w, x, y denotan vectores, A, B, C denotan matrices.
10. \mathbb{K} denota un cuerpo.
11. $\mathbb{K}^{m \times n}$ denota el conjunto de todas las matrices de $m \times n$ con coeficientes en \mathbb{K} . Para denotar los coeficientes de una matriz $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, se utilizan las notaciones $A = [A_{ij}]_{\substack{i \in \mathbb{I}_m \\ j \in \mathbb{I}_n}}$ o $A = [a_{ij}]_{\substack{i \in \mathbb{I}_m \\ j \in \mathbb{I}_n}}$.
12. Dada $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, se denota por $A^T \in \mathbb{K}^{n \times m}$ a su matriz traspuesta, definida por $A_{ij}^T := A_{ji}$, para $i \in \mathbb{I}_n$ y $j \in \mathbb{I}_m$.
13. El símbolo

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

se llama *delta de Kronecker*

14. La matriz de $\mathbb{K}^{n \times n}$ con unos en la diagonal principal y ceros en cualquier otro lugar, $\mathbf{I} := [\delta_{ij}]_{\substack{i \in \mathbb{I}_n \\ j \in \mathbb{I}_n}}$, se llama *la matriz identidad de orden n* .

15. \mathbb{K}^n denota el conjunto de todas las matrices de $n \times 1$ con coeficientes en \mathbb{K} : $x \in \mathbb{K}^n$ si, y sólo si

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$$

para algunos $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K}$.

16. Dada $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Las columnas de A se pueden pensar como elementos de \mathbb{K}^m y las filas de A como elementos de \mathbb{K}^n . La notación $A_{i*} \in \mathbb{K}^n$ se utiliza para denotar la i -ésima fila de A , y la notación $A_{*j} \in \mathbb{K}^m$ para denotar la j -ésima columna de A .
17. El conjunto $\mathcal{E} = \{e_j : j \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{K}^n$ cuyos elementos están definidos por $e_j := \mathbf{I}_{*j}$ se denomina *la base canónica de \mathbb{K}^n* .
18. Dado un intervalo I de la recta real, $C(I)$ denota el conjunto de todas las funciones continuas de I en \mathbb{R} , y para cada $n \in \mathbb{N}$, $C^n(I)$ denota el conjunto de todas las funciones de I en \mathbb{R} que son n -veces derivables y cuyas derivadas sucesivas son continuas hasta el orden n inclusive. El conjunto de todas las funciones que pertenecen a todos los $C^n(I)$, $n \in \mathbb{N}$, se designa por $C^\infty(I)$, es decir, $C^\infty(I) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(I)$.
19. $\mathbb{K}[x]$ denota el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en \mathbb{K} : $p \in \mathbb{K}[x]$ si, y sólo si, $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ para algún $n \in \mathbb{N}_0$ y algunos $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$.
20. El grado del polinomio $0 \in \mathbb{K}[x]$ es $-\infty$.
21. $\mathbb{K}_n[x]$ denota el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en \mathbb{K} cuyo grado no supera n .

EJERCICIOS

1.1 Sean $\mathbb{V} = \mathbb{R}_*^+$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si la suma vectorial \oplus y la multiplicación escalar \odot se definen por

$$\begin{aligned}v \oplus w &:= vw, \\ a \odot v &:= v^a.\end{aligned}$$

Verificar que $(\mathbb{V}, \oplus, \mathbb{K}, \odot)$ es un \mathbb{K} -espacio vectorial, donde 1 es el vector cero y v^{-1} es el vector opuesto de v .

: repasar la definición axiomática de \mathbb{K} -espacio vectorial.

1.2 Verificar las siguientes afirmaciones.

(a) El conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & a \end{bmatrix}^T : a \in \mathbb{R} \right\}$ es un subespacio de \mathbb{R}^3 .

(b) El conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} a+b & 0 & a \end{bmatrix}^T : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ es un subespacio de \mathbb{R}^3 .

(c) El conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

(d) Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\left\{ \sum_{k=0}^n a_k x^k : a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}[x]$.

(e) Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto de funciones

$$\left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(2k\pi t) + b_k \operatorname{sen}(2k\pi t)] : a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R} \right\}$$

es un subespacio de $C^\infty(\mathbb{R})$.

: observar que la morfología de todos esos conjuntos es la misma:

$$\left\{ \sum_{j=1}^n c_j v_j : c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} \right\},$$

donde v_1, v_2, \dots, v_n son vectores de un \mathbb{R} -espacio vectorial. ¿Será verdad que el conjunto $\left\{ c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T + c_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T : c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+ \right\}$ es un subespacio?

1.3  Sean $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Comprobar que $B \in \operatorname{gen}\{A_1, A_2, A_3\}$ y hallar 3 maneras diferentes de representar B como combinación lineal de las matrices A_1, A_2, A_3 .

(b) Hallar una sistema de generadores del subespacio \mathbb{S} de \mathbb{R}^3 definido por

$$\mathbb{S} := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T : x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 = 0_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} \right\}.$$

(c) Representar cada una de las matrices A_i como una combinación lineal de las otras dos.

(d) Comprobar que para cada pareja $i, j \in \mathbb{I}_3$ tal que $i \neq j$ se verifica que

$$\{0\} \subsetneq \text{gen}\{A_i\} \subsetneq \text{gen}\{A_i, A_j\} = \text{gen}\{A_1, A_2, A_3\}.$$

1.4 Sean a y b dos números reales, arbitrarios pero fijos. Comprobar que los conjuntos de funciones de \mathbb{R} en \mathbb{C} definidos por

$$\mathcal{G}_1 := \{e^{ax} \cos(bx), e^{ax} \text{sen}(bx)\} \text{ y } \mathcal{G}_2 := \{e^{(a+ib)x}, e^{(a-ib)x}\}$$

generan el mismo \mathbb{C} -espacio vectorial.

: recordar la fórmula de Euler.

1.5  Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales vale que:

(a)

$$\text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -a \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\},$$

(b)

$$\text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

1.6 En cada uno de los siguientes casos describir el subespacio \mathbb{S} mediante un sistema de generadores minimal.

(a) $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$.

(b) $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0\}$, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) $\mathbb{S} = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : X \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} X \right\}$.

(d) $\mathbb{S} = \left\{ p \in \mathbb{R}_3[x] : \int_{-1}^1 p(x) dx = 0, \int_{-1}^1 xp(x) dx = 0 \right\}$.

(e) $\mathbb{S} = \{y \in C^\infty(\mathbb{R}) : y' - \lambda y = 0\}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.7  [miniatura] Sean \mathbb{V} un \mathbb{K} -espacio vectorial y $\mathcal{G} = \{v_1, v_2, v_3\}$ un sistema de generadores de \mathbb{V} . Probar que \mathcal{G} es un sistema minimal de generadores de \mathbb{V} si, y sólo si, \mathcal{G} es linealmente independiente.

: ¿qué significa que \mathcal{G} sea un sistema de generadores que no es minimal?

1.8  [herramienta] Sean \mathbb{V} un \mathbb{K} -espacio vectorial, $\{v_i : i \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{V}$ un conjunto linealmente independiente, y $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Para cada $j \in \mathbb{I}_n$ se definen los vectores $w_j := \sum_{i=1}^n a_{ij}v_i$. Mostrar que $\{w_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ es linealmente independiente si, y sólo si, $\det(A) \neq 0$.

1.9  Sea \mathbb{V} un \mathbb{K} -espacio vectorial. Se considera un conjunto de vectores linealmente independiente $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{V}$ y se definen w_1, w_2, w_3, w_4 mediante

$$\begin{aligned} w_1 &:= v_1 - 2v_2 + v_3 - v_4, \\ w_2 &:= -4v_1 - 2v_2 + v_4, \\ w_3 &:= 2v_1 + 3v_2 - v_3 - 3v_4, \\ w_4 &:= 17v_1 - 10v_2 + 11v_3 + v_4. \end{aligned}$$

¿El conjunto $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ es linealmente independiente?

1.10 Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos son linealmente independientes en su correspondiente espacio vectorial.

(a) El subconjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$ de \mathbb{R}^3 .

(b) El subconjunto $\{1 + 3x - 2x^2, 3 + 5x - 6x^2, -5x + 6x^2\}$ de $\mathbb{R}[x]$.

(c) El subconjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

1.11 Determinar cuáles de los siguientes conjuntos de funciones son linealmente independientes:

(a) $\mathcal{F} = \{1, \text{sen}(x), \cos(x)\}$. : calcular el Wronskiano de \mathcal{F} .

(b) $\mathcal{G} = \{1 + 3 \text{sen}(x) - 2 \cos(x), 3 + 5 \text{sen}(x) - 6 \cos(x), -5 \text{sen}(x) + 6 \cos(x)\}$.

(c) $\tilde{\mathcal{G}} = \{1 + 2 \text{sen}(x) + 3 \cos(x), 4 + 5 \text{sen}(x) + 7 \cos(x), 2 + \text{sen}(x) + \cos(x)\}$.

1.12  Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales los siguientes subconjuntos son linealmente dependientes en su correspondiente espacio vectorial.

(a) $\{1 + a \text{sen}(x) + 3 \cos(x), 4 + 5 \text{sen}(x) + 7 \cos(x), a + \text{sen}(x) + \cos(x)\}$ en $C^\infty(\mathbb{R})$.

(b) $\{1 + 2ax + x^2 + 2x^3, 2 + ax + 4x^2 + 8x^3, x^2 + 2x^3\}$ en $\mathbb{R}_3[x]$.

(c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & a \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3a+1 & 3 \\ -4 & 3a+1 \end{bmatrix} \right\}$ en $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

1.13  [herramienta] Explicar por qué los siguientes algoritmos producen una base \mathcal{B} de un subespacio \mathbb{S} a partir de un sistema de generadores \mathcal{G} del mismo.

(a) *Algoritmo espacio filas:*

Algorithm 1 espacio filas

Require: $\mathcal{G} = \{v_1, \dots, v_m\} \subset \mathbb{K}^n$ un sistema de generadores del subespacio \mathbb{S} .

Ensure: \mathcal{B} una base del subespacio \mathbb{S} .

- 1: Construir la matriz $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ cuyas filas son v_1^T, \dots, v_m^T
- 2: Construir $E \in \mathbb{K}^{m \times n}$ la matriz escalonada por filas reducida de A
- 3: Listar las filas no nulas de E : $\{E_{i_1*}, \dots, E_{i_q*}\}$
- 4: $\mathcal{B} \leftarrow \{E_{i_1*}, \dots, E_{i_q*}\}$
- 5: **return** \mathcal{B}

(b) *Algoritmo espacio columnas:*

Algorithm 2 espacio columnas

Require: $\mathcal{G} = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{K}^m$ un sistema de generadores del subespacio \mathbb{S} .

Ensure: \mathcal{B} una base del subespacio \mathbb{S} .

- 1: Construir la matriz $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ cuyas columnas son v_1, \dots, v_n
- 2: Construir $E \in \mathbb{K}^{m \times n}$ la matriz escalonada por filas reducida de A
- 3: Listar las columnas de A que corresponden a las columnas pivotaes de E :
 $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_p}\}$
- 4: $\mathcal{B} \leftarrow \{v_{j_1}, \dots, v_{j_p}\}$
- 5: **return** \mathcal{B}

1.14  En cada uno de los siguientes casos, hallar dos bases del subespacio generado por el sistema de generadores \mathcal{G} : la primera utilizando el *algoritmo espacio filas* y la segunda utilizando el *algoritmo espacio columnas*.

