FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Departamento de Estabilidad

64.04 | 64.05 | 84.05
Estática y Resistencia de Materiales
Teórica
Ing. Alfredo Corral

CLASE 3-B
SISTEMAS PLANOS VINCULADOS

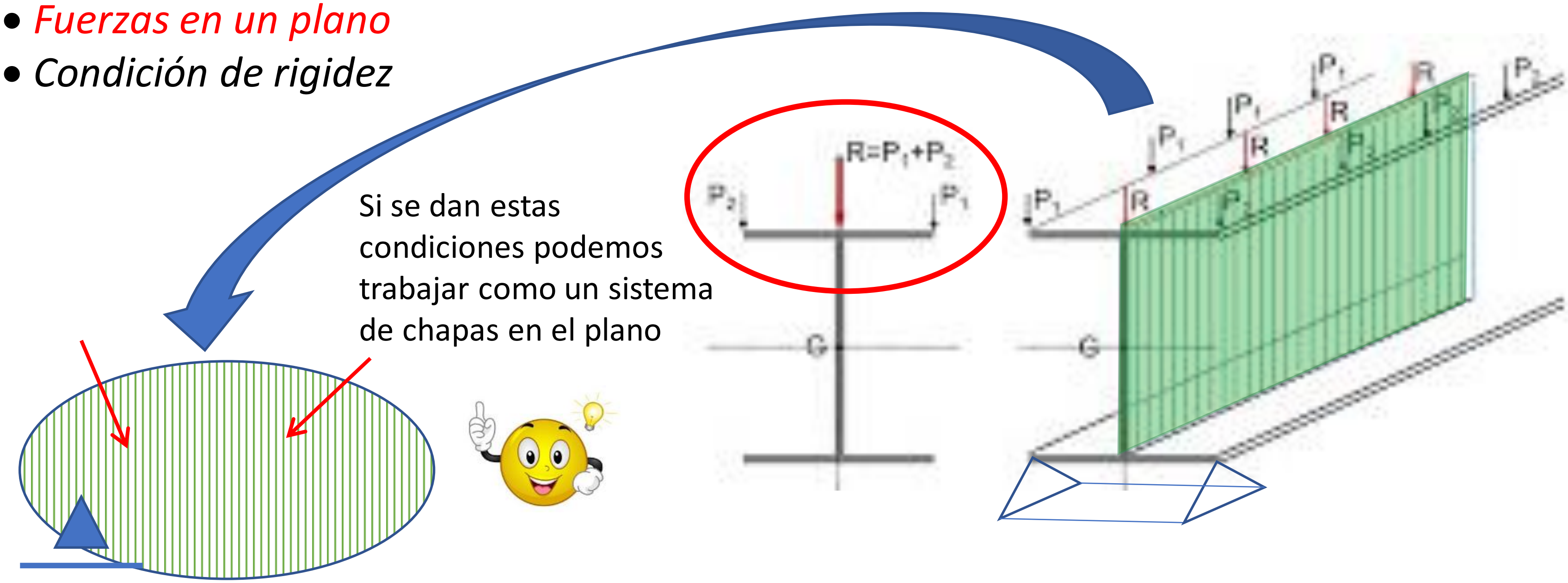
2. SISTEMAS PLANOS VINCULADOS
2.1 DEFINICIONES

Chapas

Entendemos por chapa al plano de simetría de una estructura en la cual actúan las resultantes de fuerzas iguales y simétricas, respecto de dicho plano de simetría.

Condiciones para que un cuerpo sea considerado como una chapa.

- *Plano de simetría. Geometría.*
- *Sustentación simétrica*
- *Fuerzas en un plano*
- *Condición de rigidez*

