
Álgebra II (Curso 23)
Segundo cuatrimestre, 2020
NOTAS EN LA EMERGENCIA SANITARIA:
BORRADORES PARA LA SEMANA 9
Sebastian GRYNBERG

ÍNDICE

1. Algunos comentarios sobre bases ortonormales	2
2. Algoritmo de Gram-Schmidt	2
3. Teorema de representación de Riesz	7
4. Producto vectorial	10
4.1. Determinantes	10
4.2. Orientación de una base ortonormal con respecto a otra	11
4.3. El producto vectorial	12
4.4. Algunas propiedades del producto vectorial	12
4.5. El producto vectorial y los hiperplanos	13
4.6. Fórmula de Lagrange y área del paralelogramo	14

1. ALGUNOS COMENTARIOS SOBRE BASES ORTONORMALES

Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio euclídeo de dimensión n y sea $\mathcal{U} = \{u_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ una base ortonormal de \mathbb{V} .

Es conveniente observar que si $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ e $y = \sum_{j=1}^n y_j u_j$, entonces

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i u_i, \sum_{j=1}^n y_j u_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n \overline{y_j} \langle u_i, u_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}.$$

Formalizamos la observación en la forma del siguiente Lema

Lema 1.1. *Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio euclídeo de dimensión n y sea $\mathcal{U} = \{u_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ una base ortonormal de \mathbb{V} . Para cada $x, y \in \mathbb{V}$ vale que*

$$\langle x, y \rangle = \langle [x]^{\mathcal{U}}, [y]^{\mathcal{U}} \rangle_{\mathbb{K}^n} = ([y]^{\mathcal{U}})^* [x]^{\mathcal{U}},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{K}^n}$ es el producto interno canónico de \mathbb{K}^n .

Nota Bene. El lema anterior nos permite observar que cuando $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_n\}$ y $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ son dos bases ortonormales de \mathbb{V} , la matriz de cambio de coordenadas de la base \mathcal{B} en la base \mathcal{U} , $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}}$, satisface que

$$(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}})^{-1} = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}})^*.$$

Esto es así porque

$$((M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}})^* M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}})_{ij} = ([v_i]^{\mathcal{U}})^* [v_j]^{\mathcal{U}} = \langle v_j, v_i \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

2. ALGORITMO DE GRAM-SCHMIDT

Teorema 2.1 (Ortogonalización de Gram-Schmidt). *Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio euclídeo de dimensión n y sea $\mathcal{B} = \{v_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ una base de \mathbb{V} . Entonces, el conjunto $\mathcal{G} = \{w_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ definido por*

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 \\ w_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 \\ w_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 \\ &\vdots \\ w_n &= v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle v_n, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i, \end{aligned}$$

es una base ortogonal de \mathbb{V} . Además, la base $\mathcal{U} = \{u_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ definida por

$$u_j = \frac{1}{\|w_j\|} w_j,$$

es una base ortonormal de \mathbb{V} .

Ilustraciones y comentarios.

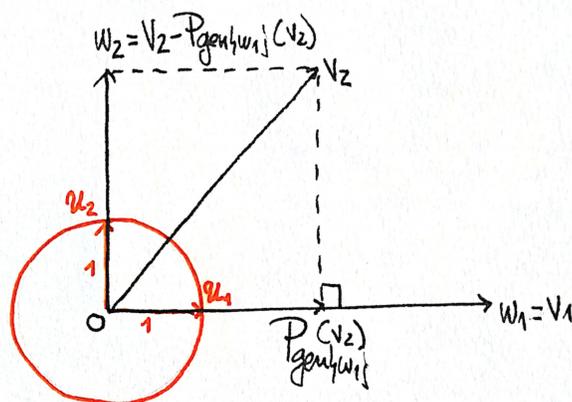


FIGURA 1. Primeros pasos del algoritmo de Gram-Schmidt: $w_1 := v_1$ y $w_2 := v_2 - P_{\text{gen}\{w_1\}}(v_2) = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1$. En naranja, los vectores ortonormales u_1 y u_2 que resultan del algoritmo aplicado a v_1 y v_2 .

