Notas sobre Wronskiano

José Luis Mancilla Aguilar

El objeto de esta nota es presentar una condición suficiente para la independencia lineal de conjuntos de funciones, simple de verificar.

Dado un intervalo I de $\mathbb{R}$, recordamos que $\mathcal{C}(I)$ denota al espacio vectorial compuesto por todas las funciones $f : I \to \mathbb{R}$ que son continuas en I y que $\mathcal{C}^k(I)$, con $k \in \mathbb{N}$, denota al subespacio de $\mathcal{C}(I)$ formado por las funciones $f : I \to \mathbb{R}$ que son k-veces derivables con continuidad en I (cuando el intervalo I contiene a alguno de sus extremos, se consideran en ese punto las derivadas laterales que correspondan). Recordemos que el conjunto de funciones continuas $\{f_1, \ldots, f_n\}$, con $f_i \in \mathcal{C}(I)$, $i = 1, \ldots, n$, es linealmente independiente si la única combinación lineal de las f_i que verifica la condición

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n = 0 \tag{1}$$

es la trivial, es decir, $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Observamos que (1) es equivalente a la condición

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0 \quad \forall x \in I.$$

Dado un conjunto de funciones $\{f_1, \ldots, f_n\}$, con $f_i \in \mathcal{C}^{(n-1)}(I)$ para $i = 1, \ldots, n$ (observe que la cantidad de derivadas continuas que se supone tiene cada f_i es una menos que la cantidad de funciones que tiene el conjunto considerado), se define el wronskiano de $\{f_1, \ldots, f_n\}$ mediante

$$W(f_1, \ldots, f_n)(x) = \det\left(\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}\right), \qquad x \in I. \tag{2}$$

Por ejemplo, si consideramos las funciones $f_1(x) = x$, $f_2(x) = e^x$ y $f_3(x) = e^{-x}$, tenemos que

$$W(f_1, f_2, f_3)(x) = \det\left(\begin{bmatrix} x & e^x & e^{-x} \\ 1 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^{-x} \end{bmatrix}\right) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

El siguiente resultado da una condición suficiente para la independencia lineal de un conjunto de funciones en términos del wronskiano de ellas.

Teorema. Supongamos que $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ es un conjunto de funciones pertenecientes a $\mathcal{C}^{n-1}(I)$ tal que para algún $x_0 \in I$, $W(f_1, \ldots, f_n)(x_0) \neq 0$.

Entonces $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ es linealmente independiente.

Demostración. Supongamos que para ciertos números reales $c_1, \ldots, c_n$,

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0 \quad \forall x \in I.$$

Derivando sucesivamente ambos miembros de la igualdad resulta que para todo $x \in I$:

$$\begin{array}{rcl} c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) + \cdots + c_n f_n'(x) & = & 0 \\ c_1 f_1''(x) + c_2 f_2''(x) + \cdots + c_n f_n''(x) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 f_1^{(n-1)}(x) + c_2 f_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n f_n^{(n-1)}(x) & = & 0 \end{array}.$$

Lo anterior puede expresarse matricialmente:

$$\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \forall x \in I.$$

Entonces, en particular, tomando $x = x_0$ obtenemos la igualdad

$$\begin{bmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) & \cdots & f_n(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) & \cdots & f_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x_0) & f_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como el determinante de la matriz cuadrada que aparece en el lado izquierdo de la igualdad es el wronskiano de $f_1, \ldots, f_n$ evaluado en x_0, y suponemos que éste no es nulo, tenemos que tal matriz es inversible y que por lo tanto $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Luego $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ es l.i., que es lo que queríamos probar.

Del Teorema recién demostrado se deduce el siguiente

Corolario. Si $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, con $f_i \in \mathcal{C}^{(n-1)}(I)$ para $i = 1, \ldots, n$, es un conjunto linealmente dependiente entonces necesariamente

$$W(f_1, \ldots, f_n)(x) = 0 \quad \forall x \in I.$$

En resumen, si el wronskiano de un conjunto de funciones cuyo dominio es el intervalo I es distinto de cero en algún punto $x_0 \in I$, el conjunto es l.i.; si el conjunto es l.d. entonces el wronskiano se anula en todo punto $x \in I$.

Ejemplos.

1. Las funciones $f_1(x) = x$, $f_2(x) = e^x$ y $f_3(x) = e^{-x}$ son l.i. en cualquier intervalo I de la recta que contenga más de un punto. En efecto, $W(f_1, f_2, f_3)(x) = 2x$, que es diferente de cero en cualquier punto de I distinto de cero.

2. Las funciones $f_1(x) = e^x$ y $f_2(x) = e^{x+1}$ son linealmente dependientes en cualquier intervalo I, pues
$$-ef_1(x) + f_2(x) = 0 \qquad \forall x \in I.$$
Por otra parte,
$$W(f_1, f_2)(x) = e^x e^{x+1} - e^x e^{x+1} = 0 \quad \forall x \in I,$$
como indica el corolario del teorema.

La pregunta natural que uno puede formularse es si la condición

$$W(f_1, \dots, f_n)(x) = 0 \qquad \forall x \in I,$$

implica que $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ sea necesariamente linealmente dependiente. La respuesta en este caso es negativa, es decir, existen conjuntos de funciones $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ que son linealmente independientes y que, sin embargo, su wronskiano es nulo en I.

Ejemplo. Consideremos $I = [-1, 1]$, $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x|x|$. Un simple cálculo muestra que $f_2'(x) = -2x$ si $x < 0$, $f_2'(0) = 0$ y que $f_2'(x) = 2x$ si $x > 0$. Por lo tanto f_2' es continua en I. Teniendo en cuenta esto último calculamos $W(f_1, f_2)(x)$ y comprobamos que $W(f_1, f_2)(x) = 0$ para todo $x \in I$.

Por otra parte $\{f_1, f_2\}$ es l.i. en I. Para probarlo, supongamos que

$$c_1 x^2 + c_2 x|x| = 0 \qquad \forall x \in I.$$

Entonces, en particular, tomando $x = 1$, obtenemos

$$c_1 1^2 + c_2 1|1| = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2,$$

y tomando $x = -1$ resulta

$$c_1(-1)^2 + c_2(-1)|-1| = 0 \Rightarrow c_1 = c_2.$$

Pero entonces $c_1 = c_2 = 0$ y $\{f_1, f_2\}$ es l.i.

Puede probarse que la condición de anulación del wronskiano implica la dependencia lineal del conjunto de funciones si se cumplen hipótesis adicionales. Un ejemplo de esto es el siguiente resultado:

Proposición. Supongamos que $\{f, g\}$ es un conjunto de funciones derivables con continuidad en I y que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Entonces, si $W(f, g)(x) = 0$ para todo $x \in I$, $\{f, g\}$ es linealmente dependiente.

Demostración. Consideremos la función $h = \frac{g}{f}$, la cual es derivable con continuidad en todo punto de I porque f nunca se anula. Dado que

$$h' = \left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2} = \frac{W(f, g)}{f^2} = 0,$$

tenemos que h es constante en I y, por lo tanto, g es un múltiplo de f, lo cual implica que $\{f, g\}$ es l.d.