Álgebra II (Primer cuatrimestre, 2022)

Guías de Trabajos Prácticos

Segunda parte. Versión 1.3 [En construcción]

Cuando podemos trasladar un problema práctico al lenguaje de la matemática, podemos, al mismo tiempo, “abstraernos” de las características secundarias del problema y, haciendo uso de fórmulas y teoremas generales, obtener resultados precisos. De este modo la abstracción de la matemática constituye su potencia; esta abstracción es una necesidad práctica.

A. N. Kolmogorov

Glosario de símbolos

: Alto. Estos ejercicios son importantes, pudiendo ser o no difíciles de resolver. Se recomienda fuertemente resolverlos.

: Curva peligrosa. Estos ejercicios pueden ser más difíciles de lo que parecen a simple vista, o por el contrario, si se miran bien resultan más fáciles de lo que parecen. Ante la duda, consulte a los docentes del curso.

: "Siga siga". Lea detenidamente el enunciado. Si cree entender qué es lo que hay que hacer (ya ha resuelto un ejercicio previamente de espíritu similar), pase al siguiente. Ante la duda, resuélvalo.

: Solo para artesanos. Estos ejercicios son de naturaleza teórica y exigen un buen dominio del arte y una cuota de imaginación.

: Oráculo. Proporciona pistas y sugerencias para resolver algunos ejercicios. A veces, propone una situación.

. El ejercicio requiere utilizar una máquina.

Guía 4

Preliminares

En todo lo que sigue

1. $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.
2. $\mathbb{K}^n$ es el $\mathbb{K}$-espacio euclídeo canónico y $\|\cdot\|$ designa su norma inducida.
3. Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de vectores en $\mathbb{K}^n$ y $x \in \mathbb{K}^n$, decimos que x_k *tiende a* x, cuando
$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x\| = 0.$$
En tal caso x se llama *el límite de la sucesión* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y se denota por $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$.
4. $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{K}^{n\times n} \times \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ designa el producto interno canónico en $\mathbb{K}^{n\times n}$ definido por $\langle A, B\rangle := \operatorname{tr}(B^*A)$ y $\|A\|_F := \sqrt{\langle A, A\rangle}$ designa su norma inducida, llamada la *norma de Frobenius*.
5. Si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de matrices en $\mathbb{K}^{n\times n}$ y $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, decimos que A_k *tiende a* A, cuando
$$\lim_{k\to\infty} \|A_k - A\|_F = 0.$$
En tal caso A se llama *el límite de la sucesión* $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y se denota por $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$.

Definiciones

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

1. $\lambda \in \mathbb{K}$ se llama un *autovalor de* A, cuando existe un vector no nulo $x \in \mathbb{K}^n$ tal que $Ax = \lambda x$. En tal caso, el vector x se llama un *autovector de* A *correspondiente al autovalor* λ.
2. El conjunto de todos los autovalores de A se llama *el espectro de* A, y se lo denota mediante $\sigma(A)$.
3. Si $\lambda \in \sigma(A)$, el subespacio $\mathbb{S}_\lambda := \operatorname{nul}(A - \lambda I)$ se llama el *autoespacio correspondiente a* λ. La dimensión de $\mathbb{S}_\lambda$ se llama la *multiplicidad geométrica de* λ y la se denotaremos mediante $\mu(\lambda)$.
4. El polinomio $\chi_A(x) = \det(A - xI)$ se denomina *el polinomio característico de* A. Nótese que $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \chi_A(\lambda) = 0\}$.
5. La *multiplicidad algebraica* de $\lambda \in \sigma(A)$ es su multiplicidad como raíz del polinomio característico de A y la designaremos mediante $m(\lambda)$:
$$m(\lambda) = \max\left\{k \in \mathbb{N} : \chi_A(x) = (x-\lambda)^k q(x),\ \text{con } q \in \mathbb{K}[x]\right\}.$$
6. Si $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, decimos que A *es semejante a* B cuando existe una matriz inversible $P \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que $A = PBP^{-1}$.
7. Decimos que A es diagonalizable cuando A es semejante a una matriz diagonal.

8. Dados $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, utilizaremos la notación $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ para designar a la matriz diagonal

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

9. Dadas p matrices $A_i \in \mathbb{K}^{n_i\times n_i}$, con $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$, utilizaremos la notación $A = \operatorname{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_p)$ para designar a la matriz diagonal en bloques

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_p \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}.$$

Algunas propiedades

Matrices diagonalizables.

1. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:
   a) A es diagonalizable.
   b) Existe una base $\mathbb{K}^n$ compuesta por autovectores de A.
   c)
   $$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(A)} \operatorname{nul}(A - \lambda I).$$
   d)
   $$\chi_A(x) = \prod_{\lambda\in\sigma(A)} (x-\lambda)^{\mu(\lambda)}.$$
2. Si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es diagonalizable y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{K}^n$ compuesta por autovectores de A correspondientes a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, respectivamente, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ vale que
   $$A^k \left(\sum_{j=1}^{n} c_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^k v_j,$$
   donde $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$.