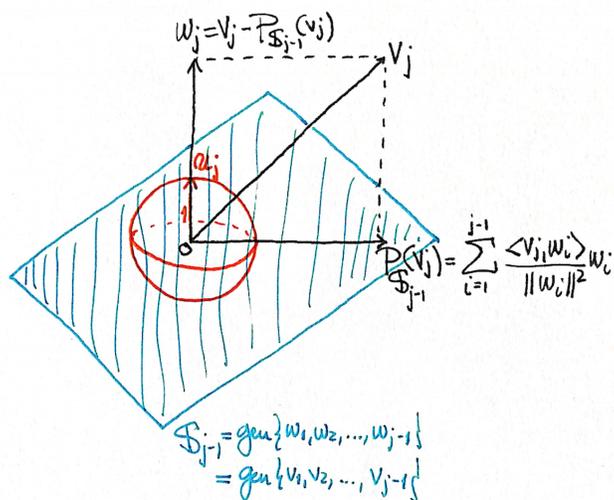


FIGURA 2. Paso j del algoritmo de Gram-Schmidt: primero se proyecta el vector v_j sobre el subespacio $\mathbb{S}_{j-1} = \text{gen}\{w_1, \dots, w_{j-1}\}$ y luego se le suprime dicha componente $w_j := v_j - P_{\mathbb{S}_{j-1}}(v_j) = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle v_j, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i$. En naranja, el vector $u_j = \frac{w_j}{\|w_j\|}$.

Demostración. Por construcción, tenemos que

$$v_1 = w_1$$

y para cada $j \in \{2, \dots, n\}$

$$v_j = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle v_j, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i + w_j$$

Esto significa que cada v_j es una combinación de los elementos de \mathcal{G} , motivo por el cual el conjunto \mathcal{G} genera \mathbb{V} y como su cardinal es la $\dim(\mathbb{V})$, tenemos que \mathcal{G} es una base de \mathbb{V} . De aquí se concluye que \mathcal{U} también es una base de \mathbb{V} . No hay problema con los denominadores $\|w_j\|$ porque los vectores w_1, w_2, \dots, w_n son linealmente independientes, y en consecuencia ninguno puede ser el 0.

Para demostrar que \mathcal{G} es un sistema ortogonal utilizaremos el principio de inducción aplicado a los conjuntos $\{w_j, j \in \mathbb{I}_m\}$. Para $m = 1$ no hay nada que demostrar. Supongamos ahora que el conjunto $\{w_j, j \in \mathbb{I}_{m-1}\}$, con $m > 1$, es ortogonal y comprobemos que el conjunto $\{w_j, j \in \mathbb{I}_m\}$ también es ortogonal.

Para $k < m$

$$\begin{aligned} \langle w_m, w_k \rangle &= \langle v_m, w_k \rangle - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\langle v_m, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \langle w_i, w_k \rangle \\ &= \langle v_m, w_k \rangle - \frac{\langle v_m, w_k \rangle}{\|w_k\|^2} \langle w_k, w_k \rangle = \langle v_m, w_k \rangle - \langle v_m, w_k \rangle = 0. \end{aligned}$$

Esto demuestra que $\{w_j : j \in \mathbb{I}_m\}$ es un conjunto ortogonal. Por lo tanto, \mathcal{G} es una base ortogonal. Inmediatamente se deduce que \mathcal{U} es una base ortonormal. \square

Ejemplo 2.2. En el espacio euclídeo $C([-1, 1], \mathbb{R})$ con el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx,$$

consideramos $v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2$, que constituyen un conjunto linealmente independiente, y le aplicamos el algoritmo de Gram-Schmidt para obtener un sistema ortonormal.

$j = 1:$

$$w_1 = v_1 = 1, \quad \|w_1\|^2 = \int_{-1}^1 1^2 dx = 2, \quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$j = 2:$

$$\begin{aligned} w_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\|1\|^2} 1 = x - \frac{\int_{-1}^1 x \cdot 1 dx}{2} 1 = x \\ \|w_2\|^2 &= \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}, \quad u_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} x \end{aligned}$$