(a) $\mathcal{G} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ en \mathbb{R}^3 .

(b) $\mathcal{G} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ en \mathbb{R}^3 .

(c) $\mathcal{G} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ en \mathbb{R}^3 .

: alguno a mano y para ganar tiempo el resto a .

1.15 Hallar una base y determinar la dimensión de cada uno de los siguientes subespacios:

(a) $\mathbb{S} = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(1) = 0\}$;

(b) $\mathbb{S} = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = 0, p(2) = 0\}$;

(c) $\mathbb{S} = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : 18p(0) = 3p''(0) + 2p'''(0), 6p'(0) = 6p''(0) - p'''(0)\}$;

(d) $\mathbb{S} = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(1) = 0, p'(1) = 0, p''(1) = 0\}$;

1.16  Hallar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que el conjunto

$$\mathcal{B}_a = \left\{ \left[a \quad \frac{3}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 0 \right]^T, \left[1 \quad \frac{3}{2} \quad 0 \quad -\frac{1}{2} \right]^T, \left[\frac{3}{2} \quad 0 \quad a \quad \frac{3}{2} \right]^T \right\}$$

es una base del subespacio $\mathbb{S}_a = \{x \in \mathbb{R}^4 : \frac{1}{2}x_1 - ax_3 + x_4 = 0\}$.

1.17 Sean $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Sabiendo que el espacio solución de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden 2

$$y'' + a_1y' + a_0y = 0,$$

tiene dimensión 2, comprobar que

(a) cualesquiera sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq a$, el conjunto de funciones $\{e^{ax}, e^{bx}\}$ es una base del espacio solución de la ecuación $y'' - (a+b)y' + aby = 0$;

(b) para cualquier $a \in \mathbb{R}$, el conjunto de funciones $\{e^{ax}, xe^{ax}\}$ es una base del espacio solución de la ecuación $y'' - 2ay' + a^2y = 0$;

(c) cualesquiera sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$, el conjunto de funciones

$$\{e^{ax} \cos(bx), e^{ax} \sin(bx)\}$$

es una base del espacio solución de la ecuación $y'' - 2ay' + (a^2 + b^2)y = 0$.

: en cada caso, mostrar que la pareja de funciones satisface la ecuación y es linealmente independiente, el remate se obtiene por comparación de dimensiones.

1.18   En cada uno de los siguientes casos, hallar y graficar la solución $y \in C^\infty(\mathbb{R})$ de la ecuación diferencial indicada que satisface las siguientes condiciones: $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

(a) $y'' + 4y' - 5y = 0$;

(b) $y'' + 4y' + 4y = 0$;

(c) $y'' + 4y = 0$.

1.19 Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ una matriz tal que $\text{col}(A) = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T \right\}$ y $\text{nul}(A) = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \right\}$, y sea $b = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 0 \end{bmatrix}^T$.

(a) Explicar por qué el sistema lineal $Ax = b$ es compatible.

(b) Explicar por qué el sistema lineal $Ax = b$ no puede tener una única solución.

1.20  Hallar una base de cada uno de los cuatro subespacios fundamentales de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}.$$

Sea $b = \begin{bmatrix} 2 - 3i \\ 3 + 2i \end{bmatrix}$, ¿existe $x \in \mathbb{C}^2$ tal que $Ax = b$? Si la respuesta es afirmativa, hallar todas las soluciones del sistema $Ax = b$.

1.21  Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$ la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 10 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Hallar una base de cada uno de los cuatro subespacios fundamentales de la matriz A .

(b) Sea $b = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 & 7 \end{bmatrix}^T$, ¿existe $x \in \mathbb{R}^5$ tal que $Ax = b$? Si la respuesta es afirmativa, hallar todas las soluciones del sistema $Ax = b$.

(c) Para $b = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 & 7 \end{bmatrix}^T$, ¿existe $x \in \text{fil}(A)$ tal que $Ax = b$? Si la respuesta es afirmativa, hallar todas las soluciones del sistema $Ax = b$ pertenecientes a $\text{fil}(A)$.

1.22  Lucas y Monk resolvieron el sistema lineal $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Lucas encontró la solución

$$S_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T + \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T \right\},$$

y Monk la solución

$$S_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T + \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}.$$

¿Alguno de los dos encontró la solución correcta?

1.23 Sean $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y $B \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ dos matrices tales que:

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

donde $\text{rango}(B) = 2$. Hallar una base de $\text{nul}(B)$.

1.24 ☉ Sean $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y $B \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ dos matrices tales que

$$AB = \begin{bmatrix} 10 & -10 & -5 & 5 \\ 11 & -11 & -4 & 7 \\ 11 & -11 & -5 & 6 \end{bmatrix},$$

donde $\text{rango}(A) = 3$, y B satisface que

$$B \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad B \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 \end{bmatrix}^T.$$

Hallar todas las soluciones del sistema $Bx = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}^T$.

1.25 Sean $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1+i \\ 1-i \end{bmatrix} \right\}$ y $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Comprobar que \mathcal{B} es una base de \mathbb{C}^3 y determinar el vector de coordenadas de v respecto de la base \mathcal{B} .

1.26 Sean $p_1(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$, $p_2(x) = -x(x-2)$ y $p_3(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$.

(a) Verificar que $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$.

(b) Observar que para cualquier polinomio $p \in \mathbb{R}_2[x]$ el vector de coordenadas de p respecto de la base \mathcal{B} es

$$[p]^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}.$$

(c) Hallar el vector de coordenadas de $p(x) = x^2 - x + 1$ en la base \mathcal{B} .

1.27 ☉ Sea $\mathcal{X} = \{x_i : i \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{R}$ un conjunto de n números reales. Para cada $i \in \mathbb{I}_n$ sea $p_i \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ el polinomio de grado $n-1$ definido por

$$p_i(x) := \prod_{k \in \mathbb{I}_n : k \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}.$$

(a) Demostrar que $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} := \{p_i : i \in \mathbb{I}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$. ☞: para cada polinomio p de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ estudiar el grado y la cantidad de raíces del polinomio

$$r(x) = p(x) - \sum_{i=1}^n p(x_i) \prod_{k \in \mathbb{I}_n : k \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}.$$

(b) Observar que para cualquier polinomio $p \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ el vector de coordenadas de p respecto de la base \mathcal{B}_x es $[p]^{\mathcal{B}_x} = \sum_{i=1}^n p(x_i)e_i$, donde $\{e_i : i \in \mathbb{I}_n\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^n . En particular, se tiene que $[x^k]^{\mathcal{B}_x} = [x_1^k \ x_2^k \ \cdots \ x_n^k]^T$.

(c) Concluir que dados $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ el polinomio $p \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ definido por

$$p(x) = \sum_{i=1}^n y_i \prod_{k \in \mathbb{I}_n, k \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k},$$

es el único polinomio de grado menor o igual que $n - 1$ tal que su gráfico $\Gamma_p := \{(x, p(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ contiene al conjunto $\{(x_i, y_i) : i \in \mathbb{I}_n\}$.

1.28 En cada uno de los siguientes casos hallar la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B}_1 = \{v_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ en la base \mathcal{B}_2 y determinar el vector de coordenadas de $v = \sum_{j=1}^n a_j v_j$ en la base \mathcal{B}_2 .

(a) \mathcal{B}_1 es la base canónica de \mathbb{R}^3 y \mathcal{B}_2 es la base de \mathbb{R}^3 definida por

$$\mathcal{B}_2 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}.$$

(b) $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$ y \mathcal{B}_2 es la base de $\mathbb{R}_2[x]$ definida por

$$\mathcal{B}_2 = \{1 + 2x + x^2, 2 + 5x, 3 + 3x + 8x^2\}.$$

(c) $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ y \mathcal{B}_2 es la base de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ definida por

$$\mathcal{B}_2 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 27 \end{bmatrix} \right\}.$$

1.29  Sea \mathcal{B}_1 la base de \mathbb{R}^3 definida por

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{bmatrix} \right\},$$

y sea \mathcal{B}_2 la base de \mathbb{R}^3 tal que la matriz de cambio de coordenadas de la base \mathcal{B}_1 en la base \mathcal{B}_2 es

$$M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 10 & 10 & -5 \\ 11 & -10 & 2 \\ 2 & 5 & 14 \end{bmatrix}.$$

Hallar el vector de coordenadas de $v = [5 \ 4 \ 3]^T$ en base \mathcal{B}_2 .

1.30 Sea \mathcal{B}_1 la base de \mathbb{R}^3 definida por

$$\mathcal{B}_1 := \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix} \right\}.$$

(a) Hallar una base \mathcal{B}_2 de \mathbb{R}^3 tal que la matriz de cambio de coordenadas de la base \mathcal{B}_1 en la base \mathcal{B}_2 sea

$$M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

(b) Sea \mathcal{E} la base canónica de \mathbb{R}^3 . Hallar la matriz de cambio de coordenadas de la base \mathcal{E} en la base \mathcal{B}_2 y para cada $x \in \mathbb{R}^3$ determinar la expresión del vector de coordenadas de x en la base \mathcal{B}_2 .

1.31  [miniatura] Sea \mathbb{V} un \mathbb{R} -espacio vectorial y sean \mathbb{S}_1 y \mathbb{S}_2 dos subespacios de \mathbb{V} tales que ninguno contiene al otro. Comprobar que para cualquier pareja de vectores v y w tales que $w \in \mathbb{S}_1 \setminus \mathbb{S}_2$ y $v \in \mathbb{S}_2 \setminus \mathbb{S}_1$ la recta \mathbb{L} que pasa por w y es paralela a v

$$\mathbb{L} := \{tv + w : t \in \mathbb{R}\}$$

tiene un único punto en común con \mathbb{S}_1 y ninguno con \mathbb{S}_2 . Utilizar este resultado para comprobar que \mathbb{V} no puede ser la unión de dos subespacios propios. En particular, es imposible que la unión de dos subespacios sea un subespacio salvo que uno de los dos contenga al otro.

1.32  Para las siguientes elecciones de subespacios \mathbb{S}_1 y \mathbb{S}_2 del espacio vectorial \mathbb{V} , hallar una base del mayor subespacio contenido en ambos y otra del menor subespacio que los contiene.

(a) \mathbb{S}_1 y \mathbb{S}_2 son los subespacios de \mathbb{R}^4 definidos por

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_1 &:= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^4 : x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}, \\ \mathbb{S}_2 &:= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \right\}. \end{aligned}$$

(b) \mathbb{S}_1 y \mathbb{S}_2 son los subespacios de \mathbb{R}^5 definidos por $\mathbb{S}_1 := \text{col}(A)$ y $\mathbb{S}_2 := \text{nul}(A)$, donde A es la siguiente matriz de $\mathbb{R}^{5 \times 5}$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

(c) \mathbb{S}_1 y \mathbb{S}_2 son los subespacios de \mathbb{R}^4 definidos por

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_1 &:= \text{gen} \left\{ [1 \ 0 \ 2 \ 1]^T, [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T \right\}, \\ \mathbb{S}_2 &:= \text{gen} \left\{ [4 \ 2 \ 2 \ 0]^T, [2 \ 0 \ 2 \ 0]^T \right\}.\end{aligned}$$

1.33  [ver **Ejercicio 1.23**] Sean $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y $B \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ dos matrices tales que:

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

donde $\text{rg}(B) = 2$. Hallar una base del subespacio

$$\text{nul}(B) + \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\}.$$

1.34 [*miniatura*] Sean \mathbb{S}_1 y \mathbb{S}_2 los subespacios de \mathbb{R}^2 definidos por

$$\mathbb{S}_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 = 0\}, \quad \mathbb{S}_2 := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0\}.$$

Hallar un subespacio \mathbb{T} de \mathbb{R}^2 tal que $\mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{T} = \mathbb{S}_2 \oplus \mathbb{T} = \mathbb{R}^2$. ¿Es único? Si la respuesta es negativa, construir otro.