Teorema espectral.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz con espectro $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q\}$. A es diagonalizable si y sólo si existen matrices $G_1, G_2, \ldots, G_q \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tales que

$$A = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \cdots + \lambda_k G_q, \tag{1}$$

donde las G_i tienen las siguientes propiedades

- G_i es la proyección sobre $\operatorname{nul}(A - \lambda_i I)$ en la dirección de $\operatorname{col}(A - \lambda_i I)$.
- $G_i G_j = 0$ para $i \neq j$.
- $G_1 + G_2 + \cdots + G_q = I$.

El desarrollo (1) se denomina la *descomposición espectral* de A, y las G_i se llaman los *proyecciones espectrales* asociadas.

Forma canónica de Jordan.

Dada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, existe una matriz inversible $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A = PJP^{-1}$, donde $J \in \mathbb{C}^{n\times n}$ está en la *forma canónica de Jordan*. Esto significa que J es una matriz diagonal en bloques, con $J = \operatorname{diag}\big(J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \ldots, J_{n_p}(\lambda_p)\big)$ y

$$J_{n_i}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_1\times n_i}.$$

J es única salvo permutaciones de sus bloques diagonales. Las matrices $J_{n_i}(\lambda_i)$ se llaman *bloques de Jordan* con autovalor λ_i de índice n_i. Nótese que la cantidad de bloques de Jordan coincide con la máxima cantidad de autovectores linealmente independientes que posee A.

Para una demostración de este Teorema puede consultarse el libro de Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*.

Semejanza de matrices.

Dos matrices son semejantes si y solamente si tienen la misma forma canónica de Jordan.

Ejercicios

4.1 En cada uno de los siguientes casos, hallar el polinomio característico de la matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, analizar si la misma es diagonalizable, y en caso de serlo hallar una matriz inversible $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y una matriz diagonal $\Lambda \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tales que $A = P\Lambda P^{-1}$:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 20 & 3 & 10 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

4.2 Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que tiene autovalores $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$ con autovectores asociados

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T, \; v_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T, \; v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T,$$

respectivamente.

(**a**) Hallar una base de $\mathrm{nul}(A)$ y una base de $\mathrm{col}(A)$.

(**b**) Hallar una solución particular de la ecuación $Ax = v_2 + v_3$.

(**c**) Hallar todas las soluciones de la ecuación $Ax = v_2 + v_3$

(**d**) Explicar por qué la ecuación $Ax = v_1$ no tiene solución.

: *Si se halla la expresión de A, el ejercicio se auto-destruye y no sirve para nada.*

4.3 Hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que

$$\mathrm{nul}(A - 3I) = \mathrm{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T \right\},$$
$$\mathrm{nul}(A - 5I) = \mathrm{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}.$$

¿Es única? Si la respuesta es negativa, hallar otra. Si la respuesta es afirmativa, explicar por qué.

4.4 Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz dependiente de los parámetros reales a, b, c definida por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & b & a \end{bmatrix}.$$

(**a**) Hallar los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $\chi_A(x) = \det(A - xI) = 9x - x^3$. ¿$A$ es diagonalizable? Si la respuesta es afirmativa, hallar una matriz inversible $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y una matriz diagonal $\Lambda \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tales que $A = P\Lambda P^{-1}$.

(**b**) Para $c = 0$, hallar y graficar el conjunto de todas las parejas $a, b \in \mathbb{R}$ tales que A es diagonalizable.

4.5 Sea

$$A = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 16 & -1 & 30 \\ -8 & 14 & 12 \\ 8 & 4 & 24 \end{bmatrix}.$$

(**a**) Hallar y graficar el conjunto de todos los $a_0 \in \mathbb{R}$ tales que la matriz $A + a_0 I$ es inversible.

(**b**) Hallar y graficar el conjunto de todas las parejas $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ tales que la matrix $A^2 + a_1 A + a_0 I$ es inversible.

4.6 Hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ que posea las siguientes propiedades:

(**a**) $A^2 - 3A + 2I = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.

(**b**) $A^2 - 3A + 2I = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ y $\det(A) = -1$.

(**c**) $A^2 - 3A + 2I = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ y $\operatorname{tr}(A) = 6$.