$j = 3$:

$$\begin{aligned} w_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 = x^2 - \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\|1\|^2} 1 - \frac{\langle x^2, x \rangle}{\|x\|^2} x \\ &= x^2 - \frac{\int_{-1}^1 x^2 dx}{2} 1 - \frac{\int_{-1}^1 x^3 dx}{\frac{2}{3}} x = x^2 - \frac{1}{3} \\ \|w_3\|^2 &= \int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \frac{8}{45}, \quad u_3 = \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad u_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad u_3 = \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

es el sistema ortonormal requerido. \square

Nota Bene 1. Obsérvese que la matriz de cambio de coordenadas de la base \mathcal{B} respecto de la base \mathcal{G} obtenida mediante el algoritmo de Gram-Schmidt aplicado a la base \mathcal{B}

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{G}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} & \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} & \cdots & \frac{\langle v_n, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} \\ 0 & 1 & \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} & \cdots & \frac{\langle v_n, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{\langle v_n, w_3 \rangle}{\|w_3\|^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Esta estructura triangular superior (con unos en la diagonal) de la matriz de cambio de coordenadas de la base \mathcal{B} en la base \mathcal{G} significa que para cada $m \in \mathbb{I}_n$ vale que

$$\text{gen}\{v_j : j \in \mathbb{I}_m\} = \text{gen}\{w_j : j \in \mathbb{I}_m\}.$$

Esto es así, porque la matriz inversa tiene la misma estructura.

Nota Bene 2. El resultado anterior también muestra que si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es una matriz de rango n , existen una matriz $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y una matriz $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tales que

1. Las columnas de Q son una base ortonormal de $\text{col}(A)$
2. La matriz R es triangular superior y los elementos de su diagonal son positivos.
3. $A = QR$

Las columnas de A , $\{A_{*1}, \dots, A_{*n}\}$ son una base del espacio $\text{col}(A)$. Aplicando el algoritmo de Gram-Schmidt, respecto del producto interno canónico, se obtiene primero una base ortogonal de $\text{col}(A)$, $\mathcal{G} = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, y luego una base ortonormal de $\text{col}(A)$, $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, tales que para todo $j \in \mathbb{I}_n$ vale que

$$\begin{aligned} A_{*j} &= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle A_{*j}, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i + w_j \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \langle A_{*j}, u_i \rangle u_i + \|w_j\| u_j. \end{aligned}$$

Esto significa que

$$A = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n] \begin{bmatrix} \|w_1\| & \langle A_{*2}, u_1 \rangle & \langle A_{*3}, u_1 \rangle & \cdots & \langle A_{*n}, u_1 \rangle \\ 0 & \|w_2\| & \langle A_{*3}, u_2 \rangle & \cdots & \langle A_{*n}, u_2 \rangle \\ 0 & 0 & \|w_3\| & \cdots & \langle A_{*n}, u_3 \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \|w_n\| \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 2.3. En \mathbb{R}^4 , con el producto interno canónico, consideramos el siguiente conjunto de tres vectores linealmente independientes

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

y le aplicamos el algoritmo de Gram-Schmidt para obtener un sistema ortonormal

$j = 1$:

$$w_1 = v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \|w_1\|^2 = 2, \quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$j = 2$:

$$\begin{aligned} w_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = v_2 - w_1 \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \|w_2\|^2 = 4, \quad u_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$j = 3$:

$$\begin{aligned} w_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 = v_3 - 2w_1 - \frac{1}{2}w_2 \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \|w_3\|^2 = 3, \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es el sistema ortonormal requerido.

Además tenemos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

□

3. TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE RIESZ

Teorema 3.1 (Teorema de representación de Riesz). *Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio euclídeo de dimensión n y sea $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{K})$. Entonces existe un único vector $v \in \mathbb{V}$ tal que $\phi(x) = \langle x, v \rangle$ para todo $x \in \mathbb{V}$.*

Demostración. El caso $\phi = 0$ es inmediato: $v = 0$.

Cuando $\phi \neq 0$, el teorema de la dimensión nos informa que $\dim(\text{Nu}(\phi)) + \dim(\text{Im}(\phi)) = n$ y como $\dim(\text{Im}(\phi)) = 1$, tenemos que $\dim(\text{Nu}(\phi)) = n - 1$.

