FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

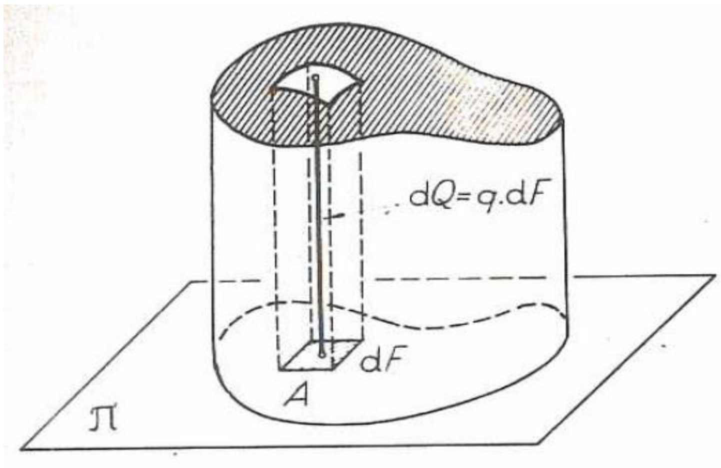
Departamento de Estabilidad

64.04 | 64.05 | 84.05
Estática y Resistencia de Materiales
Teórica
Ing. Alfredo Corral

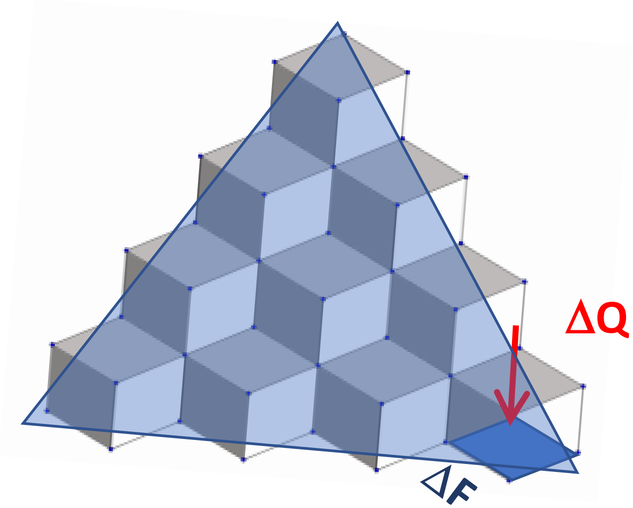
CLASE 3-A
FUERZAS DISTRIBUIDAS

1. FUERZAS DISTRIBUIDAS

1.1 Definición



$$\lim_{\Delta F \to 0} \left(\frac{\Delta Q}{\Delta F}\right) = \frac{dQ}{dF} = q$$



Unidades de q

[fuerza]/[sup]