: *Nótese que si* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *y* $p \in \mathbb{C}_m[x] \setminus \operatorname{gen}\{1\}$, *entonces*

$$\sigma(p(A)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

4.7 Dos especies comparten el mismo ecosistema. La primera, la *presa*, se multiplicaría indefinidamente si estuviera sola. La segunda, la *depredadora*, se alimenta de la presa, por lo que si se quedara sola se extinguiría por falta de alimentos. La evolución de la cantidad de individuos de las dos especies x_n, y_n se puede modelar por un sistema de ecuaciones en diferencias,

$$\begin{cases} x_{n+1} = \left(1 + \frac{2}{10}\right) x_n - p y_n & \text{(ecuación de evolución de la presa)}, \\ y_{n+1} = \frac{1}{2} x_n + \left(1 - \frac{4}{10}\right) y_n & \text{(ecuación de evolución de la depredadora)}, \end{cases}$$

donde $p > 0$, que se denomina el *parámetro de predación.*

(**a**) Notar que en la primera ecuación, el coeficiente $1 + \frac{2}{10}$ significa que en ausencia de la segunda (i.e., $y_n = 0$), la primera especie crece a una tasa del 20 % por unidad de tiempo; mientras que el coeficiente $-p$ significa que la presencia de la segunda (i.e., $y_n > 0$) contribuye negativamente al crecimiento de la primera.

(**b**) Notar que en la segunda ecuación, el coeficiente $1 - \frac{4}{10}$ significa que en ausencia de la primera (i.e. $x_n = 0$), la segunda especie se extingue a una tasa del 40 % por unidad de tiempo; mientras que el coeficiente $\frac{1}{2}$ significa que la presencia de la primera (i.e., $x_n > 0$) contribuye al crecimiento de la segunda: cada pareja de individuos de la primera contribuye a la existencia de un nuevo individuo de la segunda en el siguiente ciclo.

(**c**) Notar que para cada $n \in \mathbb{N}$ vale que

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 & -p \\ 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix},$$

donde $\begin{bmatrix} x_0 & y_0 \end{bmatrix}$ representa las cantidades iniciales de individuos de las dos especies.

(**d**) Hallar los valores de p para los cuales la matriz del sistema resulta diagonalizable.

(**e**) Para cada $p \in \{0.175, 0.16, 0.1\}$ analizar el comportamiento a largo plazo de las dos especies.

4.8 Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definida por

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

(**a**) Hallar el espectro de A y comprobar que A es diagonalizable.

(**b**) Usando la descomposición espectral de A comprobar que existe $M \in \mathbb{R}^+_*$ tal que

$$\|A^n - G_1\|_F \leq M \left(\frac{3+\sqrt{2}}{10} \right)^n,$$

donde G_1 es la matriz de la proyección sobre $\mathrm{nul}(A-I)$ en la dirección de $\mathrm{col}(A-I)$. Utilizar este resultado para concluir que

$$\lim_{n\to\infty} A^n = G_1.$$

4.9 Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definida por

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 7 & 6 & 6 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(**a**) Comprobar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|A^n\|_F}{2^n} > 0$$

y concluir que no existe $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$.

(**b**) Comprobar que el conjunto $\left\{x \in \mathbb{R}^3 : \lim_{k\to\infty} A^n x = 0\right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y hallar una base del mismo.

(**c**) Comprobar que el conjunto $\mathbb{S} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \text{existe } \lim_{k\to\infty} A^n x\right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y hallar una base del mismo.

(**d**) Comprobar que $\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\end{bmatrix}^T \in \left\{\lim_{k\to\infty} A^n x : x \in \mathbb{S}\right\}$ y hallar todas las soluciones de la ecuación $\lim_{k\to\infty} A^n x = \begin{bmatrix}0 & -2 & 2\end{bmatrix}^T$.

4.10 Hallar la forma de Jordan de las siguientes matrices:

$$A_1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6 & 8 & 6 \\ -5 & 22 & 9 \\ 4 & -12 & 0 \end{bmatrix},\ A_2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 1 & 10 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix},\ A_3 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 9 & 6 & 7 \\ 1 & 10 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

4.11 Determinar cuáles de las siguientes parejas de matrices A_1 y A_2 son semejantes, y en caso de serlo hallar B inversible tal que $A_1 = BA_2B^{-1}$:

(**a**) $A_1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6 & 8 & 6 \\ -5 & 22 & 9 \\ 4 & -12 & 0 \end{bmatrix},\ A_2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 18 & -13 & -57 \\ -2 & 13 & 9 \\ 2 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$

(**b**) $A_1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -6 & 10 & 6 \\ 5 & -10 & 3 \end{bmatrix},\ A_2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6 & -5 & 4 \\ 8 & 22 & -12 \\ 6 & 9 & 0 \end{bmatrix}.$

4.12 Comprobar que las siguientes matrices son semejantes

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix},\ A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix},$$

y hallar matrices inversibles $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que

$$A_1 = B_1 A_0 B_1^{-1} \text{ y } A_2 = B_2 A_0 B_2^{-1}.$$

4.13 Para cada una de las siguientes matrices $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, hallar un conjunto fundamental de soluciones del sistema $Y' = AY$, resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

y analizar su comportamiento asintótico:

$$(\mathbf{a})\ A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix},\quad (\mathbf{b})\ A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix},\quad (\mathbf{c})\ A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

4.14 Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

(**a**) Hallar un conjunto fundamental de soluciones del sistema $Y' = AY$.