1.35  Sean \mathbb{S}_1 y \mathbb{S}_2 los subespacios de \mathbb{R}^4 definidos por

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_1 &:= \text{gen} \left\{ [1 \ 2 \ 2 \ 1]^T, [0 \ 1 \ 0 \ -1]^T \right\}, \\ \mathbb{S}_2 &:= \text{gen} \left\{ [1 \ 0 \ 1 \ 2]^T, [1 \ 2 \ 1 \ 0]^T \right\}.\end{aligned}$$

Construir un subespacio \mathbb{T} de \mathbb{R}^4 tal que

$$\mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{T} = \mathbb{S}_2 \oplus \mathbb{T} = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}.$$

¿Es único? Si la respuesta es negativa, construir otro.

1.36 Sean \mathbb{S}_1 y \mathbb{S}_2 los subespacios de \mathbb{R}^4 definidos por

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_1 &:= \text{gen} \left\{ [1 \ 0 \ 2 \ 1]^T, [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T \right\}, \\ \mathbb{S}_2 &:= \{x \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, -x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\}.\end{aligned}$$

Hallar un subespacio \mathbb{T} de \mathbb{R}^4 tal que $\mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{T} = \mathbb{S}_2 \oplus \mathbb{T} = \mathbb{R}^4$. ¿Es único? Si la respuesta es negativa, construir otro.

Guía 2

PRELIMINARES Y NOTACIÓN

1. Sean \mathcal{X} e \mathcal{Y} dos conjuntos. Una *aplicación* (o *función*) $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ de \mathcal{X} en \mathcal{Y} , es una relación entre \mathcal{X} e \mathcal{Y} que a cada elemento $x \in \mathcal{X}$ le asigna un único elemento del conjunto \mathcal{Y} que se denota mediante $f(x)$.
2. Con $\text{id}_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ se denota la aplicación identidad de \mathcal{X} :

$$\text{id}_{\mathcal{X}}(x) = x \quad \text{cualquiera sea } x \in \mathcal{X}.$$

3. Sea $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ una aplicación de \mathcal{X} en \mathcal{Y} .
 - Dados $x \in \mathcal{X}$ e $y \in \mathcal{Y}$, si $f(x) = y$ se dice que y es la *imagen* de x por f y que x es *imagen inversa* de y . El conjunto de todas las imágenes inversas de y por f , se denomina *la preimagen de y en \mathcal{X}* y se designa con $f^{-1}(y)$

$$f^{-1}(y) := \{x \in \mathcal{X} : f(x) = y\}.$$

- Se dice que f es *inyectiva* si $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$ cualesquiera sean $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, o equivalentemente si $f(x_1) \neq f(x_2)$ cada vez que $x_1 \neq x_2$. Notar que f es inyectiva si, y sólo si para cualquier $y \in \mathcal{Y}$, la ecuación $f(x) = y$ admite como máximo una solución en \mathcal{X} .
- Se dice que f es *sobreyectiva* si para todo $y \in \mathcal{Y}$ existe $x \in \mathcal{X}$ tal que $f(x) = y$. Notar que f es sobreyectiva si, y sólo si para cualquier $y \in \mathcal{Y}$, la ecuación $f(x) = y$ admite como mínimo una solución en \mathcal{X} .
- Se dice que f es *biyectiva* si f es inyectiva y sobreyectiva. Notar que f es biyectiva si, y sólo si para cualquier $y \in \mathcal{Y}$, la ecuación $f(x) = y$ admite exactamente una solución en \mathcal{X} .
- Si $X \subseteq \mathcal{X}$, el conjunto de todas las imágenes de elementos de X por f se designa por $f(X)$

$$f(X) := \{f(x) : x \in X\} = \{y \in \mathcal{Y} : \text{existe } x \in X \text{ tal que } f(x) = y\}$$

y se denomina *el conjunto imagen de X por f* .

- *La imagen de f* es el conjunto $f(\mathcal{X})$. Notar que f es sobreyectiva si, y sólo si $f(\mathcal{X}) = \mathcal{Y}$.
- Si $Y \subseteq \mathcal{Y}$, el conjunto de todos aquellos elementos de \mathcal{X} cuyas imágenes pertenecen a Y se designa con $f^{-1}(Y)$

$$f^{-1}(Y) := \{x \in \mathcal{X} : f(x) \in Y\}$$

y se denomina *la preimagen de Y en \mathcal{X}* .

4. Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ conjuntos. Sean $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ y $g : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ dos aplicaciones. La *composición de g con f* es la aplicación

$$g \circ f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$$

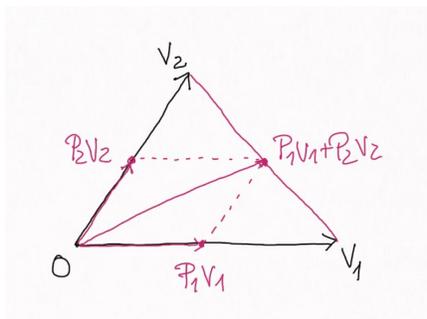
definida por $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ para todo $x \in \mathcal{X}$.

5. Los símbolos \mathbb{V} y \mathbb{W} están reservados para designar \mathbb{K} -espacios vectoriales.

6. Sea \mathbb{V} un \mathbb{R} espacio vectorial y sea $\mathcal{V} = \{v_i : i \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{V}$ un conjunto de n puntos de \mathbb{V} . Se dice que $v \in \mathbb{V}$ es una *combinación lineal convexa* de elementos de \mathcal{V} si

$$v = \sum_{i=1}^n p_i v_i$$

para algunos $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}^+$ tales que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

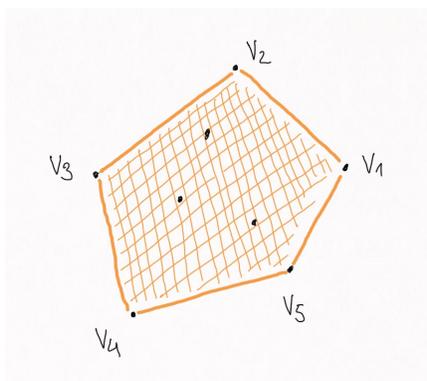


Combinaciones lineales convexas de $\{v_1, v_2\}$. Los puntos de la forma $v = p_1 v_1 + p_2 v_2$, con $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$ y $p_1 + p_2 = 1$ constituyen los puntos del segmento de recta que unen a los puntos v_1 y v_2 . En el ejemplo, $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$.

7. El conjunto $C(\mathcal{V})$ de todas las combinaciones lineales convexas de elementos de \mathcal{V}

$$C(\mathcal{V}) := \left\{ \sum_{i=1}^n p_i v_i : p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}^+ \text{ y } \sum_{i=1}^n p_i = 1 \right\}$$

se llama la *cápsula convexa* del conjunto \mathcal{V} .



Forma de la cápsula convexa $C(\mathcal{V})$ de un conjunto de puntos \mathcal{V} contenidos en un plano: se trata de la región encerrada por un polígono cuyos vértices son algunos de los puntos de \mathcal{V} .

8. El conjunto de todas las transformaciones lineales de \mathbb{V} en \mathbb{W} se denota por $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. Cuando $\mathbb{W} = \mathbb{V}$, escribimos $\mathcal{L}(\mathbb{V})$ en lugar de $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$.

9. Con $\mathbf{0} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ denotamos la transformación lineal nula de \mathbb{V} en \mathbb{W} .
10. Con $I_{\mathbb{V}} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ denotamos la transformación lineal identidad de \mathbb{V} . Cuando el contexto sea inequívoco escribiremos I en lugar de $I_{\mathbb{V}}$.
11. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ se dice que
 - T es un *monomorfismo* cuando T es inyectiva,
 - T es un *epiformismo* cuando T es sobreyectiva,
 - T es un *isomorfismo* cuando T es biyectiva.
12. \mathbb{V} y \mathbb{W} se dicen *isomorfos* cuando existe un isomorfismo de \mathbb{V} en \mathbb{W} .
13. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$.
 - La preimagen de $0_{\mathbb{W}}$ en \mathbb{V} se llama *el núcleo de T* y se denota por $\text{Nu}(T)$

$$\text{Nu}(T) := \{v \in \mathbb{V} : T(v) = 0_{\mathbb{W}}\}.$$
 - La imagen de T se denota por $\text{Im}(T)$

$$\text{Im}(T) := \{T(v) : v \in \mathbb{V}\}.$$
14. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$. Los símbolos T^k con $k \in \mathbb{N}_0$ se utilizan para denotar las transformaciones lineales definidas por: $T^0 := I$, $T^1 := T$, $T^2 := T \circ T$, $T^3 := T \circ T^2$, etcétera.
15. Cuando las letras del abecedario no son suficientes se recurre a las letras griegas. He aquí la equivalencia con el abecedario de las letras griegas que usamos a lo largo de esta guía.

| Figura | Nombre | Equivalencia | Figura | Nombre | Equivalencia |
|-----------|-----------|--------------|----------|----------|--------------|
| A | α | Alfa | Π | π | Pi |
| B | β | Beta | Σ | σ | Sigma |
| Δ | δ | Delta | Φ | ϕ | Phi |
| Θ | θ | Theta | Ω | ω | Omega |
| Λ | λ | Lambda | | | |

16. La expresión ϕ es una *funcional lineal de \mathbb{V}* significa que $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{K})$.
17. Dado $k \in \mathbb{N}$, $[0 : k]$ denota el conjunto $\{0, 1, \dots, k\} \subset \mathbb{N}_0$.
18. En todo lo que sigue \mathbb{K} es \mathbb{R} o \mathbb{C} .
19. Dado $v \in \mathbb{K}^n$, v^* es el traspuesto conjugado del vector v . Esto es, $v^* = \overline{v^T}$. Observar que cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $v^* = v^T$.
20. Dada $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $A^* \in \mathbb{K}^{n \times m}$ es la matriz traspuesta conjugada de A . Esto es, $A^* = \overline{A^T}$. Observar que cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $A^* = A^T$.
21. Dados $i \in \mathbb{I}_m$ y $j \in \mathbb{I}_n$, la matriz de $\mathbb{K}^{m \times n}$ con 1 en la entrada ij y ceros en cualquier otra entrada, $E_{ij} := [\delta_{pi}\delta_{qj}]_{\substack{p \in \mathbb{I}_m \\ q \in \mathbb{I}_n}}$ se llama *la matriz ij de la base canónica de $\mathbb{K}^{m \times n}$* . Por ejemplo, las matrices E_{ij} de la base canónica de $\mathbb{K}^{2 \times 2}$ son

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
22. El conjunto $\{E_{ij} : i \in \mathbb{I}_m, j \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{K}^{m \times n}$ se llama la base canónica de $\mathbb{K}^{m \times n}$.
23. Dada $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, su traza es el número $\text{tr}(A) := \sum_{i=1}^n A_{ii}$ que se obtiene de sumar todos los elementos de la diagonal principal de A .