Ton / m²

KN / m²

Kg / cm²

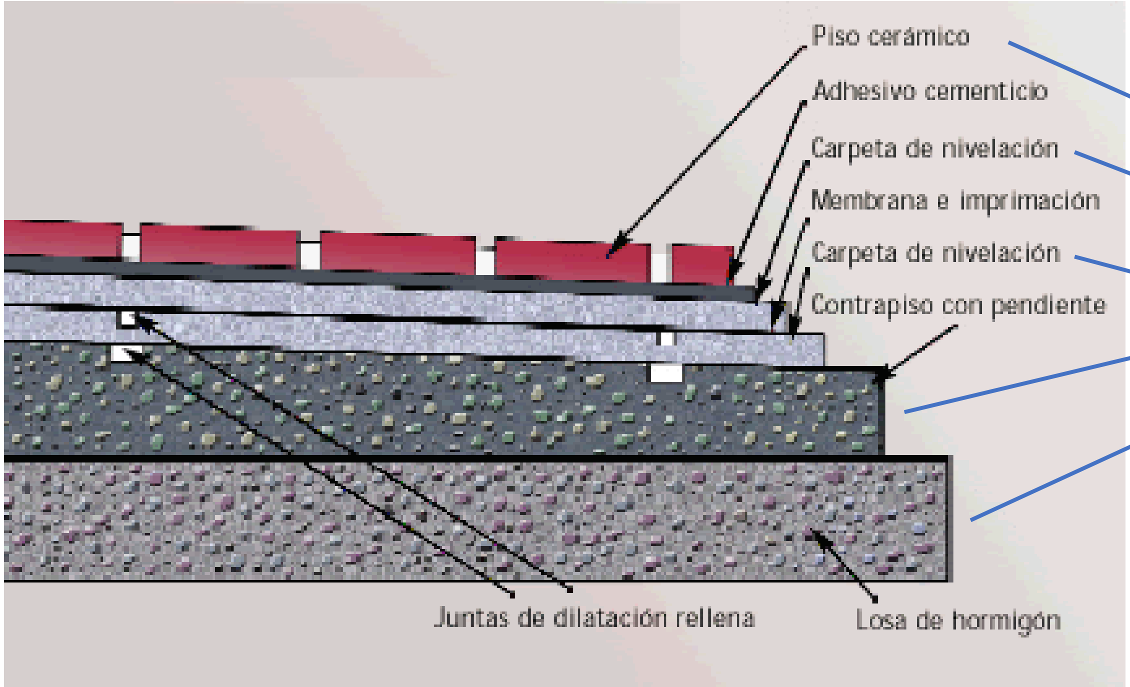
ETC

Ejemplos de Fuerzas distribuidas

Peso propio

Tomamos en cuenta el peso específico γ de cada material
Y El espesor de cada elemento que compone la azotea

$$q = \gamma \cdot e$$



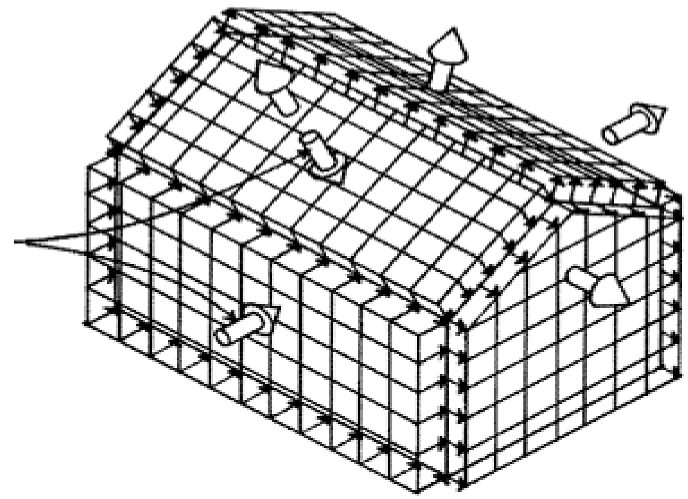
γ (ton/m^3)	e (m)	q (ton/m^2)
2,3	0,012	0,0276
1,8	0,02	0.036
1,6	0,02	0.032
1,8	0,15	0,27
2,4	0.12	0,288