Por otra parte, como \mathbb{V} es de dimensión finita vale que

$$\mathbb{V} = \text{Nu}(\phi) \oplus \text{Nu}(\phi)^\perp.$$

Ahora, como $\dim(\text{Nu}(\phi)^\perp) = 1$, podemos fijar un vector cualquiera $w \in \text{Nu}(\phi)^\perp \setminus \{0\}$ y descomponer cada vector $x \in \mathbb{V}$ de manera única en la forma

$$(1) \quad x = \frac{\langle x, w \rangle}{\|w\|^2} w + \left(x - \frac{\langle x, w \rangle}{\|w\|^2} w \right),$$

donde $\frac{\langle x, w \rangle}{\|w\|^2} w \in \text{Nu}(\phi)^\perp$ y $x - \frac{\langle x, w \rangle}{\|w\|^2} w \in \text{Nu}(\phi)$.

Aplicando ϕ en ambos lados de la descomposición (1) y utilizando que ϕ es una transformación lineal tenemos que

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi \left(\frac{\langle x, w \rangle}{\|w\|^2} w \right) + \phi \left(x - \frac{\langle x, w \rangle}{\|w\|^2} w \right) = \frac{\langle x, w \rangle}{\|w\|^2} \phi(w) = \frac{\langle x, \overline{\phi(w)} w \rangle}{\|w\|^2} \\ &= \langle x, \overline{\phi(w)} u \rangle, \end{aligned}$$

donde $u = \frac{w}{\|w\|}$ es un vector unitario perteneciente al complemento ortogonal del núcleo de ϕ . Poniendo $v = \overline{\phi(w)} u$ se obtiene que

$$\phi(x) = \langle x, v \rangle$$

para todo $x \in \mathbb{V}$.

La unicidad de v se deduce de la siguiente manera. Si \tilde{v} es un vector de \mathbb{V} tal que $\phi(x) = \langle x, \tilde{v} \rangle$ para todo $x \in \mathbb{V}$, tenemos que

$$0 = \langle x, v - \tilde{v} \rangle, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{V}$$

En particular, poniendo $x = v - \tilde{v}$ tenemos $0 = \langle v - \tilde{v}, v - \tilde{v} \rangle$ y esta igualdad equivale a esta otra: $v - \tilde{v} = 0$. En consecuencia, $\tilde{v} = v$. □

Nota Bene. Si $\mathcal{U} = \{u_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ es una base ortonormal de \mathbb{V} , cada vector $x \in \mathbb{V}$ se descompone de manera única en la forma

$$(2) \quad x = \sum_{j=1}^n \langle x, u_j \rangle u_j.$$

Aplicando ϕ en ambos lados de la descomposición (2) y utilizando que ϕ es una transformación lineal tenemos que

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi \left(\sum_{j=1}^n \langle x, u_j \rangle u_j \right) = \sum_{j=1}^n \langle x, u_j \rangle \phi(u_j) = \sum_{j=1}^n \langle x, \overline{\phi(u_j)} u_j \rangle \\ &= \left\langle x, \sum_{j=1}^n \overline{\phi(u_j)} u_j \right\rangle. \end{aligned}$$

De acuerdo con el resultado del **Teorema 3.1** esto significa que si $\mathcal{U} = \{u_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ es una base ortonormal de \mathbb{V} y $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{K})$, entonces el único vector $v \in \mathbb{V}$ tal que $\phi(x) = \langle x, v \rangle$ para todo $x \in \mathbb{V}$ es

$$(3) \quad v = \sum_{j=1}^n \overline{\phi(u_j)} u_j.$$

Ejemplo 3.2. En $(\mathbb{R}_2[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con el producto interno definido por

$$\langle p, q \rangle := \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx,$$

consideramos la funcional lineal $\delta : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\delta(p) = p(0).$$

Por el **Ejemplo 2.2** sabemos que el conjunto $\{p_1, p_2, p_3\}$ definido por

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad p_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad p_3 = \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right)$$

es una base ortonormal de $\mathbb{R}_2[x]$.

Como

$$\delta(p_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \delta(p_2) = 0, \quad \delta(p_3) = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{45}{8}},$$

tenemos que

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}}p_1 + 0p_2 - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{45}{8}}p_3 = \frac{1}{2} - \frac{15}{8} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) = \frac{9}{8} - \frac{15}{8}x^2$$

es el único polinomio en $\mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$\int_{-1}^1 p(x)q(x) dx = p(0).$$

□

Ejemplo 3.3. Hallar $q \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$\int_{-1}^1 p(x) \cos(\pi x) dx = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$$

para todo $p \in \mathbb{R}_2[x]$.