24. El conjunto $\{x^j : j \in [0 : n]\} \subset \mathbb{K}_n[x]$ se llama la base canónica de $\mathbb{K}_n[x]$, y el conjunto $\{x^j : j \in \mathbb{N}_0\} \subset \mathbb{K}[x]$ se llama la base canónica de $\mathbb{K}[x]$.
25. El símbolo $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ se utiliza para designar al conjunto de las funciones infinitamente derivables de \mathbb{R} en \mathbb{K} .
26. La letra D está reservada para designar el operador de derivación $D : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ definido por

$$D[y] := \frac{dy}{dx}.$$

27. **Principio de inducción.** Sea $\mathcal{P}(k)$ una función proposicional con $k \in \mathbb{N}$. Si
- (1) La primera proposición $\mathcal{P}(1)$ es verdadera; y
- (H.I.) para cada $k \in \mathbb{N}$, bajo la hipótesis de la validez de $\mathcal{P}(k)$ puede deducirse la validez de la proposición $\mathcal{P}(k+1)$, entonces, $\mathcal{P}(k)$ es verdadera para todo $k \in \mathbb{N}$.¹
28. Toda $L \in \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}))$ que tenga la forma

$$L = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0I,$$

con $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ se denomina *operador diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes*. El polinomio $p \in \mathbb{K}_n[x]$ que se obtiene de L intercambiando papeles entre D y x

$$p(x) = x^n + \sum_{k=1}^n a_{n-k}x^{n-k},$$

se denomina *el polinomio característico del operador L* . Se puede demostrar que: si p se factoriza en la forma

$$p(x) = \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{k_i},$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ y $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$ son tales que $\sum_{i=1}^r k_i = n$, entonces L se factoriza de manera análoga

$$L = \prod_{i=1}^r (D - \lambda_i I)^{k_i}.$$

La prueba está basada sobre el principio de inducción y en la propiedad conmutativa de los operadores diferenciales de la forma $D - \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$, con respecto a la composición.²

¹Este principio deberá ponerse en práctica en el **Ejercicio 2.27**.

²Este hecho será utilizado desde el **Ejercicio 2.30** hasta el **Ejercicio 2.34**.

EJERCICIOS

2.1 Verificar que las siguientes aplicaciones son transformaciones lineales.

(a) $T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T_1 \left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T \right) := -3x_2 + 2x_3$.

(b) $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T_2 \left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T \right) := \begin{bmatrix} -3x_2 + 2x_3 & 3x_1 - x_3 \end{bmatrix}^T$.

(c) $T_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T_3 \left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T \right) := \begin{bmatrix} -3x_2 + 2x_3 & 3x_1 - x_3 & -2x_1 + x_2 \end{bmatrix}^T.$$

2.2 Usando que toda transformación lineal $T : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ verifica que

$$T(a_1v_1 + \cdots + a_kv_k) = a_1T(v_1) + \cdots + a_kT(v_k)$$

para cualquier cantidad k de vectores $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{K}^n$ y escalares $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$, comprobar que

$$T \left(\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T \right) = \begin{bmatrix} T(e_1) & \cdots & T(e_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T.$$

Concluir que todas las transformaciones lineales de \mathbb{K}^n en \mathbb{K}^m son de la forma $T(x) = A_T x$, donde $A_T \in \mathbb{K}^{m \times n}$ es la matriz definida por

$$A_T := \begin{bmatrix} T(e_1) & \cdots & T(e_n) \end{bmatrix}.$$

: ¿cuáles son las matrices A_{T_1} , A_{T_2} , A_{T_3} de las transformaciones lineales T_1, T_2, T_3 definidas en el **Ejercicio 2.1**?

2.3  [ver **Ejercicio 1.32**] Sea $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ la transformación lineal definida por

$$T \left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix}^T \right) = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 \\ -x_1 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 \\ -x_1 + 3x_3 - 5x_4 + 3x_5 \\ -x_1 + 3x_3 - 6x_4 + 4x_5 \\ -x_1 + 3x_3 - 6x_4 + 4x_5 \end{bmatrix}.$$

(a) Hallar una base del núcleo de T .

(b) Hallar una base de la imagen de T .

(c) Comprobar que el vector $b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T$ pertenece a la imagen de T y resolver la ecuación $T(x) = b$.

2.4 Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por

$$T(p) = \begin{bmatrix} p(0) & p(1) & p(2) \end{bmatrix}^T.$$

- (a) Explicar por qué T es una transformación lineal.
- (b) Hallar una base del núcleo de T .
- (c) Mostrar que para cada $j \in \mathbb{I}_3$, la ecuación $T(p) = e_j$ admite solución y hallar todas las soluciones de la misma.
- (d) Resolver la ecuación $T(p) = [3 \ 6 \ 36]^T$.
-

2.5  Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ la aplicación definida por

$$T(p) = p + (1 - x)p'.$$

- (a) Explicar por qué T está bien definida y es una transformación lineal.
- (b) Hallar una base del núcleo de T .
- (c) Hallar una base de la imagen de T .
- (d) Comprobar que el polinomio $q = 1 + x + x^2 - x^3$ pertenece a la imagen de T y resolver la ecuación $T(p) = q$.
-

2.6  Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T \left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T \right) = \begin{bmatrix} bx_3 - x_2 & x_1 - ax_3 & ax_2 - bx_1 \end{bmatrix}^T,$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que

$$\text{Im}(T) = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}.$$

Comprobar que $y = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}^T \in \text{Im}(T)$ y resolver la ecuación $T(x) = y$.

2.7 Sean \mathbb{V} y \mathbb{W} dos \mathbb{R} -espacios vectoriales, $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal, y $\mathcal{V} = \{v_i : i \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{V}$ un conjunto de n puntos de \mathbb{V} . Comprobar que la imagen de la cápsula convexa de \mathcal{V} por T es la cápsula convexa de la imagen de \mathcal{V} por T . En símbolos, $T(C(\mathcal{V})) = C(T(\mathcal{V}))$.

: leer los puntos 6. y 7. de preliminares y notación.

2.8  Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $T(x) := Ax$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

y sean e_1, e_2 los vectores de la base canónica \mathbb{R}^2 : $e_1 = [1 \ 0]^T$, $e_2 = [0 \ 1]^T$. Hallar y graficar la imagen por T del conjunto $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ definido por

- (a) $\mathcal{R} = \{e_1, e_2, e_1 + e_2\}$.

(b) \mathcal{R} es el segmento de recta que une a los puntos e_1 y e_2 , es decir, $\mathcal{R} = C(\{e_1, e_2\})$.

(c) \mathcal{R} es el triángulo de vértices $0, e_1, e_2$, es decir, $\mathcal{R} = C(\{0, e_1, e_2\})$.

(d) \mathcal{R} es el cuadrado de vértices $0, e_1, e_2, e_1 + e_2$, es decir, $\mathcal{R} = C(\{0, e_1, e_2, e_1 + e_2\})$.

(e) \mathcal{R} es el paralelogramo de vértices $0, e_1 + e_2, e_1 - e_2, 2e_1$, es decir,

$$\mathcal{R} = C(\{0, e_1 + e_2, e_1 - e_2, 2e_1\}).$$

2.9  Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T\right) &= \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \end{bmatrix}^T, \\ T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T\right) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \\ T\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T\right) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T, \\ T\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T\right) &= \begin{bmatrix} 5 & 1 & a^2 \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

2.10 Sea \mathcal{B} la base de \mathbb{R}^3 definida por

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \right\},$$

y sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal que actúa sobre la base \mathcal{B} de la siguiente manera

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T\right) &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}^T, \\ T\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T\right) &= \begin{bmatrix} -3 & \frac{9}{2} & -6 \end{bmatrix}^T, \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T\right) &= \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

(a) Hallar una base del núcleo de T y describirlo geoméricamente.

(b) Hallar una base de la imagen de T y describirla geoméricamente.

(c) Hallar $T\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T\right)$ y usar ese resultado para calcular $T\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}^T\right)$.

2.11 Sea \mathcal{B} la base de \mathbb{R}^3 definida por

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T \right\},$$

y sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ una transformación lineal que actúa sobre la base \mathcal{B} de la siguiente manera

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T\right) &= 1 - x, \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T\right) &= 1 + x^2, \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T\right) &= x + x^2. \end{aligned}$$

Comprobar que el polinomio $p = 2 + x + 3x^2$ pertenece a la imagen de T y determinar $T^{-1}(p) := T^{-1}(\{p\})$.

2.12  Sea \mathcal{B} la base de \mathbb{R}^3 definida por

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T \right\},$$

y sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal que actúa sobre la base \mathcal{B} de la siguiente manera

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T\right) &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T, \\ T\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T\right) &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T, \\ T\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T\right) &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

(a) Hallar la imagen por T del subespacio $\text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}^T \right\}$.

(b) Hallar la preimagen por T del subespacio $\{y \in \mathbb{R}^3 : y_1 - y_3 = 0, y_1 + y_2 + y_3 = 0\}$.

2.13  Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ con \mathbb{V} y \mathbb{W} de dimensión finita. Sea $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ la matriz de T con respecto a las bases \mathcal{B} de \mathbb{V} y \mathcal{C} de \mathbb{W} . Verificar las siguientes afirmaciones.

(a) T es monomorfismo si, y sólo si, $\text{nul}([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}) = \{0\}$.

(b) T es epimorfismo si, y sólo si, $\text{col}([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}) = \mathbb{K}^{\dim(\mathbb{W})}$.

(c) T es isomorfismo si, y sólo si, $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ es inversible.

2.14 Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$, donde \mathbb{V} y \mathbb{W} son algunos de los siguientes \mathbb{R} -espacios vectoriales: \mathbb{R}^n , $\mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbb{R}_n[x]$. Hallar, para cada uno de los siguientes casos, la matriz de T con respecto a las bases canónicas de \mathbb{V} y \mathbb{W} , y analizando las propiedades de dicha matriz determinar las propiedades de T .

(a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la transformación lineal definida por $T(x) := Ax$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

(b) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la transformación lineal definida por $T(x) := Ax$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

(c) $T : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}^4$ es la transformación lineal definida por

$$T(p) := [p(0) \quad p(1) \quad p(10) \quad p(100)]^T.$$

(d) $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es la transformación lineal definida por

$$T(p) := \begin{bmatrix} p(0) & p(1) \\ p'(0) & p'(1) \end{bmatrix}.$$

2.15 Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}^3)$ la transformación lineal definida por

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde \mathcal{B} y \mathcal{C} son las bases de $\mathbb{R}_2[x]$ y \mathbb{R}^3 , respectivamente, definidas por

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{1 + x^2, 1 + x, x + x^2\}, \\ \mathcal{C} &= \left\{ [1 \ 1 \ 0]^T, [1 \ 0 \ 1]^T, [0 \ 1 \ 1]^T \right\}. \end{aligned}$$

(a) Analizar las propiedades de T .

(b) Hallar $T^{-1} \left([1 \ 0 \ 1]^T \right)$.