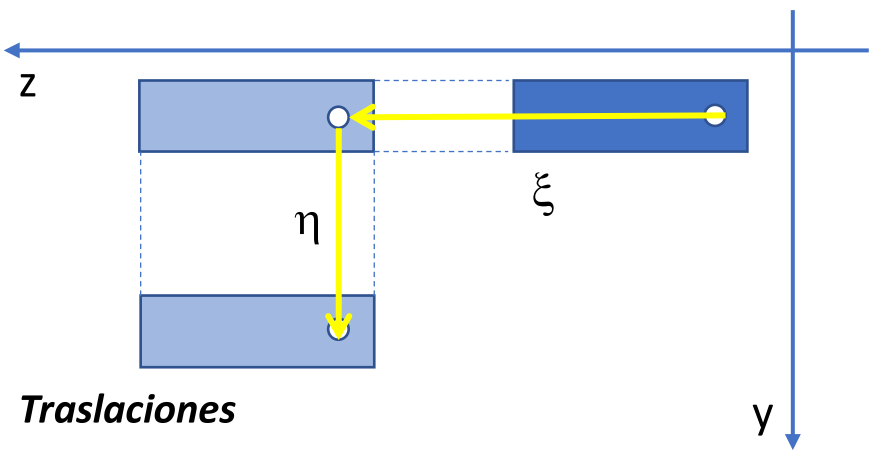


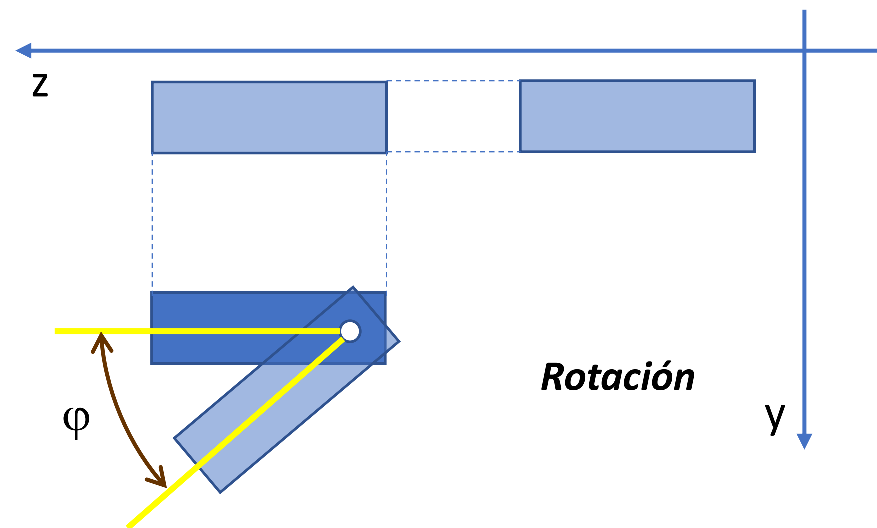
2. SISTEMAS PLANOS VINCULADOS
2.1 DEFINICIONES

Grados de libertad de un sistema plano

Entendemos por grados de libertad al número de coordenadas libres que posee un sistema.

Posibilidades de desplazamiento de una chapa en el plano.





Si consideramos la hipótesis de rigidez para esta chapa, el número de grados de libertad en el plano de la misma es TRES

Si definimos tres coordenadas generalizadas linealmente independientes, TODOS los puntos de la chapa quedan unívocamente definidos.

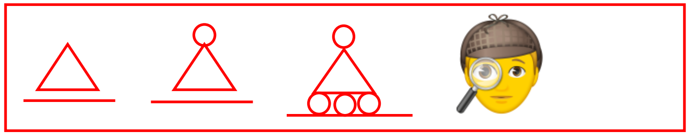
2. SISTEMAS PLANOS VINCULADOS

2.1 DEFINICIONES

VINCULO:

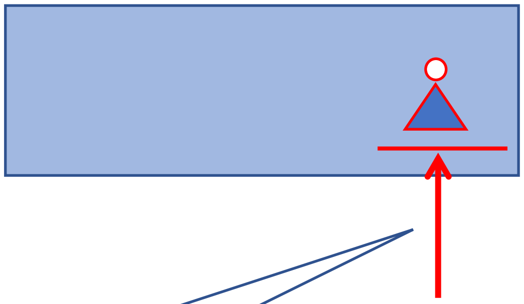
Toda condición geométrica que limite la posibilidad de movimiento de un cuerpo.

Vínculo de primera especie (vínculo móvil)



Que impide ?

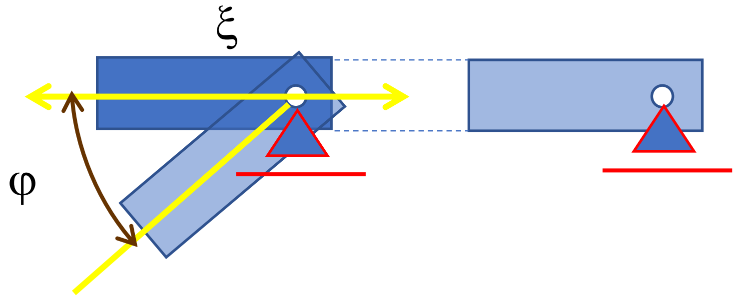
Impide el desplazamiento del punto en el que está aplicado el vínculo en la dirección indicada.



Como resultado de esta restricción al movimiento aparece una Reacción de vínculo en esa coordenada.

Que permite ?

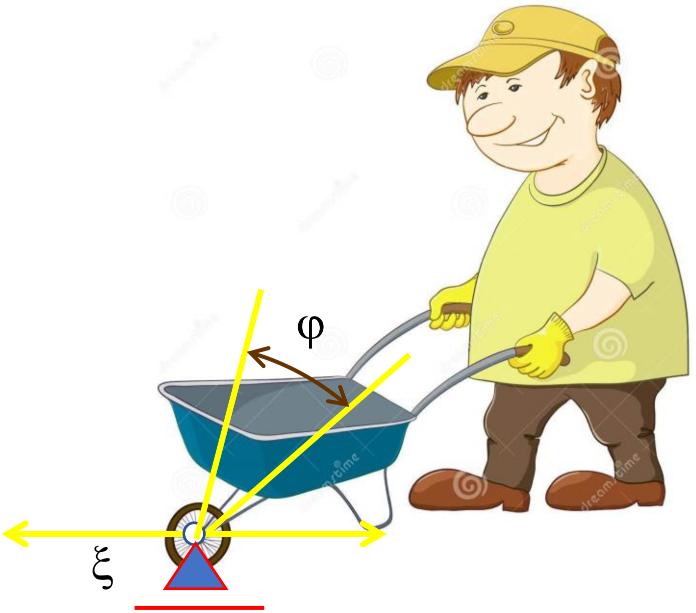
Un desplazamiento perpendicular a la dirección que restringe y también una rotación.

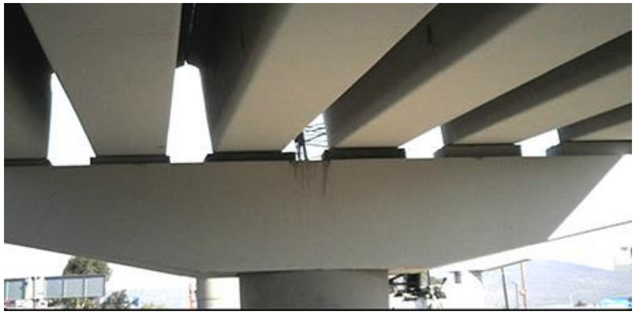


Un vínculo móvil restringe un grado de libertad.