Observamos que la función $\phi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(p) = \int_{-1}^1 p(x) \cos(\pi x) dx$$

es una funcional lineal en $\mathbb{R}_2[x]$ y utilizamos la misma técnica del ejemplo anterior para encontrar que

$$q = \phi(p_1)p_1 + \phi(p_2)p_2 + \phi(p_3)p_3,$$

donde

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad p_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad p_3 = \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right).$$

Utilizando una tabla de integrales obtenemos que

$$q = -\frac{45}{2\pi^2} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right).$$

□

Nota Bene. Obsérvese que el resultado obtenido en el ejemplo anterior significa que si consideramos el espacio euclídeo $(C([-1, 1], \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

tenemos que

$$P_{\mathbb{R}_2[x]}(\cos(\pi x)) = -\frac{45}{2\pi^2} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right).$$

□

Comentario metodológico. En los últimos dos ejemplos aprovechamos que ya teníamos a disposición una base ortonormal $\mathcal{U} = \{u_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ del espacio euclídeo \mathbb{V} y calculamos el vector representante de la funcional lineal utilizando la fórmula (3) para obtener que el único vector $v \in \mathbb{V}$ tal que $\phi = \langle \cdot, v \rangle$ es $v = \sum_{j=1}^n \overline{\phi(u_j)} u_j$.

Si solo se dispone de una base cualquiera $\mathcal{B} = \{v_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ el cálculo del vector representante de ϕ se puede realizar de la siguiente manera: como $\phi(x) = \langle x, v \rangle$ para todo $x \in \mathbb{V}$, podemos escribir $v = \sum_{j=1}^n a_j v_j$ y resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales no homogéneo

$$\phi(v_i) = \langle v_i, v \rangle = \sum_{j=1}^n \overline{a_j} \langle v_i, v_j \rangle, \quad \forall j \in \mathbb{I}_n,$$

cuya representación matricial tiene la forma

$$(4) \quad \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_2, v_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \langle v_n, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_n, v_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_1 \\ \vdots \\ \bar{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(v_1) \\ \phi(v_2) \\ \vdots \\ \phi(v_n) \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 3.4. En $(\mathbb{R}_2[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con el producto interno definido por

$$\langle p, q \rangle := \int_0^1 p(x)q(x) dx,$$

consideramos la funcional lineal $\phi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(p) = p'(0).$$

Queremos hallar $q \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que $\phi(p) = \langle p, q \rangle$ para todo $p \in \mathbb{R}_2[x]$. Consideramos la base canónica $\{1, x, x^2\}$, escribimos $q = a_0 + a_1x + a_2x^2$ y planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\phi(x^i) = \langle x^i, q \rangle = a_0 \langle x^i, 1 \rangle + a_1 \langle x^i, x \rangle + a_2 \langle x^i, x^2 \rangle, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Como $\phi(1) = 0$, $\phi(x) = 1$, $\phi(x^2) = 0$ y $\int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos que el sistema anterior puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Usando una calculadora de matrices se puede ver que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix},$$

y en consecuencia $a_0 = -36$, $a_1 = 192$ y $a_2 = -180$. Por lo tanto, $q = -36 + 192x - 180x^2$. \square

4. PRODUCTO VECTORIAL

En todo lo que sigue $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ será \mathbb{R} -espacio euclídeo de dimensión $n \geq 3$ y $\mathcal{E} = \{e_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ será una base ortonormal fija.

4.1. Determinantes.

Definición 4.1. Sean $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{V}$. El determinante de v_1, v_2, \dots, v_n con respecto a la base \mathcal{E} se define por

$$(5) \quad \det(v_1, v_2, \dots, v_n) := \det \begin{bmatrix} [v_1]^\mathcal{E} & [v_2]^\mathcal{E} & \cdots & [v_n]^\mathcal{E} \end{bmatrix}.$$