2.16  Sean $\mathbb{V} = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : A^T = A\}$ el \mathbb{R} -espacio vectorial de las matrices simétricas de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, y $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{R}^3)$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde es la matriz de T con respecto a las bases $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ de \mathbb{V} y $\mathcal{C} = \left\{ [1 \ 1 \ 0]^T, [1 \ 0 \ 1]^T, [0 \ 1 \ 1]^T \right\}$ de \mathbb{R}^3 . Hallar el conjunto solución de la ecuación $T(A) = [1 \ 0 \ 1]^T$.

2.17  [ver **Ejercicio 1.26**] Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}^3)$ la transformación lineal definida por

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

donde \mathcal{B} y \mathcal{C} son las bases de $\mathbb{R}_2[x]$ y \mathbb{R}^3 , respectivamente, definidas por

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{2}x(x-1), -x(x-2), \frac{1}{2}(x-1)(x-2) \right\},$$

$$\mathcal{C} = \left\{ [2 \ 2 \ 1]^T, [-2 \ 1 \ 2]^T, [1 \ -2 \ 2]^T \right\}.$$

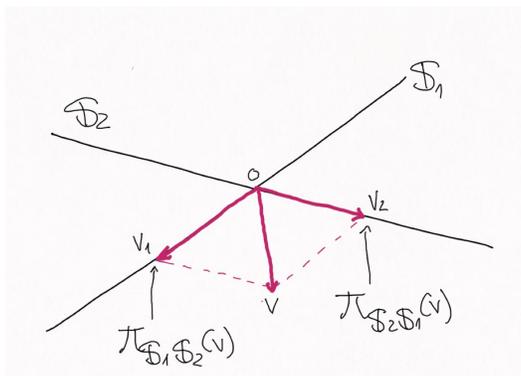
- (a) Analizar las propiedades de T .
- (b) Hallar la matriz de T con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$ y la base \mathcal{C} de \mathbb{R}^3 .
- (c) Hallar la matriz de T con respecto a la base \mathcal{B} de $\mathbb{R}_2[x]$ y la base canónica de \mathbb{R}^3 .
- (d) Hallar la matriz de T con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}_2[x]$ y \mathbb{R}^3 .
- (e) Hallar la imagen por T del subespacio $\text{gen} \{2 + 3x + 2x^2, 5 + 5x + 4x^2\}$.

2.18  Sea $T_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ la transformación lineal definida en el **Ejercicio 2.10**, y sea $T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2[x])$ la transformación lineal definida por

$$T_2 \left([a \ b \ c]^T \right) := (a+b) + (a+c)x + (b+c)x^2.$$

- (a) Hallar las matrices de T_1 , T_2 y T_2^{-1} con respecto a las bases canónicas que correspondan.
- (b) Hallar la matriz de $T_1 \circ T_2^{-1}$ con respecto a las mismas bases y utilizarla para hallar una base de $\text{Nu}(T_1 \circ T_2^{-1})$.

2.19  Sea \mathbb{V} un \mathbb{K} -espacio vectorial y sean $\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2$ dos subespacios suplementarios de \mathbb{V} , esto es, todo vector $v \in \mathbb{V}$ se escribe de manera única como $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in \mathbb{S}_1$ y $v_2 \in \mathbb{S}_2$.



La proyección de \mathbb{V} sobre \mathbb{S}_1 en la dirección de \mathbb{S}_2 , denotada por $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$, es la transformación lineal de \mathbb{V} en \mathbb{V} definida por

$$\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) := v_1.$$

Análogamente, se define $\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}$ por $\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}(v) := v_2$.

(a) Explicar por qué $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$ es la única transformación lineal de \mathbb{V} en \mathbb{V} tal que

$$\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) = \begin{cases} v & \text{si } v \in \mathbb{S}_1, \\ 0 & \text{si } v \in \mathbb{S}_2, \end{cases}$$

y comprobar que $\mathbb{V} = \text{Im}(\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}) \oplus \text{Nu}(\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2})$.

(b) Comprobar que $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$ posee la propiedad de *idempotencia*: $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}^2 = \Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$.

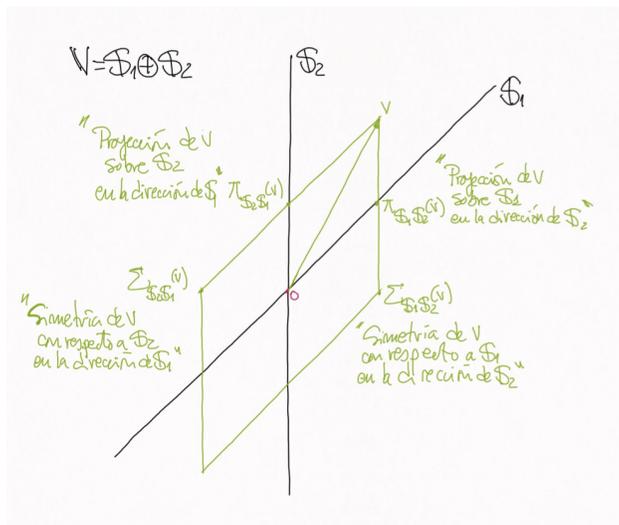
(c) Observar que $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} + \Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1} = I_{\mathbb{V}}$.

(d) Mostrar que $\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} := I_{\mathbb{V}} - 2\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}$ es la única transformación lineal de \mathbb{V} en \mathbb{V} tal que

$$\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) = \begin{cases} v & \text{si } v \in \mathbb{S}_1, \\ -v & \text{si } v \in \mathbb{S}_2, \end{cases}$$

razón por la cual $\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$ se denomina *la simetría de \mathbb{V} con respecto a \mathbb{S}_1 en la dirección de \mathbb{S}_2* .

(e) Explicar por qué $\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}^2 = I_{\mathbb{V}}$.



Proyecciones y simetrías inducidas por una partición de \mathbb{V} en suma directa de dos subespacios \mathbb{S}_1 y \mathbb{S}_2 .

2.20  Sean \mathbb{V} un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión 3, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de \mathbb{V} , \mathbb{S}_1 y \mathbb{S}_2 los subespacios de \mathbb{V} definidos por

$$\mathbb{S}_1 = \text{gen}\{v_1 - 2v_2, v_1 + v_3\}, \quad \mathbb{S}_2 = \text{gen}\{v_2 - v_3\}.$$

(a) Comprobar que $\mathbb{V} = \mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2$.

(b) Hallar las matrices con respecto a la base \mathcal{B} de las proyecciones y simetrías inducidas por la partición $\mathbb{V} = \mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2$.

2.21 , Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ a matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 16 & 11 \\ 5 & 9 & 6 \\ 0 & 16 & 14 \end{bmatrix}$$

(a) Comprobar que $\mathbb{R}^3 = \text{nul}(A) \oplus \text{fil}(A)$.

(b) Hallar las matrices con respecto a la base canónica de las proyecciones y simetrías inducidas por la partición $\mathbb{R}^3 = \text{nul}(A) \oplus \text{fil}(A)$.

2.22  Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ la transformación lineal definida por

$$T \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Hallar la matriz con respecto a la base canónica de la proyección de \mathbb{R}^3 sobre $\text{Im}(T)$ en la dirección de $\text{Nu}(T)$.

2.23 Verificar las siguientes afirmaciones.

(a) Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $T^2 = T$, entonces T es la proyección de \mathbb{V} sobre $\text{Im}(T)$ en la dirección de $\text{Nu}(T)$.

(b) Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $T^2 = T$, entonces $S = I_{\mathbb{V}} - 2T$ es tal que $S^2 = I_{\mathbb{V}}$.

(c) Si $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $S^2 = I_{\mathbb{V}}$, entonces $T = \frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)$ es tal que $T^2 = T$.

(d) Si $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $S^2 = I_{\mathbb{V}}$, entonces S es la simetría de \mathbb{V} con respecto a $\text{Nu}(\frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S))$ en la dirección de $\text{Im}(\frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S))$.

(e) Si $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $S^2 = I_{\mathbb{V}}$, entonces $\mathbb{V} = \text{Nu}(S - I_{\mathbb{V}}) \oplus \text{Nu}(S + I_{\mathbb{V}})$.

2.24  Sean $T, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ las transformaciones lineales definidas por

$$T \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) := \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad S \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

(a) Comprobar que T es una proyección y hallar una base \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 tal que

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Comprobar que S es una simetría y hallar una base \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 tal que

$$[S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2.25 Sea $O(2, \mathbb{R}) := \{R_{\theta}, S_{\theta} : \theta \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ el conjunto de todas las transformaciones lineales de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 definidas por

$$R_{\theta} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$S_{\theta} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Hallar y graficar la imagen de la base canónica de \mathbb{R}^2 por $R_{\pi/3}$ y explicar el significado geométrico de la acción de $R_{\pi/3}$ sobre los vectores de \mathbb{R}^2 .

(b) Hallar y graficar la imagen de la base

$$\left\{ \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \right\}$$

por $S_{\pi/3}$ y explicar el significado geométrico de la acción de $S_{\pi/3}$ sobre los vectores de \mathbb{R}^2 .

(c) Hallar y graficar la imagen de la base canónica de \mathbb{R}^2 por R_{θ} y explicar el significado geométrico de la acción de R_{θ} sobre los vectores de \mathbb{R}^2 .

(d) Comprobar que

$$\left\{ \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \operatorname{sen}(\theta/2) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \right\}$$

es una base de \mathbb{R}^2 y hallar su imagen por S_{θ} .

(e) ¿Cuál es el significado geométrico de la acción de S_{θ} sobre los vectores de \mathbb{R}^2 ?

(f) Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, hallar las matrices respecto a la base canónica de las siguientes transformaciones lineales, y en cada caso explicar su significado geométrico:

$$R_{\alpha} \circ R_{\beta}; \quad S_{\alpha} \circ S_{\beta}, \quad S_{\alpha} \circ R_{\beta}, \quad R_{\beta} \circ S_{\alpha}.$$

(g) Concluir que el conjunto $O(2, \mathbb{R})$ es cerrado por composiciones.

(h) Observar que $R_0 = I_{\mathbb{R}^2}$.

(i) Comprobar que R_θ y S_θ son isomorfismos y hallar R_θ^{-1} y S_θ^{-1} .

2.26 Observar que la transformación lineal $R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\begin{aligned} R \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \right) &:= [\cos \theta & \operatorname{sen} \theta & 0]^T, \\ R \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \right) &:= [-\operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0]^T, \\ R \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \right) &:= [0 & 0 & 1]^T, \end{aligned}$$

es la rotación de ángulo θ en sentido antihorario del plano xy alrededor del eje z .

(a) Hallar y graficar la imagen de los siguientes vectores por la rotación de ángulo $\pi/4$ en sentido antihorario del plano xy alrededor del eje z :

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

(b) Hallar la matriz respecto de la base canónica de la rotación de ángulo θ en sentido antihorario del plano yz alrededor del eje x .

(c) Hallar la matriz respecto de la base canónica de la rotación de ángulo θ en sentido antihorario zx alrededor del eje y .

2.27 Sea $D : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ el operador de derivación

(a) Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Verificar que para todo $k \in \mathbb{N}$ vale que

$$(D - \lambda I)^k [f(x)e^{\lambda x}] = f^{(k)}(x)e^{\lambda x}$$

para toda $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

(b) Comprobar que $\operatorname{Nu}(D - \lambda I) = \operatorname{gen} \{e^{\lambda x}\}$.