(**b**) Resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

y analizar su comportamiento asintótico.

4.15 Para cada una de las siguientes matrices $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, hallar un conjunto fundamental de soluciones del sistema $Y' = AY$.

$$(\mathbf{a})\ \ A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{b})\ \ A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{c})\ \ A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

4.16 Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por

$$A = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 25 & -14 & -4 \\ -2 & 4 & 14 \\ -10 & 2 & 25 \end{bmatrix}.$$

(**a**) Hallar un conjunto fundamental de soluciones del sistema $Y' = AY$.

(**b**) Resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

y analizar su comportamiento asintótico.

4.17 Hallar todas las soluciones $Y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ del sistema

$$Y' = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} Y.$$

4.18 Hallar todas las soluciones $Y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ del sistema

$$Y' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 7 \\ 7 & -4 & 5 \end{bmatrix} Y$$

y determinar para qué valores iniciales $Y(0) \in \mathbb{R}^3$ la norma de $Y(t)$ es acotada para $t \to +\infty$.

Guía 5

Preliminares y notación

En todo lo que sigue

1. $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ designa el producto interno canónico en $\mathbb{R}^n$ definido por $\langle x, y \rangle := y^T x$, y $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ designa su norma inducida.
2. $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ designa el producto interno canónico en $\mathbb{R}^{n\times n}$ definido por $\langle A, B \rangle := \operatorname{tr}(B^T A)$, y $\|A\|_F := \sqrt{\langle A, A \rangle}$ designa su norma inducida, llamada la *norma de Frobenius*.
3. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Obsérvese que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$ vale que
$$\langle Ax, y \rangle = \left\langle x, A^T y \right\rangle .$$
Consecuentemente,
   a) $\operatorname{nul}(A^T) = \operatorname{col}(A)^\perp$;
   b) $\operatorname{col}(A^T) = \operatorname{nul}(A)^\perp$;
   c) $\operatorname{nul}(A) = \operatorname{col}(A^T)^\perp$;
   d) $\operatorname{col}(A) = \operatorname{nul}(A^T)^\perp$.
4. Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es
   - *ortogonal* si $A^T A = AA^T = I$.
   - *simétrica* si $A = A^T$.

Algunas propiedades

Caracterización de las matrices ortogonales.

Sea $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. U es ortogonal.
2. U^T es ortogonal.
3. U es inversible y $U^{-1} = U^T$.
4. U preserva el producto escalar:
$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle , \qquad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^n.$$
5. Si $\{v_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, entonces $\{Uv_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ también lo es.
6. Las columnas de U constituyen una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.
7. Las filas de U constituyen una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.
8. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, vale que $\|Ux\| = \|x\|$ (i.e., la transformación lineal $T(x) = Ux$ es una *isometría*.)

Caracterización de las matrices simétricas.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Son equivalentes:

- A es simétrica.
- $\mathbb{R}^n$ tiene una base ortonormal constituida por autovectores de A.
- A es ortogonalmente equivalente a una matriz diagonal.

Ejercicios

5.1 Comprobar que las siguientes matrices $U \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ son ortogonales

$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

En cada caso caracterizar la isometría $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x) = Ux$.

: *En otras palabras, si se trata de una rotación, describir su ángulo; si se trata de una simetría ortogonal, describir la recta con respecto a la que se realiza la simetría.*

5.2 Comprobar que las siguientes matrices $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ son ortogonales

$$\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \\ -6 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -6 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -6 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -6 \\ -6 & -2 & -3 \\ 3 & -6 & -2 \end{bmatrix}.$$

En cada caso caracterizar la isometría $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x) = Ux$.

: *Por ejemplo, si T es una rotación, hallar el eje y el ángulo de rotación; si T es una simetría ortogonal, describir el subespacio con respecto al que se realiza la simetría; etcétera.*

5.3 Hallar la matriz de rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$ alrededor del eje generado por $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

5.4 Explicar por qué las siguientes matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son diagonalizables ortogonalmente

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

y en cada caso hallar una matriz ortogonal U y una matriz diagonal Λ tales que $A = U\Lambda U^T$.

: *¿A ojo?*

5.5 Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \; v_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T, \; v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T,$$

es una base de autovectores de A asociados a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, respectivamente. Probar que A es simétrica si y solo si $\lambda_2 = \lambda_3$.

5.6 Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \; v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T, \; v_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T,$$

son autovectores asociados a los autovalores $2, -3, 5$, respectivamente. Probar que A es simétrica si y solo si $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ es un autovector de A.