4.2. Orientación de una base ortonormal con respecto a otra.

Sea $\mathcal{U} = \{u_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ es una base ortonormal de \mathbb{V} . En lo que sigue veremos cuánto vale el determinante de u_1, u_2, \dots, u_n con respecto a la base \mathcal{E} . Por definición tenemos que

$$\det(u_1, u_2, \dots, u_n) = \det \begin{bmatrix} [u_1]^\mathcal{E} & [u_2]^\mathcal{E} & \dots & [u_n]^\mathcal{E} \end{bmatrix} = \det(M_{\mathcal{U}}^\mathcal{E}),$$

donde $M_{\mathcal{U}}^\mathcal{E}$ es la matriz de cambio de coordenadas de la base \mathcal{U} en la base \mathcal{E} . Como las dos bases son ortonormales y \mathbb{V} es un \mathbb{R} -espacio vectorial, sabemos que $(M_{\mathcal{U}}^\mathcal{E})^{-1} = (M_{\mathcal{U}}^\mathcal{E})^T$ y de aquí se puede inferir que

$$1 = \det \left((M_{\mathcal{U}}^\mathcal{E})^T M_{\mathcal{U}}^\mathcal{E} \right) = \det \left((M_{\mathcal{U}}^\mathcal{E})^T \right) \det \left(M_{\mathcal{U}}^\mathcal{E} \right) = (\det \left(M_{\mathcal{U}}^\mathcal{E} \right))^2.$$

Tenemos así que

$$(6) \quad \det(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \{-1, 1\}.$$

Cuando $\det(u_1, u_2, \dots, u_n) = 1$ se dice que *la base \mathcal{U} es orientada positivamente con respecto a \mathcal{E}* . En el otro caso, se dice que *la base \mathcal{U} es orientada negativamente con respecto a \mathcal{E}* .

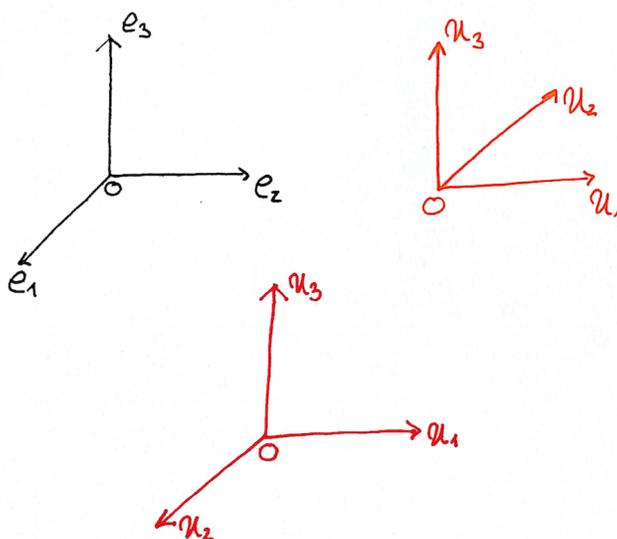


FIGURA 3. Las dos orientaciones con respecto a una base ortonormal $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ en un \mathbb{R} -espacio euclídeo de dimensión 3. En naranja una base ortonormal orientada positivamente; en rojo una base ortonormal orientada negativamente.

4.3. El producto vectorial.

Fijados $n - 1$ vectores $v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{V}$, se puede ver, más o menos inmediatamente, que la función $\phi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}$ definida por

$$\phi(x) := \det(v_1, \dots, v_{n-1}, x)$$

es una funcional lineal de \mathbb{V} . De acuerdo con el Teorema de Riesz, existe un único vector $v \in \mathbb{V}$ tal que $\phi(x) = \langle x, v \rangle$ para todo $x \in \mathbb{V}$. Este vector se denomina *el producto vectorial de v_1, v_2, \dots, v_{n-1}* y se lo designa mediante $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1}$.

4.4. Algunas propiedades del producto vectorial.

1. El producto vectorial $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1}$ de los vectores v_1, v_2, \dots, v_{n-1} está caracterizado por ser el único vector de \mathbb{V} tal que

$$\det(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, x) = \langle x, v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \rangle, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{V}.$$

2. Al examinar la demostración del Teorema de Riesz, que garantiza la existencia y unicidad de $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1}$, se puede advertir que

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \in \text{Nu}(\phi)^\perp.$$

Recordando las propiedades del determinante se puede ver que para todo $j \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ vale que

$$\phi(v_j) = \det \left(\begin{bmatrix} [v_1]^\mathcal{E} & [v_2]^\mathcal{E} & \dots & [v_{n-1}]^\mathcal{E} & [v_j]^\mathcal{E} \end{bmatrix} \right) = 0.$$