(c) Para cada $k \in \mathbb{N}$ verificar que si

$$\operatorname{Nu} \left((D - \lambda I)^k \right) = \{p(x)e^{\lambda x} : p \in \mathbb{C}_{k-1}[x]\},$$

entonces

$$\operatorname{Nu} \left((D - \lambda I)^{k+1} \right) = \{p(x)e^{\lambda x} : p \in \mathbb{C}_k[x]\}.$$

↳: escribir la ecuación $(D - \lambda I)^{k+1} [y] = 0$ en la forma $(D - \lambda I)^k [z] = 0$, donde $z = (D - \lambda I) [y]$.

(d) Utilizar los incisos (b) y (c) junto al principio de inducción para demostrar que para todo $k \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{x^i e^{\lambda x} : i \in [0 : k - 1]\}$ es una base $\operatorname{Nu} \left((D - \lambda I)^k \right)$.

(e) Sea $g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Comprobar que la ecuación

$$(D - \lambda I)^k [y] = g,$$

admite una solución particular de la forma $y_p = f(x)e^{\lambda x}$, donde $f^{(k)}(x) = g(x)e^{-\lambda x}$.

2.28 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

- (a) $y' - y = 0$,
 - (b) $y' - y = e^{2x}$,
 - (c) $y' - y = xe^{2x}$,
 - (d) $y' - y = (3 + 5x)e^{2x}$,
 - (e) $y'' - 2y' + y = (3 + 5x)e^{2x}$,
 - (f) $(D - I)^3[y] = (3 + 5x)e^{2x}$.
-

2.29  Sea \mathbb{V} un \mathbb{K} -espacio vectorial y sean L y A dos transformaciones lineales de \mathbb{V} en \mathbb{V} que satisfacen las siguientes propiedades

- (i) $L \circ A = A \circ L$,
- (ii) $\text{Nu}(A \circ L)$ es de dimensión finita.

Verificar que

- (a) $\text{Nu}(L) + \text{Nu}(A) \subseteq \text{Nu}(A \circ L)$;
- (b) si $w \in \text{Nu}(A) \cap \text{Im}(L)$, entonces toda solución de la ecuación $L(v) = w$ pertenece a $\text{Nu}(A \circ L)$;
- (c) si $w \in \text{Nu}(A) \cap \text{Im}(L)$ y si \mathbb{S} es un subespacio de $\text{Nu}(A \circ L)$ tal que $\text{Nu}(L) \oplus \mathbb{S} = \text{Nu}(A \circ L)$, entonces existe un único $v \in \mathbb{S}$ tal que $L(v) = w$;

 *reparar la demostración del teorema de la dimensión para las transformaciones lineales definidas en dominios de dimensión finita.*

- (d) si además $\text{Nu}(L) \cap \text{Nu}(A) = \{0\}$, entonces
 - para cada $w \in \text{Nu}(A) \cap \text{Im}(L)$ existe un único $v \in \text{Nu}(A)$ tal que $L(v) = w$,
 - $\text{Nu}(A \circ L) = \text{Nu}(A) \oplus \text{Nu}(L)$.
-

2.30  Se considera el operador diferencial $L : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ definido por

$$L := (D - 2I)(D - 4I)(D + 3I)^2,$$

y la ecuación diferencial $L[y] = p$, donde $p(x) = 5x^3e^{-3x}$.

- (a) Hallar una base \mathcal{B}_L de $\text{Nu}(L)$.
- (b) Comprobar que el operador $A = (D + 3I)^4$ es un *aniquilador* de p : $A[p] = 0$.
- (c) Hallar una base \mathcal{B}_{AL} de $\text{Nu}(A \circ L)$ que contenga a la base \mathcal{B}_L .

(d) Comprobar que existe una solución particular y_p de la ecuación $L[y] = p$ perteneciente al subespacio $\text{gen}(\mathcal{B}_{AL} \setminus \mathcal{B}_L)$.

(e) Hallar la solución general de la ecuación diferencial $L[y] = p$.

2.31 📱 Para cada $\omega \in \{1, 7/4, 2\}$, hallar y graficar la solución del problema

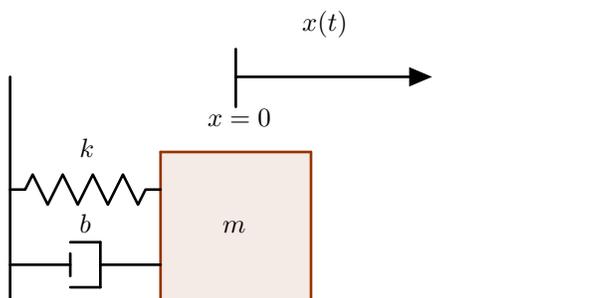
$$y'' + 4y = \cos(\omega t)$$

con las condiciones iniciales $y(0) = 1/2$, $y'(0) = 0$.

2.32 🛑 [ver **Ejercicio 1.17** y **Ejercicio 1.18**] Se considera la ecuación diferencial general

$$(1) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0,$$

donde m , b y k son constantes positivas. Esta ecuación representa la dinámica de un sistema masa-resorte-amortiguador como el que se muestra en la figura



Sistema masa-resorte-amortiguador: m es la masa del objeto, k es la constante elástica del resorte y b es el coeficiente de roce viscoso del amortiguador.

(a) Mostrar que las raíces del polinomio característico de la ecuación (1) son

$$\lambda = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}.$$

(b) En cada uno de los siguientes casos, hallar la solución general x_h de la ecuación

(1) en términos de las constantes b , m y $\Omega := \sqrt{\left|\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}\right|}$ y explicar por qué

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_h(t) = 0.$$

1. *Sobreamortiguado*: $\left(\frac{b}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m}$.
2. *Críticamente amortiguado*: $\left(\frac{b}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m}$.
3. *Subamortiguado*: $\left(\frac{b}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m}$.

(c)  Para cada $b \in \{15, 20, 25, 30\}$ hallar y graficar la solución de la ecuación diferencial $4x'' + bx' + 25x = 0$ sujeta a las condiciones iniciales $x(0) = 1/2$, $x'(0) = 0$.

2.33 En cada uno de los siguientes casos construir una ecuación diferencial

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0,$$

con $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, del menor orden posible que tenga como soluciones a las funciones indicadas.

(a) $y_1 = e^t$, $y_2 = e^{2t}$;

(b) $y_1 = te^t$;

(c) $y_1 = t^2e^{2t}$;

(d) $y_1 = te^{4t} \operatorname{sen}(t)$;

(e) $y_1 = t$, $y_2 = \cos(3t)$, $y_3 = e^{-t}$.

2.34  Sea $L : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ el operador diferencial

$$L[y] := y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y,$$

de orden mínimo tal que la ecuación diferencial $L[y] = 0$ tiene como soluciones a las funciones $y_1 = t$, $y_2 = e^{-2t}$, $y_3 = \cos(3t)$.

(a) Hallar la solución general de la ecuación diferencial homogénea $L[y] = 0$.

(b) Hallar una solución particular de la ecuación diferencial $L[y] = te^t$.

(c) Hallar una solución particular de la ecuación diferencial $L[y] = t$.

(d) Hallar la solución general de la ecuación diferencial $L[y] = t(5 + 8e^t)$.

(e) Resolver el problema $L[y] = 0$ con las condiciones iniciales $y^{(i)}(0) = c_i$ para todo $i \in [0 : n - 1]$.

(f) ¿Cómo deben ser las condiciones iniciales, $(y^{(i)}(0) : i \in [0 : n - 1])$ para que la solución del problema $L[y] = 0$ satisfaga que $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$?

Guía 3

PRELIMINARES

Sobre espacios métricos y normados

1. Una *distancia*, o una *métrica*, en un conjunto \mathcal{X} es una función $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ que posee las tres propiedades siguientes:
 - a) Para $x, y \in \mathcal{X}$: $d(x, y) = 0$ si, y sólo si $x = y$.
 - b) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in \mathcal{X}$ (*simetría*).
 - c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in \mathcal{X}$ (*desigualdad triangular*).
 La expresión $d(x, y)$ se lee *la distancia entre los puntos x e y* . El par (\mathcal{X}, d) , constituido por el conjunto \mathcal{X} munido de una distancia, se denomina *espacio métrico*.
2. La noción de distancia permite introducir la noción de límite: se dice que *la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x* , o que x_n *tiende a x* , cuando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = 0.$$

En tal caso x se llama *el límite de la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$* y se denota por $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

3. En todo lo que sigue, y salvo que se diga lo contrario, \mathbb{K} es \mathbb{R} o \mathbb{C} .
4. Una *norma* en un \mathbb{K} -espacio vectorial \mathbb{V} es una función $\|\cdot\| : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$ que posee las tres propiedades siguientes:
 - a) $\|x\| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$.
 - b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{V}$.
 - c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in \mathbb{V}$ (*desigualdad triangular*).
 Al número no negativo $\|x\|$ se le denomina *la norma de x* y el par $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ se llama *espacio normado*. La norma de x representa la longitud del segmento de recta $[0, x] := \{tx : t \in [0, 1]\}$ que une a los puntos 0 y x . Notar que si $x \neq 0$, entonces $u_x := \|x\|^{-1}x$ pertenece al subespacio generado por x y $\|u_x\| = 1$.
5. Todo espacio normado $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ se convierte en un espacio métrico, si para cualesquiera $x, y \in \mathbb{V}$ se define

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

Notar que la distancia inducida por una norma posee las siguientes propiedades adicionales:

- a) $d(x, y) = d(x + z, y + z)$ (*invarianza por traslaciones*: la distancia entre x e y no cambia si ambos puntos se someten a una misma traslación).
- b) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ (*cambio de escala por dilataciones*: al dilatar ambos puntos por un mismo factor λ , la distancia queda multiplicada por $|\lambda|$).
- c) En particular, $d(x, y) = d(x - y, 0)$, de modo que las distancias al origen son suficientes para conocer todas las demás.

Sobre espacios euclídeos

6. Un *producto interno* en un \mathbb{K} -espacio vectorial \mathbb{V} es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}$ que posee las siguientes propiedades:
- (i) Para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x, y, z \in \mathbb{V}$
 - 1) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
 - 2) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$.
 - (ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \forall x, y \in \mathbb{V}$.
 - (iii) $\langle x, x \rangle > 0$ si $x \neq 0$.
7. Un \mathbb{K} -espacio vectorial \mathbb{V} munido de un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se llama *espacio euclídeo* y se denota por $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se dice que $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un *espacio euclídeo real* y cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ se dice que $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un *espacio euclídeo complejo*.
8. La tabla de multiplicación de una colección de vectores $\mathcal{X} = (x_i : i \in \mathbb{I}_n)$ se llama *la matriz de Gram de \mathcal{X}* y se denota por $G_{\mathcal{X}}$

$$G_{\mathcal{X}} := [\langle x_i, x_j \rangle]_{\substack{i \in \mathbb{I}_n \\ j \in \mathbb{I}_n}} = \begin{bmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{bmatrix}.$$

El *Gramiano de \mathcal{X}* , denotado por $G(\mathcal{X})$, es el determinante de la matriz $G_{\mathcal{X}}$.

9. La matriz de Gram de una base $\mathcal{B} = \{v_i : i \in \mathbb{I}_n\}$ de \mathbb{V} determina unívocamente al producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y se llama *la matriz del producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ respecto de la base \mathcal{B}* .
10. Todo espacio euclídeo $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se convierte en un espacio normado, si para cualquier $x \in \mathbb{V}$ se define

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

La función $\|\cdot\| : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$ así definida es una norma en \mathbb{V} y se llama la *norma inducida* por el producto interno.