2. SISTEMAS PLANOS VINCULADOS
2.1 DEFINICIONES
VINCULO MÓVIL – ALGUNOS EJEMPLOS

Apoyo de rodillos en puente de hormigón armado.



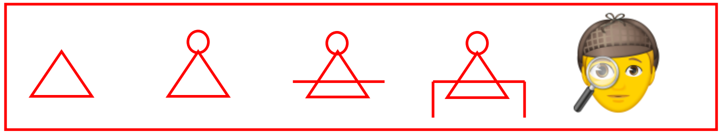


Apoyos de neopreno bajo vigas de una viaducto de hormigón pretensado / armado.

Apoyo de neopreno bajo viga metálica de un puente.

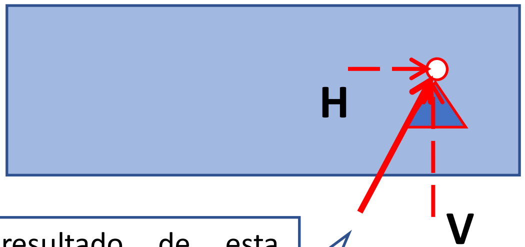
2. SISTEMAS PLANOS VINCULADOS
2.1 DEFINICIONES
VINCULOS:

Vínculo de segunda especie (vínculo fijo)



Que impide ?

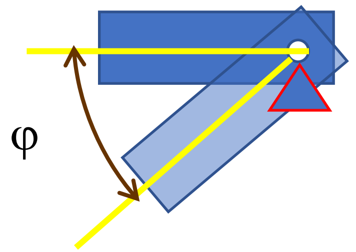
Impide el desplazamiento del punto en el que está aplicado el vínculo en cualquier dirección.



Como resultado de esta restricción al movimiento aparece una Reacción la cual puede tener cualquier dirección como resultado del plante de las ecuaciones de equilibrio del sistema plano vinculado.

Que permite ?

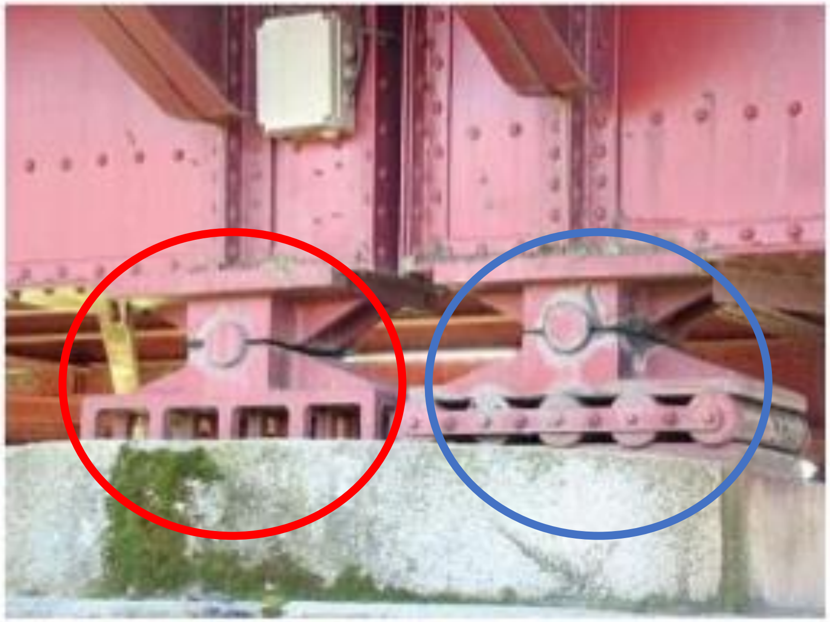
Una rotación en torno al punto en el que está aplicado el vínculo fijo.



Un vínculo fijo restringe dos grados de libertad.

2. SISTEMAS PLANOS VINCULADOS
2.1 DEFINICIONES
VINCULO FIJO – ALGUNOS EJEMPLOS

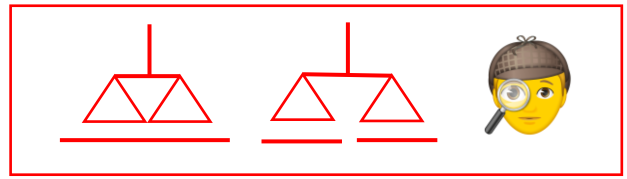
Vínculo fijo en una estructura de madera.



Vínculo **fijo** y **móvil** como apoyos para un puente metálico.

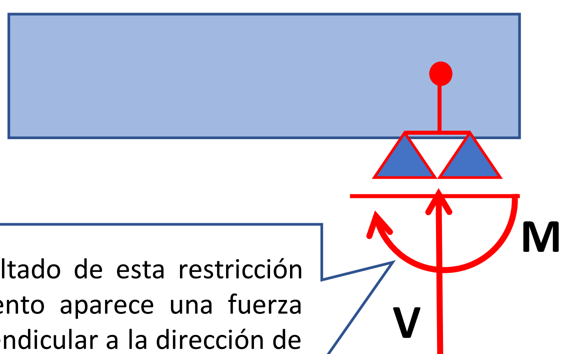
2. SISTEMAS PLANOS VINCULADOS
2.1 DEFINICIONES
VINCULOS:

Otro vínculo de segunda especie (empotramiento guiado)



Que impide ?