Esto es así porque las columnas j y n de la matriz

$$\begin{bmatrix} [v_1]^\mathcal{E} & [v_2]^\mathcal{E} & \dots & [v_{n-1}]^\mathcal{E} & [v_j]^\mathcal{E} \end{bmatrix}$$

son iguales. Esto significa que el conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ está contenido en el núcleo de ϕ y como $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \in \text{Nu}(\phi)^\perp$, se puede concluir que

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \perp v_j, \quad \text{para todo } j \in \{1, 2, \dots, n - 1\}.$$

3. Cuando los vectores v_1, v_2, \dots, v_{n-1} son linealmente dependientes la funcional lineal

$$\phi(x) = \det(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, x)$$

es nula porque la matriz $\begin{bmatrix} [v_1]^\mathcal{E} & [v_2]^\mathcal{E} & \dots & [v_{n-1}]^\mathcal{E} & [x]^\mathcal{E} \end{bmatrix}$ tiene columnas linealmente dependientes. Como consecuencia de la unicidad de la representación se obtiene que $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1} = 0$.

Recíprocamente, si el producto vectorial $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1} = 0$, la funcional lineal ϕ es nula.

Si elegimos un vector cualquiera $x_0 \notin \text{gen}\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$, el resultado $\phi(x_0) = 0$, significa que los vectores v_1, v_2, \dots, v_{n-1} son linealmente dependientes porque en caso contrario la matriz $\begin{bmatrix} [v_1]^\mathcal{E} & [v_2]^\mathcal{E} & \dots & [v_{n-1}]^\mathcal{E} & [x_0]^\mathcal{E} \end{bmatrix}$ tendría todas las columnas linealmente independientes y su determinante sería no nulo.

Se concluye así que v_1, v_2, \dots, v_{n-1} son linealmente dependientes si, y sólo si, $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1} = 0$.

4. Utilizando el desarrollo del vector $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}$ respecto de la base ortonormal \mathcal{E} :

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} = \sum_{i=1}^n \phi(e_i) e_i,$$

y observando que

$$\phi(e_i) = \det \left(\begin{bmatrix} [v_1]^\mathcal{E} & [v_2]^\mathcal{E} & \cdots & [v_{n-1}]^\mathcal{E} & [e_i]^\mathcal{E} \end{bmatrix} \right) = (-1)^{n+i} \Delta_i$$

donde Δ_i es el determinante de la matriz que se obtiene de eliminar la i -ésima fila de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n-1}$ definida por

$$A = \begin{bmatrix} [v_1]^\mathcal{E} & [v_2]^\mathcal{E} & \cdots & [v_{n-1}]^\mathcal{E} \end{bmatrix},$$

se puede concluir que

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} = \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} \Delta_i e_i.$$

5. Como para cada $x \in \mathbb{V}$ vale que

$$\begin{aligned} \det(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, x) &= \langle x, v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} \rangle \\ &= \|v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}\| \langle x, u \rangle \end{aligned}$$

donde $u = \frac{v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}}{\|v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}\|}$, se puede ver que

$$\det(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, u) = \|v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}\|.$$

De aquí se puede deducir que si $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ es un sistema ortonormal, entonces $\|v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}\| = 1$ y, en consecuencia, también se puede deducir que la base ortonormal $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}\}$ es orientada positivamente con respecto a \mathcal{E} .

4.5. El producto vectorial y los hiperplanos.

Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ un conjunto linealmente independiente y sea \mathbb{S} el subespacio generado por $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$. Como $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} \in \mathbb{S}^\perp \setminus \{0\}$ tenemos que para cada $v \in \mathbb{V}$

$$\mathbb{P}_{\mathbb{S}^\perp}(v) = \frac{\langle v, v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} \rangle}{\|v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}\|^2} (v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}),$$

y en consecuencia,

$$d(v, \mathbb{S}) = \|\mathbb{P}_{\mathbb{S}^\perp}(v)\| = \frac{|\langle v, v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} \rangle|}{\|v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}\|}.$$

De la relación $\mathbb{S}^\perp = \text{gen}\{v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}\}$ se deduce inmediatamente que

$$\mathbb{S} = \{v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}\}^\perp.$$