11. La *desigualdad de Cauchy-Schwarz* establece que

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{V}.$$

12. Si \mathbb{V} es un \mathbb{R} -espacio vectorial el *ángulo θ entre dos vectores no nulos x e y* se define mediante la fórmula

$$\cos \theta := \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|},$$

donde $\theta \in [0, \pi]$. Notar que $\cos \theta = \langle u_x, u_y \rangle$.

13. Si $\langle y, x \rangle = 0$ se dice que *los vectores x e y son ortogonales* y se denota por $y \perp x$. El conjunto de todos los vectores ortogonales a x se denota por x^\perp , y se llama el *subespacio ortogonal a x*

$$x^\perp := \{y \in \mathbb{V} : \langle y, x \rangle = 0\}.$$

En los espacios euclídeos reales la condición $\langle y, x \rangle = 0$ implica que $\theta = \frac{\pi}{2}$ salvo que $x = 0$ o $y = 0$.

14. Obsérvese que si $x \neq 0$, entonces para todo $y \in \mathbb{V}$ vale que

$$y = \langle y, u_x \rangle u_x + (y - \langle y, u_x \rangle u_x).$$

15. El *teorema de Pitágoras* establece que si x e y son ortogonales, vale que

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

16. Un sistema de vectores $\mathcal{S} = \{v_i : i \in \mathbb{I}\} \subset \mathbb{V} \setminus \{0\}$ se llama *ortogonal*, cuando

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \text{ para todo } i \neq j.$$

Obsérvese que \mathcal{S} es un sistema ortogonal si, y sólo si, las matrices de Gram de todos los subconjuntos finitos de \mathcal{S} son diagonales.

17. Un sistema ortogonal de vectores $\{u_i : i \in \mathbb{I}\}$ se llama *ortonormal*, cuando

$$\|u_i\| = 1 \text{ para todo } i \in \mathbb{I}.$$

18. Si \mathcal{V} es un conjunto no vacío de vectores, el *subespacio ortogonal a \mathcal{V}* , denotado por \mathcal{V}^\perp , se define por

$$\mathcal{V}^\perp := \{x \in \mathbb{V} : \langle x, v \rangle = 0 \text{ para todo } v \in \mathcal{V}\}$$

19. El *producto interno canónico en \mathbb{K}^n* , $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ se define por

$$\langle x, y \rangle := y^* x,$$

donde $y^* := \overline{y^T}$ es el traspuesto conjugado del vector y . Notar que $y^* x = x^T \overline{y}$.

20. El *producto interno canónico en $\mathbb{K}^{m \times n}$* , $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{K}^{m \times n} \times \mathbb{K}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{K}$ se define por

$$\langle X, Y \rangle := \text{tr}(Y^* X),$$

donde $Y^* := \overline{Y^T}$ es la matriz traspuesta conjugada de Y . Notar que $\text{tr}(Y^* X) = \text{tr}(X^T \overline{Y})$.

EJERCICIOS

3.1 Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{C} -espacio euclídeo finito dimensional y sea $v_0 \in \mathbb{V} \setminus \{0\}$ un vector arbitrario pero fijo.

(a) Comprobar que la aplicación $\phi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\phi(v) := \langle v, v_0 \rangle$$

es una funcional lineal de \mathbb{V} . Describir su núcleo e indicar la dimensión del mismo. Observar que $\mathbb{V} = \text{Nu}(\phi) \oplus \text{gen}\{v_0\}$.

(b) Explicar por qué la aplicación $\psi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\psi(v) := \langle v_0, v \rangle$$

no es una funcional lineal de \mathbb{V} .

\curvearrowright : repasar la definición de producto interno.

3.2 \odot En cada uno de los siguientes casos, verificar que la fórmula

$$\langle x, y \rangle := y^T G x$$

define un producto interno en \mathbb{R}^2 :

(a) $G \in \mathcal{G}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(b) $G \in \mathcal{G}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \cos \theta \\ \cos \theta & 1 \end{bmatrix} : \theta \in (0, \pi) \right\}$.

(c) $G \in \mathcal{G}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} \ell_1^2 & \ell_1 \ell_2 \cos \theta \\ \ell_1 \ell_2 \cos \theta & \ell_2^2 \end{bmatrix} : \theta \in (0, \pi), \ell_1 > 0, \ell_2 > 0 \right\}$.

(d) $G \in \mathcal{G}_4 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} : a > 0, \det \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} > 0 \right\}$.

\curvearrowright : observar que $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_3 = \mathcal{G}_4$ y decidir en qué orden se resolverá el problema. ¿Se podrán definir otros productos internos en \mathbb{R}^2 ? ¿Qué significado geométrico tienen los coeficientes de las matrices G ? ¿Qué efectos tiene la elección de cada uno de esos productos internos sobre los lados y el área del triángulo de vértices $0, e_1, e_2$? ¿Qué significado geométrico tiene el determinante de G ?

3.3 \diamond Hallar todos los productos internos en \mathbb{R}^2 que convierten al triángulo de vértices $0, e_1$ y e_2 en un triángulo equilátero. Utilizar alguno de ellos para calcular el ángulo entre los vectores $v_1 = [1 \ 1]^T$ y $v_2 = [-1 \ 1]^T$. ¿Cuál es el valor del área del triángulo de vértices $0, v_1$ y v_2 ? ¿Cómo depende del producto interno elegido?

3.4  Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{R} -espacio euclídeo de dimensión 3 y sea

$$\mathcal{B} = \{u_i : i \in \mathbb{I}_3\} \subset \{u \in \mathbb{V} : \|u\| = 1\}$$

una base de \mathbb{V} tal que $\|u_i + u_j\|^2 = 2 + \sqrt{3}$ y $\|u_i - u_j\|^2 = 2 - \sqrt{3}$ para $i \neq j$.

(a) Hallar la matriz del producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ respecto de la base \mathcal{B} .

(b) Hallar la matriz $\Theta := [\arccos(\langle u_i, u_j \rangle)]_{\substack{i \in \mathbb{I}_3 \\ j \in \mathbb{I}_3}}$.

(c) Construir un triángulo rectángulo cuyos vértices sean $0, u_1, u_2 - \lambda u_1$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. ¿Es único?

(d) Calcular el área del triángulo de vértices $0, u_1, u_2$.

(e) Calcular el área del triángulo de vértices u_1, u_2 y u_3 .

3.5  Sea \mathbb{V} un \mathbb{R} -espacio vectorial y sea $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ un producto interno en \mathbb{V} . Sean v_1 y v_2 dos vectores linealmente independientes. Demostrar que la suma de los ángulos internos del triángulo de vértices $0, v_1, v_2$ es π .

 Razón por la cual se dice que $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio euclídeo real.

3.6 [ver **Ejercicio 2.19**] En \mathbb{R}^3 con el producto interno canónico se considera el subespacio

$$\mathbb{S} = \text{gen} \left\{ [1 \ 0 \ -1]^T, [0 \ 1 \ -1]^T \right\}.$$

(a) Escribir cada vector $x \in \mathbb{R}^3$ en la forma $x = x_{\mathbb{S}} + x_{\mathbb{S}^\perp}$ con $x_{\mathbb{S}} \in \mathbb{S}$ y $x_{\mathbb{S}^\perp} \in \mathbb{S}^\perp$ y comprobar que $\mathbb{R}^3 = \mathbb{S} \oplus \mathbb{S}^\perp$.

(b) Hallar la matriz con respecto a la base canónica de la proyección ortogonal de \mathbb{R}^3 sobre \mathbb{S} .

(c) Calcular la distancia al subespacio \mathbb{S} de cada uno de los elementos de la base canónica de \mathbb{R}^3 .

(d) Hallar todos los $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $P_{\mathbb{S}}(x) = [1 \ 1 \ -2]^T$ cuya distancia a \mathbb{S} sea igual a $\sqrt{3}$.

(e) Hallar el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^3$ que sean equidistantes a los puntos $[0 \ 0 \ 0]^T$ y $[6 \ 6 \ 6]^T$.

3.7  En \mathbb{R}^3 con el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido por

$$\langle x, y \rangle = y^T \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} x$$

se consideran los subespacios

$$\mathbb{S}_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \text{ y } \mathbb{S}_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_3 = 0\}.$$

(a) Hallar las matrices con respecto a la base canónica de las proyecciones ortogonales de \mathbb{R}^3 sobre \mathbb{S}_1^\perp y sobre \mathbb{S}_2^\perp .

(b) Sea $b = [1 \ 1 \ 2]^T$. Hallar la distancia de b al subespacio \mathbb{S}_1^\perp y la distancia de b al subespacio \mathbb{S}_2 .

(c) Hallar el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^3$ cuya distancia a \mathbb{S}_1 coincide con su distancia a \mathbb{S}_2 .

3.8  Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{R} -espacio euclídeo de dimensión 3 y sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de \mathbb{V} cuya matriz de Gram es

$$G_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

(a) Hallar la matriz con respecto a la base \mathcal{B} de la proyección ortogonal sobre el subespacio $\mathbb{S} = \text{gen}\{v_1, v_2\}$.

(b) Hallar la proyección ortogonal de v_3 sobre el subespacio \mathbb{S} .

(c) Calcular la distancia de v_3 al subespacio \mathbb{S} .

(d) Hallar el conjunto de todos los $v \in \mathbb{V}$ cuya distancia a v_1 coincide con su distancia a v_2 .

3.9 Se considera el espacio euclídeo $(\mathbb{R}_2[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con el producto interno definido por

$$\langle p, q \rangle := \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

Calcular

$$\min_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx.$$

3.10  Se considera el espacio euclídeo $(C([-1, 1]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con el producto interno definido por

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

(a) Hallar la proyección ortogonal de $y = \cos(\pi x)$ sobre $\mathbb{R}_2[x]$.

(b) Calcular

$$\min_{p \in \mathbb{R}_2[x]} \int_{-1}^1 (\cos(\pi x) - p(x))^2 dx.$$

(c) Calcular la distancia de $y = x^2$ al complemento ortogonal del subespacio $\text{gen}\{\cos(\pi x)\}$.

3.11  [ver **Ejercicio 2.23**] En \mathbb{R}^2 con el producto interno canónico. Sean $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ las transformaciones lineales definidas por

$$\Pi_1(x) := \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x, \quad \Pi_2(x) := \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x.$$

(a) Comprobar que Π_1 y Π_2 son dos proyecciones, identificando en cada caso el subespacio sobre el que proyectan y la dirección en la que lo hacen.

(b) ¿Es Π_1 una proyección ortogonal?

(c) ¿Es Π_2 una proyección ortogonal?

(d) ¿Existe $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|\Pi_1(x)\| > \|x\|$? Si la respuesta es afirmativa, exhibir al menos uno.

(e) ¿Existe $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|\Pi_2(x)\| > \|x\|$? Si la respuesta es afirmativa, exhibir al menos uno.

3.12  [ver **Ejercicio 1.21**] Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$ la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 10 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Hallar las matrices con respecto a la base canónica de las proyecciones ortogonales de \mathbb{R}^4 sobre $\text{col}(A)$ y sobre $\text{nul}(A^T)$.

(b) Hallar el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^4$ cuya distancia al $\text{col}(A)$ es igual 1.