5.7 Hallar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que posea las siguientes propiedades:

(**a**) $\sigma(A) = \{1, 1/4\}$ y $\operatorname{nul}(A - I) = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T\right\}$.

(**b**) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \in \operatorname{nul}(A - I)$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T \in \operatorname{nul}(A - 2I)$ y $\det(A) = 12$.

(**c**) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ y $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T$ son autovectores de A, $\det(A) = 18$, $\operatorname{tr}(A) = 8$, y $\sigma(A) \subset (0, +\infty)$.

(**d**) $A^3 - 5A^2$ es singular, $\operatorname{rango}(A - 3I) = 1$, el plano $\left\{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\right\}$ es un autoespacio de A, y $\sigma(A) \subset (0, +\infty)$.

: *¿A es única? ¿Por qué?*

5.8 Para cada una de la siguientes matrices

$$A = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 13 & -2 & -4 \\ -2 & 10 & 2 \\ -4 & 2 & 13 \end{bmatrix}, \quad A = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 17 & 2 & -2 \\ 2 & 14 & 4 \\ -2 & 4 & 14 \end{bmatrix},$$

(**a**) hallar $\left\{x \in \mathbb{R}^3 : \lim\limits_{k\to\infty} A^k x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T\right\}$,

(**b**) comprobar que $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T \in \left\{\lim\limits_{k\to\infty} A^k x : x \in \mathbb{R}^3\right\}$ y hallar todas las soluciones de la ecuación $\lim\limits_{k\to\infty} A^k x = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$.

5.9 Sea

$$A = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

(**a**) Comprobar que la sucesión de matrices $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente y hallar el limite al que converge. ¿Qué significación geométrica tiene la matriz $\lim\limits_{k\to\infty} A^k$?

(**b**) Para cada $x \in \mathbb{R}^3$, hallar $\lim\limits_{k\to\infty} A^k x$.

(**c**) Hallar el conjunto

$$\left\{x \in \mathbb{R}^3 : \lim_{k\to\infty} \|A^k x\| = 1\right\},$$

y describirlo geométricamente.

5.10 En cada uno de los siguientes casos, hallar una descomposición en valores singulares de la matriz A, determinar bases ortonormales de sus cuatro subespacios fundamentales y sus respectivas matrices de proyección.

(**a**) $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$.

(**b**) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

5.11 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

(**a**) Hallar los valores singulares de A, bases ortonormales de sus cuatro subespacios fundamentales y sus respectivas matrices de proyección.

(**b**) Hallar una descomposición en valores singulares reducida de A.

5.12 Sean

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}.$$

Comprobar que $A = U\Sigma V^T$ es una descomposición en valores singulares de A y, a partir de ella, hallar la seudoinversa de Moore-Penrose de A; la matriz de proyección sobre $\operatorname{fil}(A)$ y la matriz de proyección sobre $\operatorname{col}(A)$.

5.13 En cada uno de los siguientes casos, hallar $A^\dagger$, la seudoinversa de Moore-Penrose de A, y determinar la solución por cuadrados mínimos de norma mínima de la ecuación $Ax = b$.

(**a**) $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$.

(**b**) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$.

5.14 Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(x) = Ax$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(**a**) Hallar entre todos los $x \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen $\|x\| = 1$ aquellos que maximizan $\|T(x)\|$ y determinar el valor $\max\limits_{\|x\|=1} \|T(x)\|$.

(**b**) Hallar entre todos los $x \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen $\|x\| = 1$ aquellos que minimizan $\|T(x)\|$ y determinar el valor $\min\limits_{\|x\|=1} \|T(x)\|$.

5.15 Hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que

(**a**) $\max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = 25\sqrt{2}$, $\min\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = 15$, y $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(**b**) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \text{nul}(A)$, $v = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}^T$ es un autovector de $A^T A$ tal que $Av = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T$, y $\max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = 3\sqrt{2}$.

: *¿A, es única?*

5.16 Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ la transformación definida por $T(x) = Ax$. En cada uno de los siguientes casos, caracterizar geométricamente y graficar la imagen por T de la circunferencia unitaria $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$.

(**a**) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(**b**) $A = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$.

(**c**) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

: *en cada caso, ¿qué significación geométrica tienen los $x \in S_1$ que maximizan (o minimizan) $\|T(x)\|$?, ¿qué representan los valores $\max\limits_{x\in S_1} \|T(x)\|$ y $\min\limits_{x\in S_1} \|T(x)\|$?*

5.17 Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ la transformación definida por $T(x) = Ax$. En cada uno de los siguientes casos, caracterizar geométricamente y graficar la imagen por T de la circunferencia unitaria $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$.