q = 0,65 ton/m^2

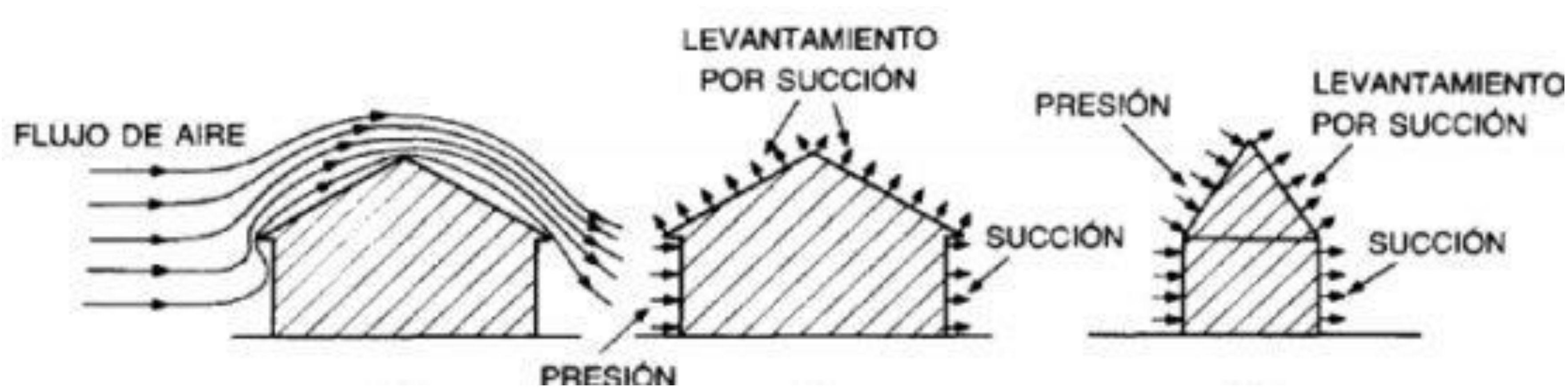
Ejemplos de Fuerzas distribuidas

Cargas de nieve o viento

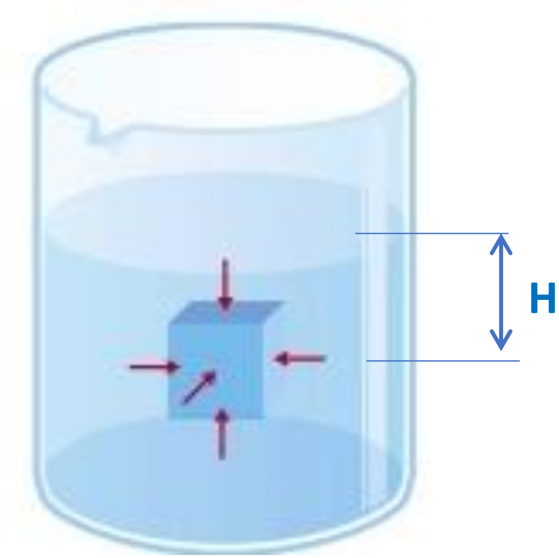
Se expresan también en unidades de fuerzas / sup



Viento sobre paredes y cubierta de una edificación. Efecto Estático.



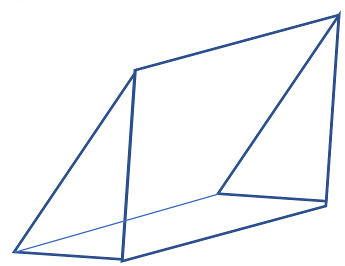
Ejemplos de fuerzas distribuidas
Empuje hidrostático sobre superficies planas

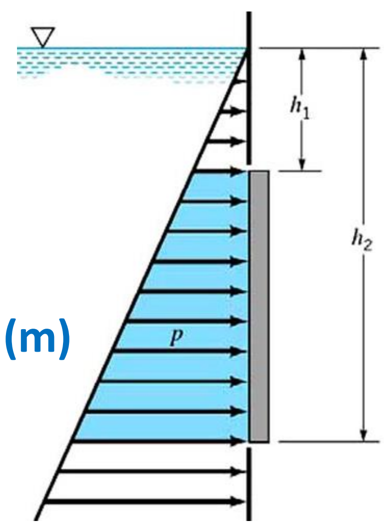


$q = \gamma_w$ (ton/m^3) . H (m)

Cual es el peso específico del agua ?
1 litro = 1 dm3 pesa
1 kg
1000 litros = 1 m3 y pesarán
1 ton