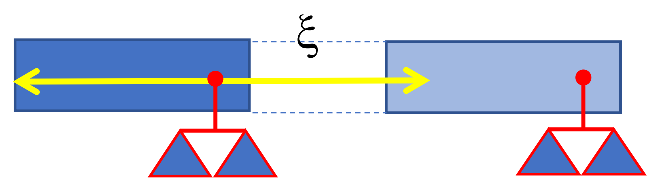
Impide el desplazamiento del punto en la dirección en que está aplicado el vínculo y el giro de la chapa en torno a ese punto



Como resultado de esta restricción al movimiento aparece una fuerza en la perpendicular a la dirección de desplazamiento permitida y un momento, como resultado del planteo de las ecuaciones de equilibrio del sistema plano vinculado.

Que permite ?

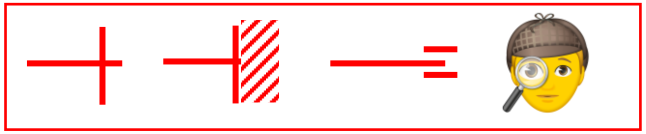
Solo un desplazamiento perpendicular a la dirección que restringe.



Este vínculo restringe dos grados de libertad.

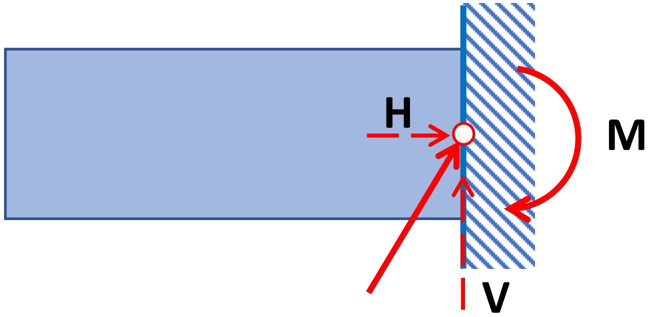
2. SISTEMAS PLANOS VINCULADOS
2.1 DEFINICIONES
VINCULOS:

Vínculo de tercera especie (Empotramiento)



Que impide ?

Impide el desplazamiento del punto en el que está aplicado el vínculo en cualquier dirección además de la rotación en torno al mismo punto.



Como resultado de aplicar esta vinculación, aparece una Reacción la cual puede tener cualquier dirección más un momento denominado "flexor", como resultado del planteo de las ecuaciones de equilibrio del sistema plano vinculado.

Que permite ?

El punto sobre le que se aplica el empotramiento no admite deplazamientos ni giro.

Un empotramiento restringe tres grados de libertad

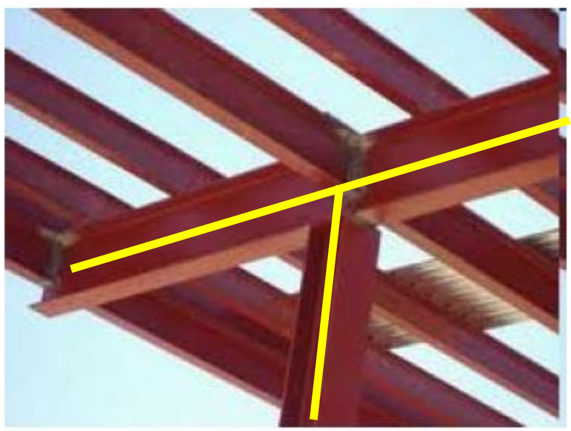
Entonces ??? 

Si disponemos en un cuerpo un empotramiento en un punto, todos los puntos del cuerpo quedarán fijos, dado que hemos demostrado que el número de grados de libertad de una chapa en el plano es tres !!

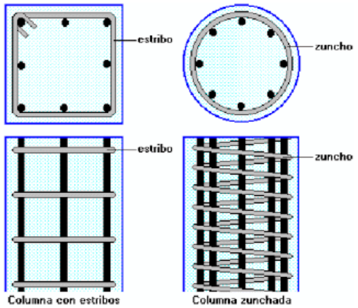
2. SISTEMAS PLANOS VINCULADOS

VIGA, COLUMNA → BARRA

Una barra es una chapa donde una de las dimensiones es mucho mayor que la otra.

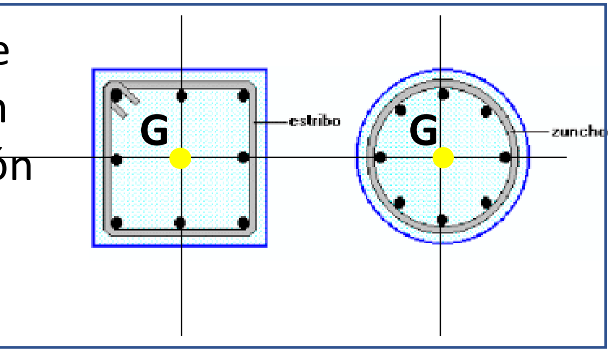


En general las vigas y columnas en las estructuras pueden reemplazarse por "barras"



Columnas de hormigón armado

En todos los casos el "eje de la barra" coincide con el baricentro de la sección transversal de la viga o columna.