(**a**) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(**b**) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

: *en cada caso, si $A = U\Sigma V^T$ es una descomposición en valores singulares de A, ¿qué significación geométrica tienen las columnas de U?, ¿qué representan los valores singulares de A?*

5.18 Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ la transformación definida por $T(x) = Ax$. En cada uno de los siguientes casos, caracterizar geométricamente y graficar la imagen por T de la circunferencia unitaria $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$.

(**a**) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

(**b**) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 10 & 0 \\ -2 & 0 & 10 \end{bmatrix}$.

(**c**) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Guía 6

Preliminares y notación

En todo lo que sigue $\mathrm{Sim}_n(\mathbb{R})$ es el conjunto de todas las matrices simétricas de $\mathbb{R}^{n\times n}$. Esto es,

$$\mathrm{Sim}_n(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^T = A\right\}.$$

Definición.

Una *forma cuadrática* en $\mathbb{R}^n$ es una función $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que puede expresarse en la forma

$$Q(x) = x^T Ax \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n,$$

con $A \in \mathrm{Sim}_n(\mathbb{R})$.
La *forma polar* de una forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se define por

$$\Phi(x, y) := \frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x) - Q(y)).$$

Nótese que si $Q(x) = x^T Ax$, con $A \in \mathrm{Sim}_n(\mathbb{R})$, entonces $\Phi(x, y) = y^T Ax$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Nótese también que $\Phi(x, x) = Q(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Algunas propiedades.

En todo lo que sigue $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ será una forma cuadrática de la forma $Q(x) = x^T Ax$, con $A \in \mathrm{Sim}_n(\mathbb{R})$.

1. *Cambio de variables.* Al efectuarse el cambio de variables $x = My$, mediante la matriz invertible $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, la expresión de la forma cuadrática $Q(x) = x^T Ax$, en las nuevas variables y, adopta la forma $\tilde{Q}(y) = y^T M^T AMy$.
2. *Ejes principales.* Si $A = P\Lambda P^T$ es una diagonalización ortogonal de A, con $P = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz ortogonal y $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, entonces el cambio de variables $x = Py$ elimina los términos cruzados de $Q(x)$ y la forma cuadrática adopta la forma $\tilde{Q}(y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$. Las rectas que generan las columnas de P se denominan *ejes principales* de Q.
3. *Acción de Q sobre sus ejes principales.* Obsérvese que $Q(u_i) = \lambda_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.
4. *Conjuntos de nivel.* Dado $c \in \mathbb{R}$ el conjunto de todas las soluciones de la ecuación $Q(x) = c$ se denomina *el conjunto de nivel* c de Q y lo denotaremos mediante
$$\mathcal{N}_c(Q) := \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) = c\}.$$
5. *Imagen de la esfera unitaria.* Los valores de Q sobre $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ están unívocamente determinados por sus valores sobre la esfera unitaria
$$S_{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}.$$
Más precisamente, para todo $x \neq 0$ vale que $Q(x) = \|x\|^2 Q(\hat{x})$, donde $\hat{x}$ es el vector unitario que tiene la misma dirección y sentido del vector x.

6. *Extremos sobre la esfera unitaria.* El cambio de variables ortogonal $x = Py$ es una isometría y en consecuencia $\|x\| = \|y\|$. De aquí se infiere que

$$\{Q(x) : \|x\| = 1\} = \left\{\tilde{Q}(y) : \|y\| = 1\right\}.$$

En particular, si los autovalores de A están ordenados de mayor a menor, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$, se puede deducir que
   a) $\max\limits_{\|x\|=1} Q(x) = \max\limits_{\|y\|=1} \tilde{Q}(y) = \lambda_1$,
   b) $\{x \in S_{n-1} : Q(x) = \lambda_1\} = S_{n-1} \cap \operatorname{nul}(A - \lambda_1 I)$,
   c) $\min\limits_{\|x\|=1} Q(x) = \min\limits_{\|y\|=1} \tilde{Q}(y) = \lambda_n$,
   d) $\{x \in S_{n-1} : Q(x) = \lambda_n\} = S_{n-1} \cap \operatorname{nul}(A - \lambda_n I)$.
7. Combinando los dos puntos anteriores se deduce que

$$\lambda_n\|x\|^2 \leq Q(x) \leq \lambda_1\|x\|^2 \;\text{ para todo }\; x \in \mathbb{R}^n.$$

Si $\lambda_n > 0$ (i.e., si Q es definida positiva), se obtiene que:
   a) para todo $x \in \mathbb{R}^n$ vale que

$$\frac{Q(x)}{\lambda_1} \leq \|x\|^2 \leq \frac{Q(x)}{\lambda_n},$$

   b) para todo $x \in \mathcal{N}_c(Q)$, con $c > 0$, vale que

$$\frac{c}{\lambda_1} \leq \|x\|^2 \leq \frac{c}{\lambda_n}.$$

8. *Formas canónicas.* Se puede comprobar que existe una matriz inversible $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que el cambio de variables $x = My$ permite expresar a Q en la forma

$$\tilde{Q}(y) = y^T \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0_r \end{bmatrix} y, \tag{1}$$

donde p, q y r son, respectivamente, las cantidades de autovalores positivos, negativos y nulos de A, (contados con sus multiplicidades). La representación de Q en la forma (1) se denomina *la forma canónica de Q*.