$\gamma_w = 1$ ton/m^3

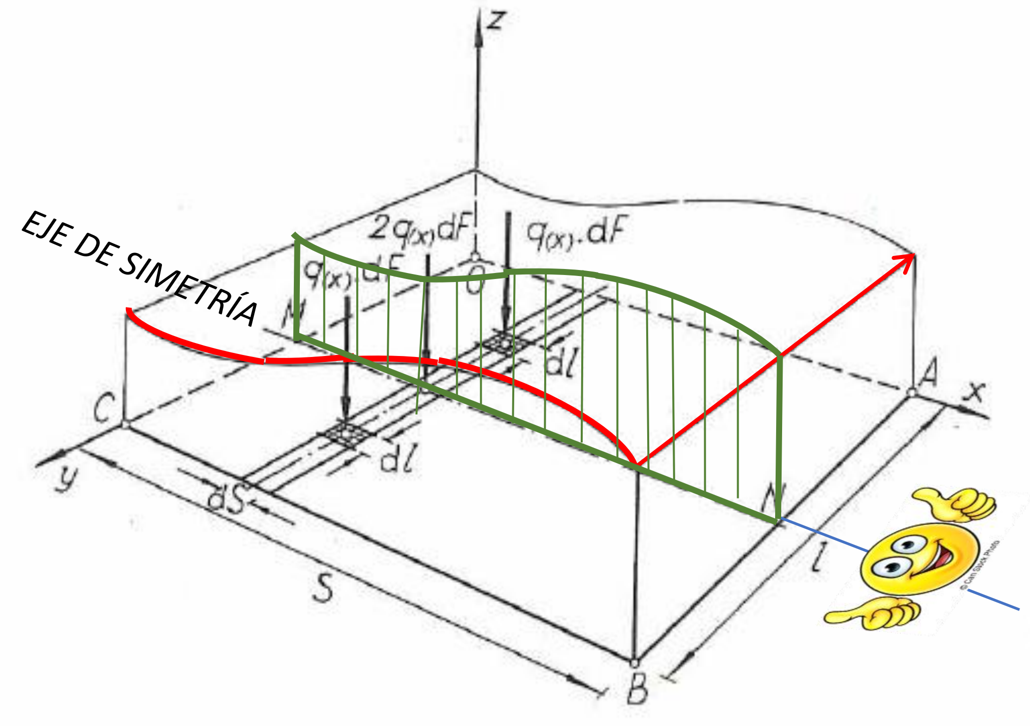




q (ton/m^2) $= \gamma_w$ (ton/m^3) . H (m)

1.2 Fuerzas paralelas distribuidas a lo largo de una línea

$$dF = ds \cdot dl$$



$$q\,(s)\ tiene\ unidades\ de\ \frac{fuerza}{superficie}$$

$$dP = \int_0^l q(s) \cdot ds\ \cdot dl$$

Como $q\,(s)$ *es constante en* l:

$$dP = q\,(s) \cdot \int_0^l dl\ \cdot d\,s =$$

$$= q\,(s) \cdot l\ \cdot ds$$

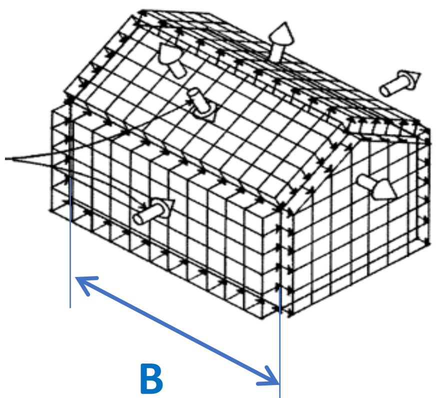
$$\frac{dP}{ds} = q\,(s) \cdot l = p\,(s)$$

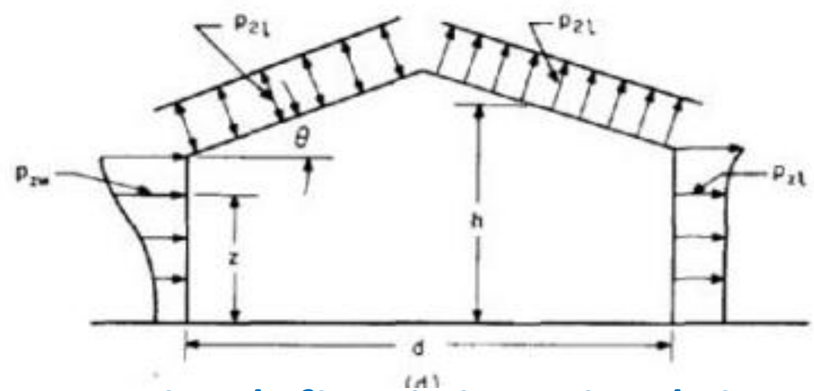
$$p\,(s)\ tiene\ unidades\ de\ \frac{fuerza}{longitud}\,!$$

1.2 Fuerzas paralelas distribuidas a lo largo de una línea

Ejemplos de aplicación

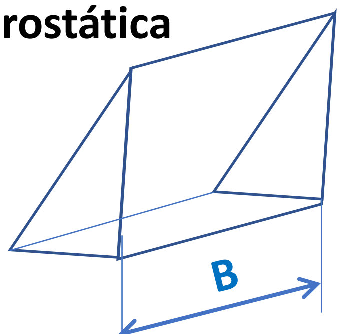
VIENTO





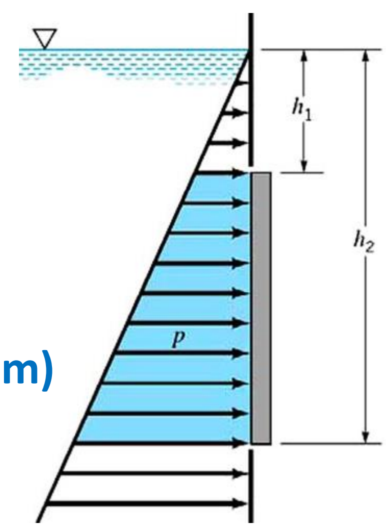
q_v (ton/m^2) . B (m) = p_v (ton/m)

Carga Hidrostática



q (ton/m^2) $=\gamma_w$ (ton/m^3) . H (m)

p (ton/m) = q . B



Y si hacemos B=1 ?