2. SISTEMAS PLANOS VINCULADOS
CONCEPTOS DE HIPOESTATICIDAD – ISOESTATICIDAD - HIPERESTATICIDAD

HIPOESTÁTICO

g (número de grados de libertad) = 3
V = 1 (número de grados de libertad restringidos por la vinculación)
V < g → Estructura hipostática o MECANISMO

ISOSTÁTICO

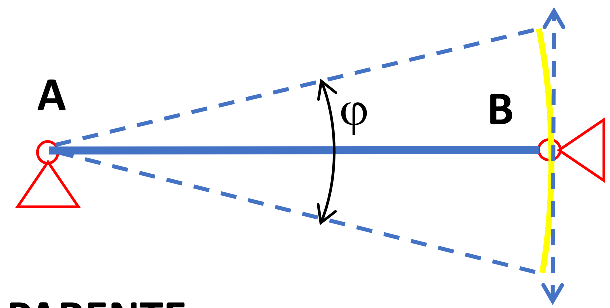
g (número de grados de libertad) = 3
V = 3 (número de grados de libertad restringidos por la vinculación)
V = g → Estructura isostática

HIPERESTÁTICO

g (número de grados de libertad) = 3
V = 6 (número de grados de libertad restrin
la vinculación)
V > g → Estructura hiperestática

2. SISTEMAS PLANOS VINCULADOS SUSTENTACIÓN DE UNA UNICA CHAPA O BARRA Y ANALISIS CINEMATICO.

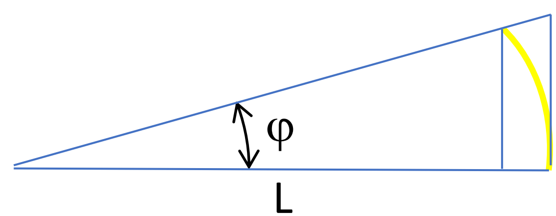
VIGA (BARRA) SIMPLEMENTE APOYADA



VINCULO APARENTE

LINEALIDAD GEOMÉTRICA → LINEALIDAD CINEMÁTICA

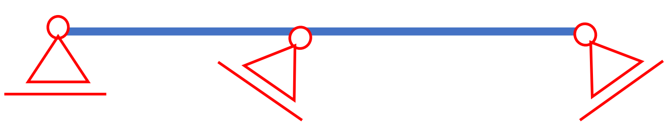
VIGA (BARRA) EN "VOLADIZO"



$$\eta = L \cdot \tan\varphi$$

$$si\ \varphi\ es\ muy\ pequeño, \tan\varphi \approx \varphi$$

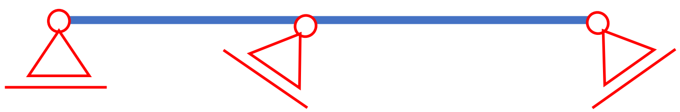
$$\boxed{\eta = L \cdot \varphi}$$



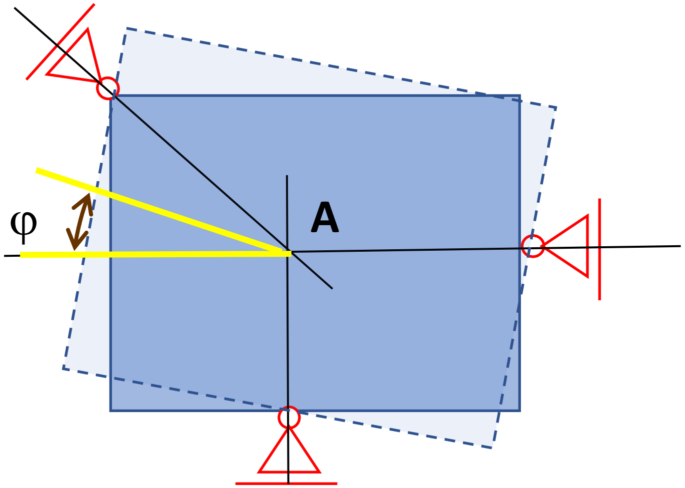
Analicemos con detenimiento este caso en la próxima diapositiva.

Es una recta en φ !!! Linealidad: La función se aproxima a la ecuación de una recta. Esto implica suponer que la barra al poder rotar en torno al punto A, el punto B tendrá un movimiento perpendicular al eje de la barra

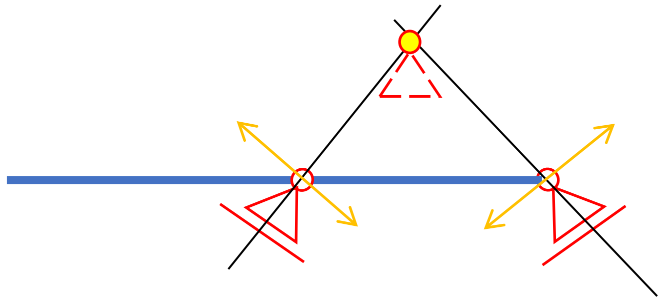
2. SISTEMAS PLANOS VINCULADOS
ANALISIS CINEMÁTICO DE UNA BARRA SUSTENTADA POR TRES VÍNCULOS MÓVILES



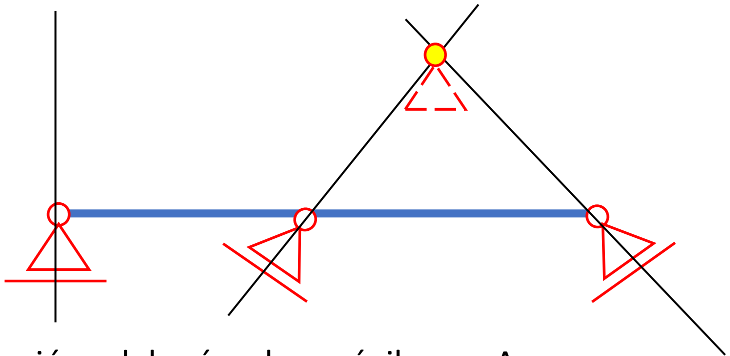
Que sucede si las tres direcciones se cortan en un mismo punto como el A?