Para un catálogo de superficies de nivel en $\mathbb{R}^3$.

Se trata de un breve recordatorio de objetos geométricos que presuponemos conocidos.

1. Sea $Q(x)$ la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ definida por

$$Q(x) := x_1^2 + x_2^2 + x_3^3.$$

Sus conjuntos de nivel son

$$\mathcal{N}_c(Q) = \begin{cases} \text{Esfera centrada en el origen de radio } \sqrt{c} & \text{si } c > 0, \\ 0_{\mathbb{R}^3} & \text{si } c = 0, \\ \emptyset & \text{si } c < 0. \end{cases}$$

2. Sea $Q(x)$ la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ definida por

$$Q(x) := x_1^2 + x_2^2 - x_3^3.$$

Sus conjuntos de nivel son

$$\mathcal{N}_c(Q) = \begin{cases} \text{Hiperboloide de una hoja} & \text{si } c > 0, \\ \text{Cono} & \text{si } c = 0, \\ \text{Hiperboloide de dos hojas} & \text{si } c < 0. \end{cases}$$

Se trata de tres superficies de revolución alrededor del eje x_3: la primera y la tercera se obtienen rotando la hipérbola $x_1^2 - x_3^2 = c$, y la segunda rotando la recta $x_1 = x_3$.

3. Sea $Q(x)$ la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ definida por

$$Q(x) := x_1^2 + x_2^2.$$

Sus conjuntos de nivel son

$$\mathcal{N}_c(Q) = \begin{cases} \text{Cilindro circular} & \text{si } c > 0, \\ \text{Recta } x_1 = x_2 = 0 & \text{si } c = 0, \\ \emptyset & \text{si } c < 0. \end{cases}$$

4. Sea $Q(x)$ la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ definida por

$$Q(x) := x_1^2 - x_2^2.$$

Sus conjuntos de nivel son

$$\mathcal{N}_c(Q) = \begin{cases} \text{Cilindro hiperbólico} & \text{si } c \neq 0, \\ \text{Par de planos que se cortan} & \text{si } c = 0. \end{cases}$$

5. Sea $Q(x)$ la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ definida por

$$Q(x) := x_1^2.$$

Sus conjuntos de nivel son

$$\mathcal{N}_c(Q) = \begin{cases} \text{Par de planos paralelos} & \text{si } c > 0, \\ \text{Par de planos coincidentes} & \text{si } c = 0, \\ \emptyset & \text{si } c < 0. \end{cases}$$

Ejercicios

6.1 En cada uno de los siguientes casos, expresar la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como $x^T Ax$ con $A \in \mathrm{Sim}_2(\mathbb{R})$, diagonalizar ortogonalmente $A = P\Lambda P^T$ y mediante el cambio de variables $x = Py$ escribir la forma cuadrática sin términos cruzados.

(**a**) $Q(x) = 9x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_1x_2$.

(**b**) $Q(x) = 2x_1^2 - 6x_2^2 + 6x_1x_2$.

(**c**) $Q(x) = 9x_1^2 + 16x_2^2 + 24x_1x_2$.

Clasificar cada una de esas formas cuadráticas y graficar sus conjuntos de nivel $\mathcal{N}_c(Q)$.

6.2 En cada uno de los siguientes casos, expresar la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ como $x^T Ax$ con $A \in \mathrm{Sim}_3(\mathbb{R})$, diagonalizar ortogonalmente $A = P\Lambda P^T$ y mediante el cambio de variables $x = Py$ escribir la forma cuadrática sin términos cruzados.

(**a**) $Q(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

(**b**) $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3$.

(**c**) $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

(**d**) $Q(x) = x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

(**e**) $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Clasificar cada una de esas formas cuadráticas y graficar sus conjuntos de nivel $\mathcal{N}_c(Q)$.

: *representar Q en el sistema de coordenadas cartesiano definido por sus ejes principales y observar que mediante cambios de escala se obtiene alguna de las formas presentadas en el catálogo. Cambios de escala transforman circunferencias en elipses, esferas en elipsoides, y viceversa.*

6.3 Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz simétrica de traza nula tal que

$$\mathrm{nul}(A - 2I) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\},$$

y sea $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por $Q(x) := x^T Ax$. Si $x_0 \in \mathbb{R}^3$ es un vector cuya distancia al subespacio gen $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T\right\}$ es 5, ¿qué valor debe tener la distancia de x_0 al $\mathrm{nul}(A - 2I)$ para que $Q(x_0) = 14$?