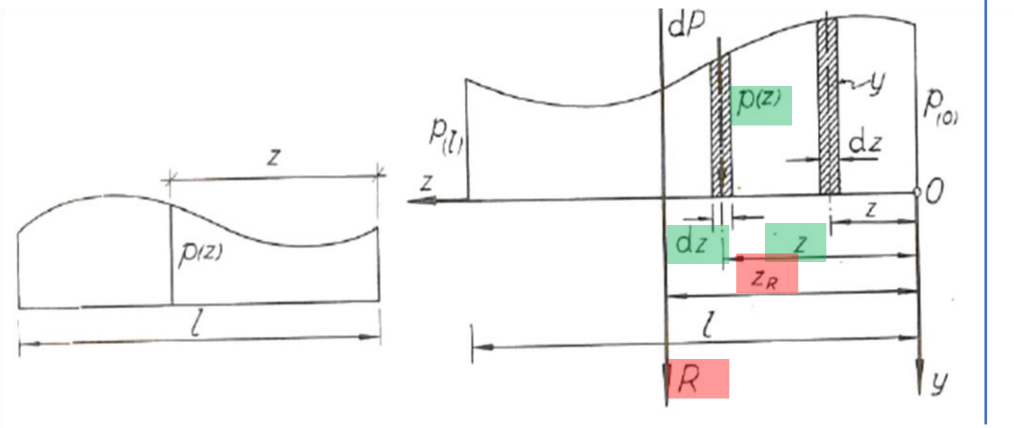
En ese caso

|p| = |q|

p puede interpretarse como una carga por unidad de ancho (por ejemplo Ton /m/m), Todos los resultados que obtengamos de trabajar con las cargas tipo p podemos multiplicarlas por el ancho B real para obtener los resultados totales.

1.3 Resultante de una fuerza distribuida sobre una línea.

$$\sum_{1}^{n} H_i = Rz \qquad \sum_{1}^{n} V_i = Ry \qquad \sum_{1}^{n} M^o{}_i = MR$$



En este caso:

$$\sum_{1}^{n} H_i = Rz$$ Idénticamente nula. 0 = 0

Pero la segunda ecuación:

$$\sum_{1}^{n} V_i = Ry$$ Se transforma en:

$$\boxed{\int_0^l \underbrace{p(z)\cdot dz}_{\text{Fuerza elemental. Ejemplo: (KN/m x m)}} = R}$$

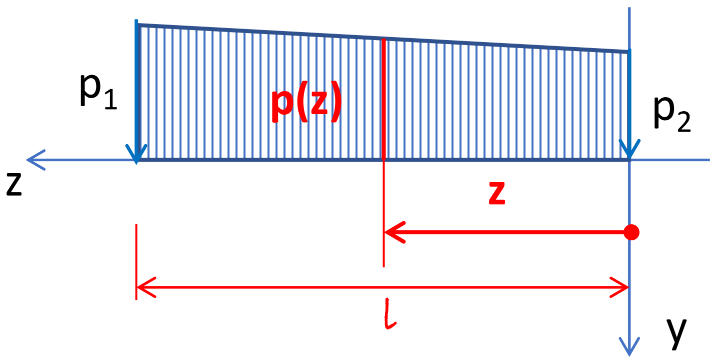
La tercera ecuación nos proporciona la distancia al origen de R, quedando esta unívocamente definida

$$\sum_{1}^{n} M^o{}_i = MR$$

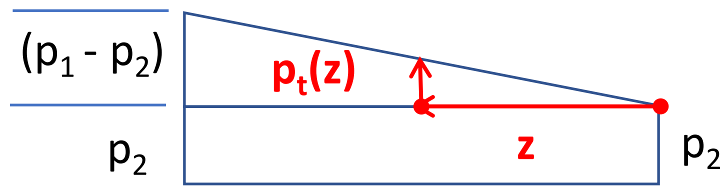
$$\int_0^l p(z)\cdot z\cdot dz = R\cdot z_R \longrightarrow \boxed{z_R = \frac{\int_0^l p(z)\cdot z\cdot dz}{\int_0^l p(z)\cdot dz}}$$

Hemos obtenido R y un punto de su Recta de acción.