La chapa puede girar en torno al punto fijo A

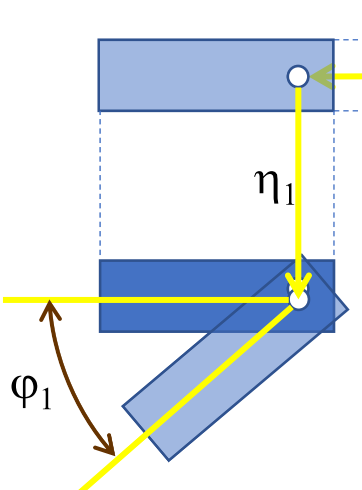


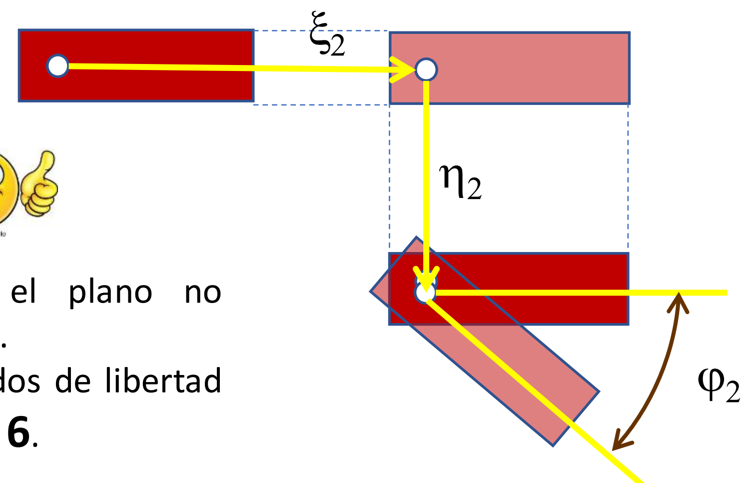
En la intersección de las rectas de restricción al movimiento de dos vínculos móviles obtenemos un punto. **Nuestra barra (o chapa) puede entonces girar con respecto a este punto.**



La dirección del vínculo móvil en A no pasa por la intersección de las direcciones de los ubicados en B y C
LA BARRA ESTÁ ISOSTÁTICAMENTE SUSTENTADA.

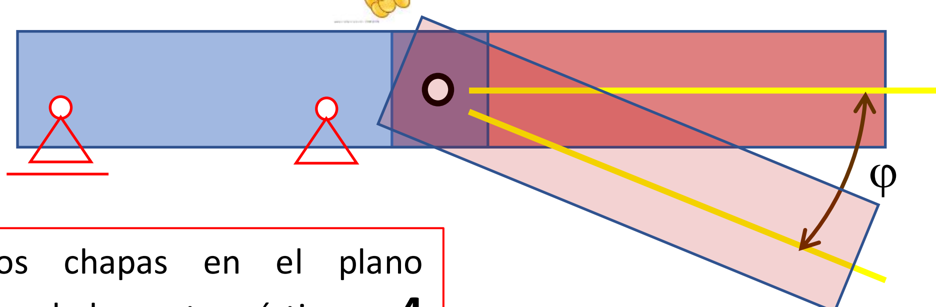
SISTEMAS PLANOS VINCULADOS - CADENAS CINEMÁTICAS



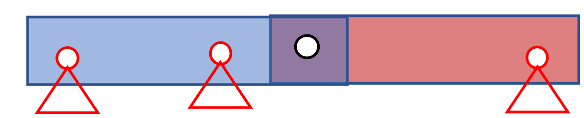


Dos chapas en el plano no vinculadas entre sí.
El número de grados de libertad de este sistema es **6**.

Articulación relativa !



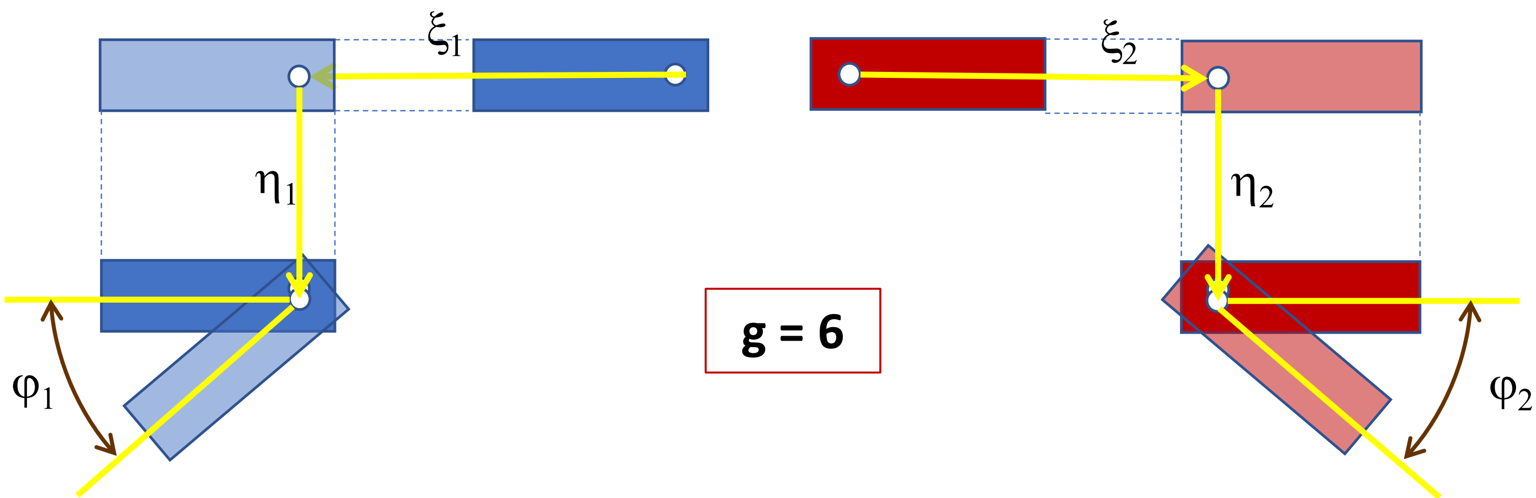
Dos chapas en el plano vinculadas entre sí tienen **4** grados de libertad.