: *no se requiere hallar los coeficientes de A ni la expresión de x_0.*

6.4 Sea $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por $Q(x) := x^T Ax$, donde

$$A = \frac{1}{324}\begin{bmatrix} 76 & 10 & -10 \\ 10 & 61 & 20 \\ -10 & 20 & 61 \end{bmatrix}.$$

(**a**) Mediante un cambio de variables ortogonal $x = Py$ escribir la forma cuadrática sin términos cruzados. ¿Cuáles son los ejes principales de Q?

(**b**) Caracterizar geométricamente las superficies de nivel $\mathcal{N}_{r^2}(Q)$, con $r > 0$, y graficarlas en el sistema cartesiano definido por los ejes principales de Q.

(**c**) A simple vista, determinar los puntos de la superficie de nivel $\mathcal{N}_1(Q)$ más cercanos al origen e indicar a qué distancia se encuentran del mismo.

(**d**) A simple vista, determinar los puntos de la superficie de nivel $\mathcal{N}_1(Q)$ más lejanos del origen e indicar a qué distancia se encuentran del mismo.

6.5 Idéntico al anterior, pero utilizando la matriz

$$A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$

en la definición de Q.

6.6 En cada uno de los siguientes casos, hallar, si existen, el máximo y el mínimo de la forma cuadrática $Q_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q_1(x) = \|x\|^2$, sujeto a la restricción $Q_2(x) = 1$, para

(**a**) $Q_2(x) = 9x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_1x_2$.

(**b**) $Q_2(x) = 9x_1^2 + 3x_2^2 - 4\sqrt{10}x_1x_2$.

:*¿Cuál es el significado geométrico de los resultados obtenidos? Notar que en* (**a**) y (**b**) *las formas cuadráticas son de la forma $Q_2(x) = 9x_1^2 + 3x_2^2 - 2ax_1x_2$, con $a \in \mathbb{R}$, y explicar los diferentes comportamientos de la solución problema en función de los posibles valores de a.*

6.7 Sea $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por

$$Q(x) := x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2.$$

(**a**) Observar que Q es definida positiva y hallar un cambio de variables $x = My$ tal que $\tilde{Q}(y) = Q(My) = \|y\|^2$.

(**b**) Hallar, si existen, el máximo y el mínimo de $Q(x)$ sujetos a la restricción $9x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_1x_2 = 1$ y determinar los vectores que los realizan.

6.8 Sea Q la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ definida por

$$Q(x) := 5x_1^2 + 6x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3.$$

(**a**) Hallar $\max\limits_{\|x\|=1} Q(x)$ y $\min\limits_{\|x\|=1} Q(x)$.

(**b**) Verificar que para todo $x \in \mathbb{R}^3$ vale que $3\|x\|^2 \leq Q(x) \leq 9\|x\|^2$.

(**c**) Caracterizar el conjunto de nivel $\mathcal{N}_1(Q)$ y, utilizando el resultado del inciso anterior, hallar los puntos de $\mathcal{N}_1(Q)$ cuya distancia al origen sea mínima y aquellos cuya distancia al origen sea máxima. ¿Qué valores tienen esas distancias?

: *comparar con el* **Ejercicio 6.4.** *y formalizar conclusiones.*

6.9 Sea Q la forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$ definida por

$$Q(x) := x^T(aI + bA)x,$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, y donde A es la matriz en base canónica de una proyección ortogonal de $\mathbb{R}^2$ sobre un subespacio unidimensional.

(**a**) Hallar los valores de a y b para que $\max\limits_{\|x\|=1} Q(x) = 5$ y $\min\limits_{\|x\|=1} Q(x) = 2$.

(**b**) Para los valores hallados en el inciso anterior, y sabiendo que

$$\operatorname{col}(A) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 + 4x_2 = 0\right\},$$

graficar el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^2 : Q(x) \leq 3\}$.

6.10 Sean $Q_1, Q_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ las formas cuadráticas en $\mathbb{R}^2$ definidas por

$$Q_1(x) = 17x_1^2 + 108x_2^2 + 312x_1x_2, \qquad Q_2(x) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_2.$$

(**a**) Graficar los conjuntos de nivel $\mathcal{N}_c(Q_2)$, con $c > 0$.

(**b**) Hallar $\max\limits_{x \in \mathcal{N}_8(Q_2)} Q_1(x)$ y $\min\limits_{x \in \mathcal{N}_8(Q_2)} Q_1(x)$.

(**c**) Hallar y graficar el conjunto de todos los $x \in \mathcal{N}_8(Q_2)$ que maximizan $Q_1(x)$.

(**d**) Hallar y graficar el conjunto de todos los $x \in \mathcal{N}_8(Q_2)$ que minimizan $Q_1(x)$.