1.3 Resultante de una fuerza distribuida sobre una línea.
Ejemplo: Carga trapezoidal



Cual es la ecuación de la función p(z) ?



Por proporción de triángulos:

$$\frac{(p_1 - p_2)}{l} = \frac{p_t(z)}{z} \longrightarrow p_t(z) = \frac{(p_1 - p_2)\cdot z}{l}$$

Si sumamos a $p_t(z)$ el valor constante de p_2 obtenemos p(z):

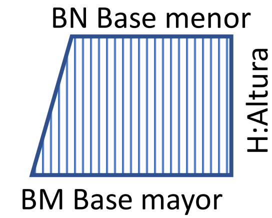
$$p(z) = \frac{(p_1 - p_2)\cdot z}{l} + p_2$$ Función lineal

$$R = \int_0^l p(z)\cdot dz = \int_0^l \left[\frac{(p_1 - p_2)\cdot z}{l} + p_2\right]\cdot dz = \left(\frac{(p_1 - p_2)}{2l}\cdot z^2 + p_2 \cdot z\right)\Big|_0^l$$

$$R = \frac{(p_1 - p_2)}{2l}\cdot l^2 + p_2 \cdot l = \frac{p_1 \cdot l}{2} - \frac{p_2 \cdot l}{2} + p2 \cdot l = \frac{(p_1 + p_2)\cdot l}{2}$$

$$\boxed{R = \frac{(p_1 + p_2)\cdot l}{2}}$$

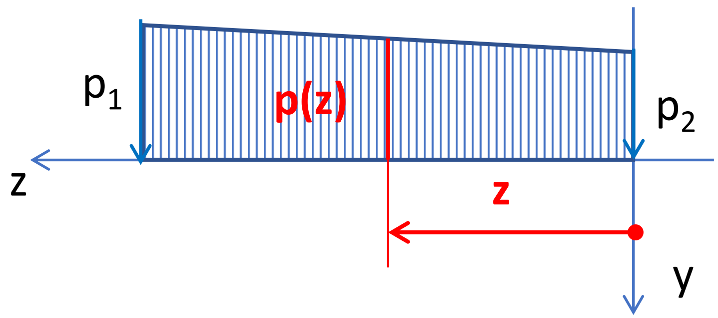
Superficie del trapecio !!



$$Sup = \frac{(BM + BN)\cdot H}{2}$$

1.3 Resultante de una fuerza distribuida sobre una línea.

Ejemplo: Carga trapezoidal



Nos falta conocer z_R !

$$p(z) = \frac{(p_1 - p_2)\cdot z}{l} + p_2$$

$$z_R = \frac{\int_0^l p(z)\cdot z\cdot dz}{\int_0^l p(z)\cdot dz}$$

Es R !!

$$R = \frac{(p_1 + p_2)\cdot l}{2}$$

$$z_R = \frac{\int_0^l p(z)\cdot z\cdot dz}{R} = \frac{\int_0^l \left[\frac{(p_1 - p_2)\cdot z^2}{l} + p_2\cdot z\right]\cdot dz}{R}$$

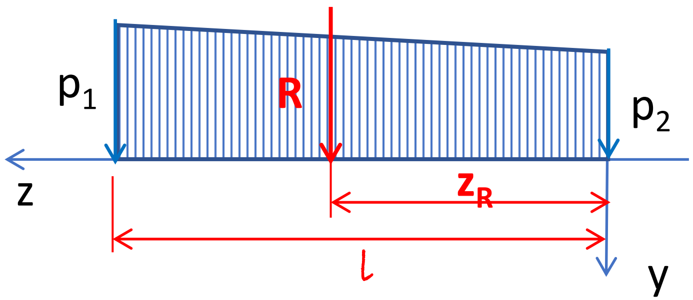
$$z_R = \frac{\left[\frac{(p_1 - p_2)\cdot z^3}{3\cdot l} + p_2\cdot z^2/2\right]_0^l}{R} = \frac{\left[\frac{(p_1 - p_2)\cdot l^2}{3} + \frac{p_2\cdot l^2}{2}\right]}{\frac{(p_1 + p_2)\cdot l}{2}}$$

$$z_R = \frac{\left[\frac{p_1\cdot l}{3} - \frac{p_2\cdot l}{3} + \frac{p_2\cdot l}{2}\right]}{\frac{(p_1 + p_2)}{2}} = \frac{\frac{2\cdot p_1\cdot l}{3} + \frac{2\cdot p_2\cdot l}{6}}{(p_1 + p_2)} = \left[\frac{2\cdot p_1 + p_2}{(p_1 + p_2)}\right]\cdot\frac{l}{3}$$

$$\boxed{z_R = \left[\frac{2\cdot p_1 + p_2}{(p_1 + p_2)}\right]\cdot\frac{l}{3}}$$