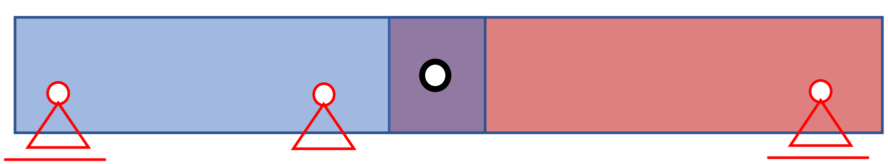


Con el agregado del vínculo móvil en la segunda chapa, la estructura está ISOSTATICAMENTE SUSTENTADA.

SIEMPRE VERIFICAR QUE NO EXISTA VINCULO APARENTE !

SISTEMAS PLANOS VINCULADOS - CADENAS CINEMÁTICAS
Determinación del número de grados de libertad de una cadena cinemática ABIERTA





g = 4

g = número de grados de libertad

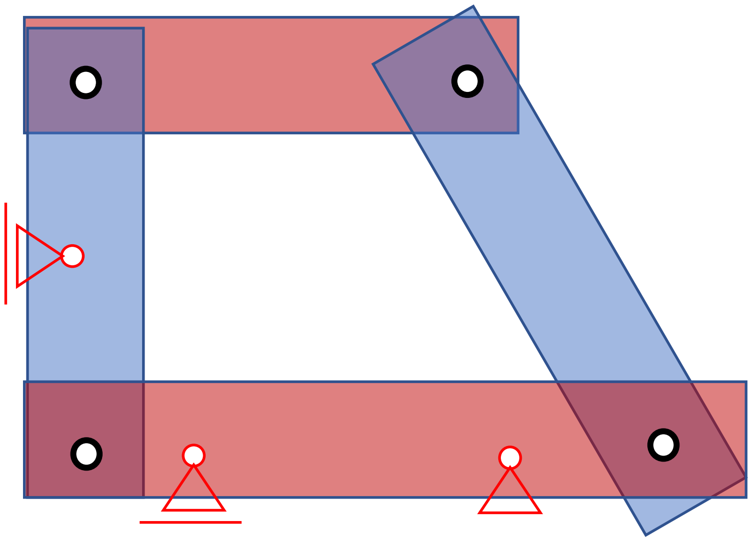
n= número de chapas

(n-1) = número de articulaciones

g = 3n – 2(n-1)

$$\boxed{g = n + 2}$$

SISTEMAS PLANOS VINCULADOS - CADENAS CINEMÁTICAS
Determinación del número de grados de libertad de una cadena cinemática CERRADA



g = número de grados de libertad

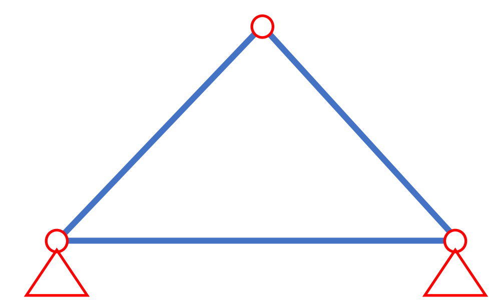
n= número de chapas

n = número de articulaciones

g = 3n – 2n = n

g = n

EL NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD COINCIDE CON EL NÚMERO DE CHAPAS



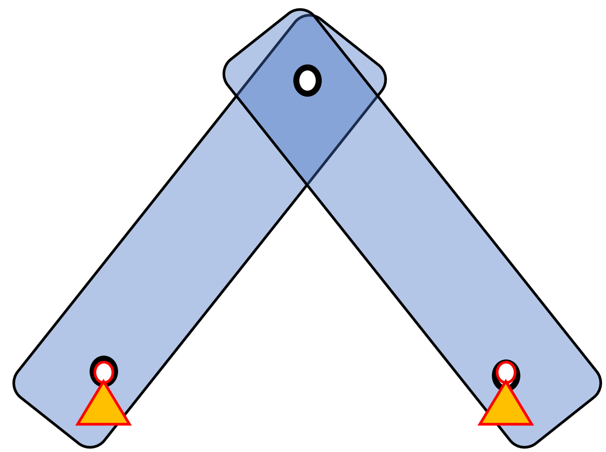
Un caso particular, de mucha aplicación en las estructuras.