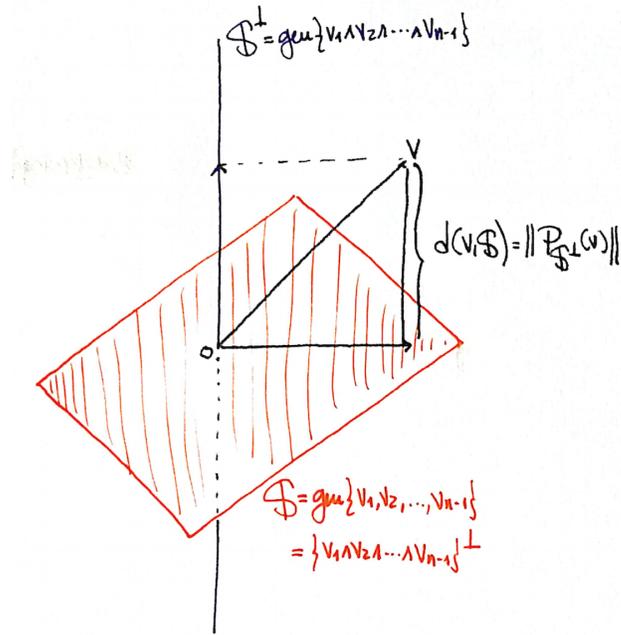


FIGURA 4. Distancia de un punto a un hiperplano.

4.6. Fórmula de Lagrange y área del paralelogramo.

En lo que sigue la dimensión del \mathbb{R} -espacio euclídeo $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ será $n = 3$. Escribiendo $v_1 = \sum_{i=1}^3 x_i e_i$ y $v_2 = \sum_{i=1}^3 y_i e_i$, desarrollando cuadrados y reagrupando términos, se puede ver que

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_2 \rangle^2 &= \left(\sum_{i=1}^3 x_i y_i \right)^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2 y_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 3} x_i y_i x_j y_j, \\ \|v_1 \wedge v_2\|^2 &= (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \\ &= \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{I}_3 \times \mathbb{I}_3: \\ i \neq j}} x_i^2 y_j^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 3} x_i y_i x_j y_j, \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\langle v_1, v_2 \rangle^2 + \|v_1 \wedge v_2\|^2 = \sum_{(i,j) \in \mathbb{I}_3 \times \mathbb{I}_3} x_i^2 y_i^2 = \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^3 y_j^2 \right) = \|v_1\|^2 \|v_2\|^2.$$

Hemos demostrado el siguiente Teorema.

Teorema 4.2 (Fórmula de Lagrange). *Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{R} -espacio euclídeo de dimensión 3, para todo $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ vale que*

$$(7) \quad \langle v_1, v_2 \rangle^2 + \|v_1 \wedge v_2\|^2 = \|v_1\|^2 \|v_2\|^2.$$

Nota Bene. Geométricamente, la fórmula de Lagrange significa que cuando v_1, v_2 son linealmente independientes, la norma del producto vectorial $v_1 \wedge v_2$ es el área del paralelogramo generado por v_1, v_2 . Esto es así porque

$$\begin{aligned} \|v_1 \wedge v_2\|^2 &= \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2 \\ &= \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 \cos^2 \theta \\ &= \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

donde $\theta \in (0, \pi)$ es el ángulo formado por los vectores v_1 y v_2 , y por lo tanto,

$$\|v_1 \wedge v_2\| = \|v_1\| \|v_2\| \sin \theta.$$

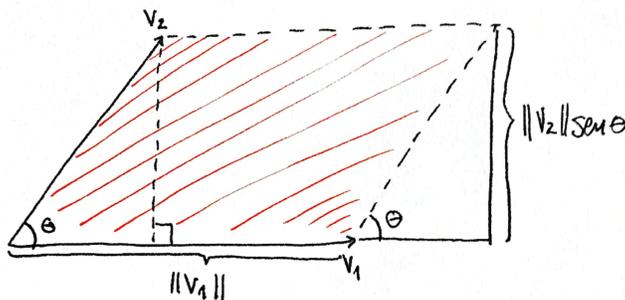


FIGURA 5. El área del paralelogramo generado por v_1 y v_2 es la norma del producto vectorial de dichos vectores.