Distancia de R a la ordenada "p2"

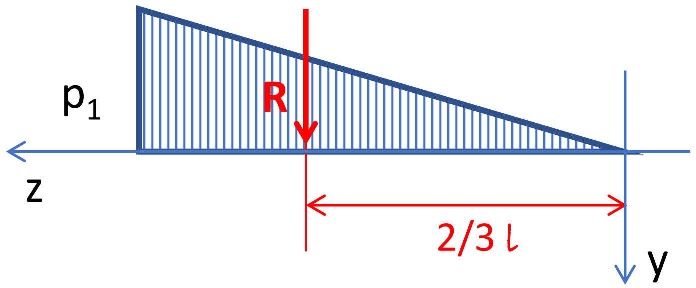
1.3 Resultante de una fuerza distribuida sobre una línea.
Ejemplo: Carga trapezoidal – Casos especiales



$$R = \frac{(p_1 + p_2) \cdot l}{2}$$

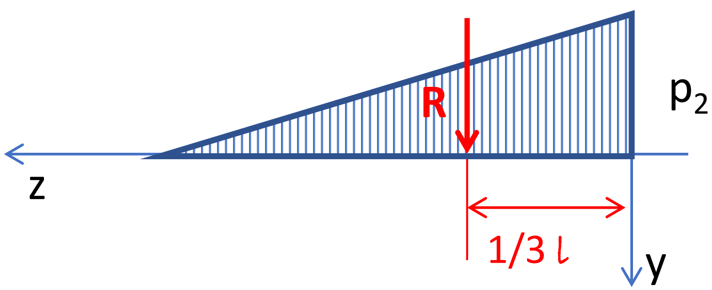
$$z_R = \left[\frac{2 \cdot p_1 + p_2}{(p_1 + p_2)}\right] \cdot \frac{l}{3}$$

Dado que R es un sistema equivalente a la carga distribuida, el momento de R con respecto a cualquier punto es igual al momento de toda la carga distribuida con respecto al mismo punto (Varignon). z_R es entonces la distancia al baricentro de la figura geométrica correspondiente a la carga distribuida con respecto al punto correspondiente a la ordenada p_2. Podemos llamar a z_R como z_G