3.13 [herramienta] Sean $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y $(\mathbb{R}^m, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ los \mathbb{R} -espacios euclídeos canónicos de dimensiones n y m , respectivamente, sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Por definición, resolver la ecuación $Ax = b$ por mínimos cuadrados significa determinar el conjunto $\arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|b - Ax\|$ de todos los $x \in \mathbb{R}^n$ cuyas imágenes por A minimizan la distancia al vector b .

(a) Explicar por qué

$$\arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|b - Ax\| = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = P_{\text{col}(A)}(b)\}.$$

(b) Observar que $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = P_{\text{col}(A)}(b)\} \neq \emptyset$. Motivo por el cual para cualquier $b \in \mathbb{R}^m$ existe al menos una solución por mínimos cuadrados de la ecuación $Ax = b$.

(c) Verificar que $\text{nul}(A^T) = \text{col}(A)^\perp$.

(d) Utilizando que $b - P_{\text{col}(A)}(b) \perp \text{col}(A)$, concluir que

$$\arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|b - Ax\| = \{x \in \mathbb{R}^n : A^T Ax = A^T b\}.$$

(e) Verificar que $\text{nul}(A) = \text{fil}(A)^\perp$.

(f) Utilizando que todo $x \in \mathbb{R}^n$ se descompone de manera única en la forma

$$x = x_f + x_h, \text{ con } x_f \in \text{fil}(A), \text{ y } x_h \in \text{nul}(A),$$

deducir que la aplicación $x_f \mapsto Ax_f$ es una biyección de $\text{fil}(A)$ en $\text{col}(A)$.

(g) Concluir que para cada $b \in \mathbb{R}^m$ existe un único $x_f(b) \in \text{fil}(A)$ tal que

$$\arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|b - Ax\| = \{x_f(b) + x_h : x_h \in \text{nul}(A)\}.$$

Utilizando el Teorema de Pitágoras observar que de todas las soluciones por mínimos cuadrados de la ecuación $Ax = b$, la solución $x_f(b)$ es la que tiene norma mínima.

(h) Observar que cuando $\dim(\text{col}(A)) = n$ la matriz $A^T A$ es inversible y que por lo tanto, $\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$ es la única solución por mínimos cuadrados de la ecuación $Ax = b$. Como $A\hat{x} = P_{\text{col}(A)}(b)$ se deduce que $A(A^T A)^{-1} A^T$ es la matriz en base canónica de la proyección ortogonal sobre $\text{col}(A)$.

3.14 ☉ Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

En cada uno de los siguientes casos, hallar las soluciones por mínimos cuadrados de la ecuación $Ax = b$, determinar la de norma mínima, y calcular el error cuadrático $\min_{x \in \mathbb{R}^3} \|b - Ax\|^2$

(a) $b = [2 \quad -1 \quad 2]^T$.

(b) $b = [3 \quad -1 \quad 2]^T$.

3.15 Sean $A \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ y $b \in \mathbb{R}^4$ definidos por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Hallar la solución por mínimos cuadrados de la ecuación $Ax = b$ y calcular el error cuadrático $\|b - A\hat{x}\|^2$.

3.16  Usando la técnica de mínimos cuadrados, ajustar los siguientes datos

| | | | | | |
|-----|-----|----|----|---|----|
| x | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | -14 | -5 | -4 | 1 | 22 |

mediante una recta $y = a_0 + a_1x$, mediante una cuadrática $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$, y mediante una cúbica $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. ¿Cuál de esas tres curvas se ajusta mejor a los datos?

3.17 Después de estudiar el comportamiento de un cierto tipo de enfermedad virósica, un investigador plantea la hipótesis de que, a corto plazo, la cantidad, x , de individuos infectados en una población particular crece exponencialmente con el tiempo, t , medido en días. Es decir, postula un modelo de la forma $x = ae^{bt}$. Estimar, mediante la técnica de mínimos cuadrados, los parámetros a y b , utilizando para ello los siguientes datos observados por el investigador:

| | | | | | |
|-----|----|----|----|----|-----|
| t | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| x | 16 | 27 | 45 | 74 | 122 |

Utilizar la estimación obtenida para predecir la cantidad de individuos infectados al cabo de una semana.

: ¿Qué transformación convierte una función exponencial en una función lineal?

3.18 [ver **Ejercicio 1.26**] Se considera el \mathbb{R} -espacio euclídeo $(\mathbb{R}_2[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con el producto interno definido por

$$\langle p, q \rangle := p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

Comprobar que

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{2}(x-1)(x-2), -x(x-2), \frac{1}{2}x(x-1) \right\}$$

es una base ortonormal de $(\mathbb{R}_2[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$, y utilizar ese resultado para hallar el vector de coordenadas del polinomio $p = 1 + x + x^2$ en base \mathcal{B} .

3.19 Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{R} -espacio euclídeo de dimensión n y sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ una base ortonormal de \mathbb{V} .

(a) Comprobar que para toda pareja de vectores $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ vale que

$$d(v_1, v_2) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (\langle v_2, u_j \rangle - \langle v_1, u_j \rangle)^2}.$$

(b) Deducir que para cada $v_0 \in \mathbb{V}$ y cada $r > 0$, el conjunto

$$\{v \in \mathbb{V} : d(v_0, v) = r\} = \left\{ \sum_{j=1}^n x_j u_j : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^n (x_j - a_j)^2 = r^2 \right\},$$

donde $[a_1 \ \dots \ a_n]^T$ es el vector de coordenadas de v_0 respecto de la base \mathcal{B} , es decir, $a_j = \langle v_0, u_j \rangle$ para todo $j \in \mathbb{I}_n$.

: recordar el Teorema de Pitágoras.

3.20 Se considera \mathbb{R}^2 con el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido por

$$\langle x, y \rangle = y^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x.$$

(a) Describir el significado geométrico del conjunto

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 : 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = 4\}.$$

(b) Hallar dos vectores $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{y_1 v_1 + y_2 v_2 : y_1, y_2 \in \mathbb{R}, y_1^2 + y_2^2 = 4\} \\ &= \{2 \cos(\theta) v_1 + 2 \operatorname{sen}(\theta) v_2 : \theta \in [0, 2\pi)\}, \end{aligned}$$

y representar gráficamente el resultado obtenido.

3.21  Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$ la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Comprobar que $b = [3 \ 4 \ 6 \ 7]^T \in \operatorname{col}(A)$.

(b) Mostrar que existen $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ y $v_1, v_2 \in \operatorname{col}(A)$ tales que

$$\{y \in \operatorname{col}(A) : d(b, y) = 1\} = \{(a_1 + \cos(\theta))v_1 + (a_2 + \operatorname{sen}(\theta))v_2 : \theta \in [0, 2\pi)\}.$$

¿Son únicos? Si la respuesta es afirmativa, determinarlos. Si la respuesta es negativa, exhibir dos ejemplos.

3.22 Se considera el \mathbb{R} -espacio euclídeo $(C([-\pi, \pi]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt.$$

(a) Verificar que el conjunto

$$\mathcal{U} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(3t)}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\operatorname{sen}(2t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\operatorname{sen}(3t)}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

es un sistema ortonormal en $(C([-π, π]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

(b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea \mathbb{S}_n el subespacio generado por

$$\left\{ \frac{\text{sen}(t)}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\text{sen}(nt)}{\sqrt{\pi}} \right\}.$$

Dada la función $f \in C([-π, π])$ definida por $f(t) = t$, hallar la función $\hat{f}_n \in \mathbb{S}_n$ más cercana a f y determinar su distancia a f : $d_n = \|f - \hat{f}_n\|$.

(c)  Graficar las funciones $f, \hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_6$ sobre el intervalo $[-π, π]$.

(d)  Examinar el comportamiento del desarrollo decimal de la sucesión d_n .

 ¿será verdad que $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n = f$?

3.23 Sea $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ el espacio euclídeo canónico. En cada uno de los siguientes casos, utilizar el algoritmo de Gram-Schmidt para producir un sistema ortonormal \mathcal{U}_i a partir del conjunto linealmente independiente \mathcal{L}_i dado.

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}, \mathcal{L}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}, \mathcal{L}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix} \right\}.$$

3.24  Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$ la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 10 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Hallar una base ortogonal de \mathbb{R}^4 que contenga una base de $\text{col}(A)$.

(b) Hallar la proyección ortogonal de \mathbb{R}^4 sobre $\text{col}(A)$.

(c) Calcular la distancia del vector $[1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ a $\text{col}(A)$.

3.25 Se consideran el \mathbb{R} -espacio euclídeo $(C([-1, 1], \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con el producto interno definido por

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx,$$

y el subespacio $\mathbb{R}_2[x]$.

(a) Utilizar el algoritmo de Gram-Schmidt para producir una base ortonormal $\{p_0, p_1, p_2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ a partir de la base $\{q_0, q_1, q_2\}$, donde

$$q_0 = 1, \quad q_1 = x, \quad q_2 = x^2.$$

(b) Hallar las siguientes proyecciones ortogonales: $P_{\mathbb{R}_2[x]}(\text{sen}(\pi x)), P_{\mathbb{R}_2[x]}(\text{cos}(\pi x))$.

(c) Calcular las distancias $d(\sin(\pi x), \mathbb{R}_2[x])$, $d(\cos(\pi x), \mathbb{R}_2[x])$.

☞: Los polinomios p_0, p_1, p_2 así obtenidos son los primeros tres polinomios de Legendre normalizados. Se puede comprobar que para cada $n = 0, 1, 2, \dots$, el polinomio p_n es solución de la ecuación diferencial de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0.$$

3.26 Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz de rango n .

(a) Comprobar que existen matrices $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tales que

1. las columnas de Q son una base ortonormal de $\text{col}(A)$,
2. la matriz R es triangular superior y los elementos de su diagonal son positivos,
3. $A = QR$.

☞: Las columnas de Q se obtienen aplicando el algoritmo de Gram-Schmidt a las columnas de A .

(b) Comprobar que la factorización $A = QR$ del inciso anterior es única.

3.27 ☹ Hallar la descomposición QR de las siguientes matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \\ 4 & 7 & 11 \end{bmatrix}.$$

3.28 ☹ En \mathbb{R}^3 con el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido por

$$\langle x, y \rangle = y^T \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} x$$

se considera la funcional lineal $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\phi([x_1 \ x_2 \ x_3]^T) := ax_1 + bx_2 + cx_3$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Hallar $x_\phi \in \mathbb{R}^3$ tal que $\phi(x) = \langle x, x_\phi \rangle$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$.

3.29 Sea $\mathbb{R}_2[x]$ con el producto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx.$$

(a) Hallar $q \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que $p(0) = \langle p, q \rangle$ para todo $p \in \mathbb{R}_2[x]$.

(b) Hallar $q \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que $p'(0) = \langle p, q \rangle$ para todo $p \in \mathbb{R}_2[x]$.

(c) Hallar $q \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que $\int_{-1}^1 p(x) \cos(\pi x) dx = \langle p, q \rangle$ para todo $p \in \mathbb{R}_2[x]$.

3.30  En $\mathbb{R}_n[x]$ con el producto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$$

se considera $\delta : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}$ la funcional lineal definida por $\delta(p) := p(0)$. Para cada $n \in \mathbb{I}_{10}$ hallar y graficar el polinomio $q_n \in \mathbb{R}_n[x]$ tal que $\delta(\cdot) = \langle \cdot, q_n \rangle$.