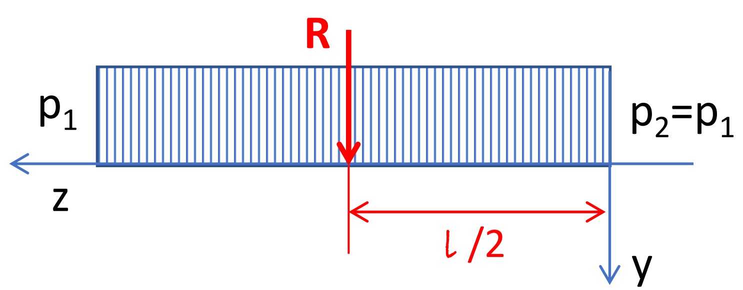
$$R = \frac{p_1 \cdot l}{2}$$

$$z_G = 2 \cdot \frac{l}{3}$$



$$R = \frac{p_2 \cdot l}{2}$$

$$z_G = \frac{l}{3}$$



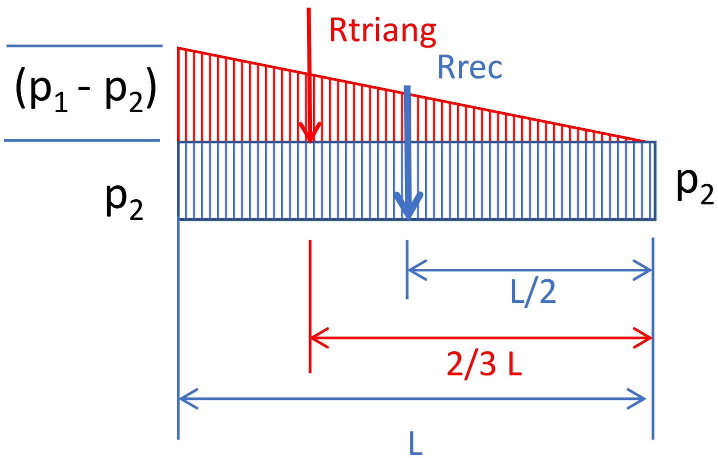
$$p_1 = p_2 = p$$

$$R = p \cdot l$$

$$z_G = \frac{l}{2}$$

1.3 Resultante de una fuerza distribuida sobre una línea.

Ejemplo: Carga trapezoidal como suma de carga uniforme + carga triangular



$$R\,rec = p2 \cdot L$$

$$R\,triang = (p1 - p2) \cdot L/2$$

$$\boxed{R = \frac{(p_1 + p_2) \cdot l}{2}}$$

$$R \cdot zG = R_{\,rec} \cdot l/2 + R_{\,triang} \cdot 2l/3$$

Varignon ..

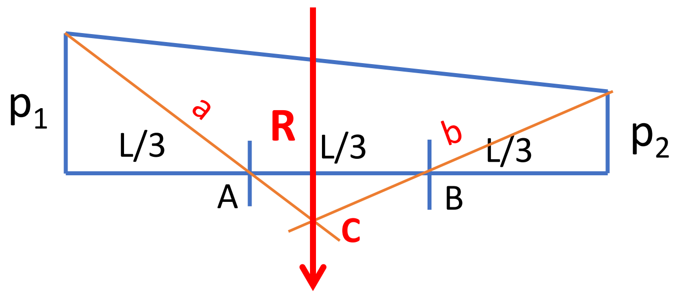
$$\left[\frac{(p_1+p_2)\cdot L}{2}\right] \cdot zG = p_2 \cdot L \cdot L/2 + (p_1 - p_2) \cdot L/2 \cdot 2L/3$$

$$z_G = \frac{p_2 \cdot \frac{L^2}{2} + (p_1 - p_2) \cdot L^2/3}{\frac{(p_1+p_2)\cdot L}{2}} = \frac{p_2 \cdot L + 2 \cdot p_1 \cdot L/3 - 2 \cdot p_2 \cdot L/3}{(p_1 + p_2)} = \frac{2 \cdot p_1 \cdot L/3 + p_2 \cdot L/3}{(p1 + p2)}$$

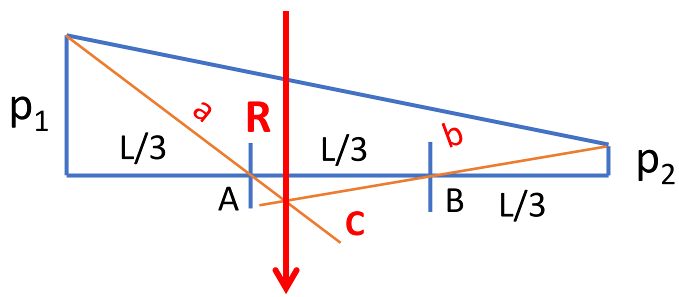
$$\boxed{z_G = \left[\frac{2 \cdot p_1 + p_2}{(p_1 + p_2)}\right] \cdot \frac{L}{3}}$$

1.3 Resultante de una fuerza distribuida sobre una línea.

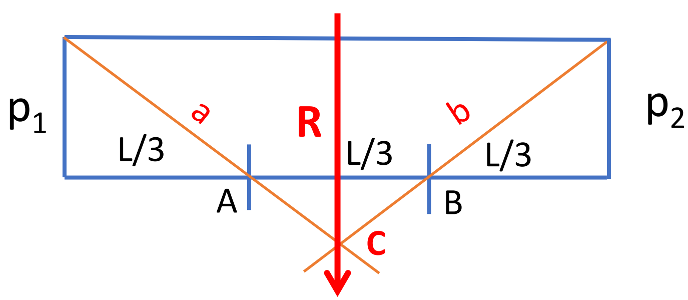
Ejemplo: Carga trapezoidal - Procedimiento gráfico



- Dividir L en tres segmentos iguales.
- Trazar las diagonales a y b pasantes por el extremo de las ordenadas de p_1 y p_2 y los puntos A y B.
- El punto C determinado por la intersección de las diagonales pertenece a la dirección de R.



- Cuando $p_2 \rightarrow 0$, C → A, Carga triangular



- Cuando $p_1 = p_2$ → A, Carga uniforme

FIN