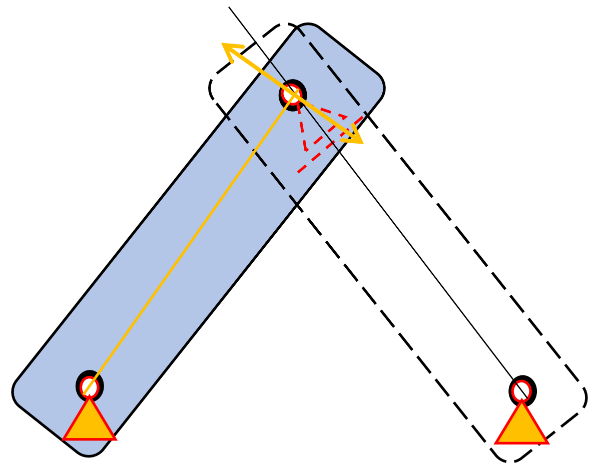
Que sucede si n=3 ?

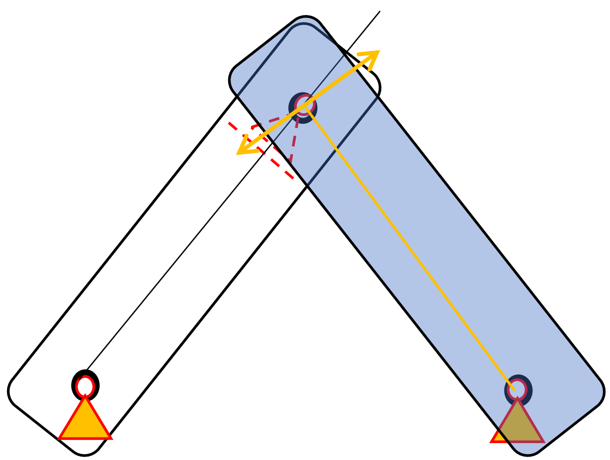
EL NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD DEL SISTEMA ES IGUAL AL DE UNA SOLA CHAPA ES DECIR 3

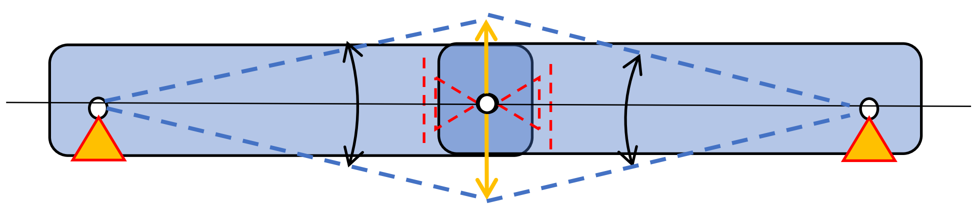
RETICULADOS

SISTEMAS PLANOS VINCULADOS – CADENA CINÉMATICA DE DOS CHAPAS
EL ARCO A TRES ARTICULACIONES







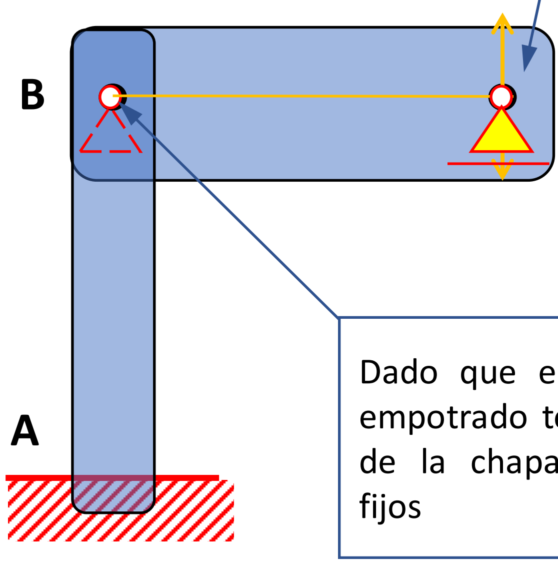


Para que en un arco a tres articulaciones no exista vínculo aparente es necesario que las articulaciones no se encuentren alineadas.

SISTEMAS PLANOS VINCULADOS – CADENA CINÉMATICA DE DOS CHAPAS

Análisis cinemático con otras sustentaciones

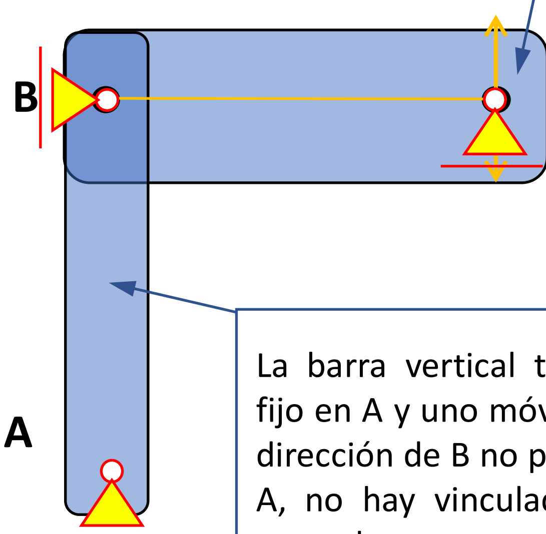
Como la dirección del vínculo móvil en C no pasa por B no hay vinculación aparente.



Dado que el punto A está empotrado todos los puntos de la chapa vertical están fijos

Empotramiento en A y un vínculo móvil en C.

Como la dirección del vínculo móvil en C no pasa por B no hay vinculación aparente.



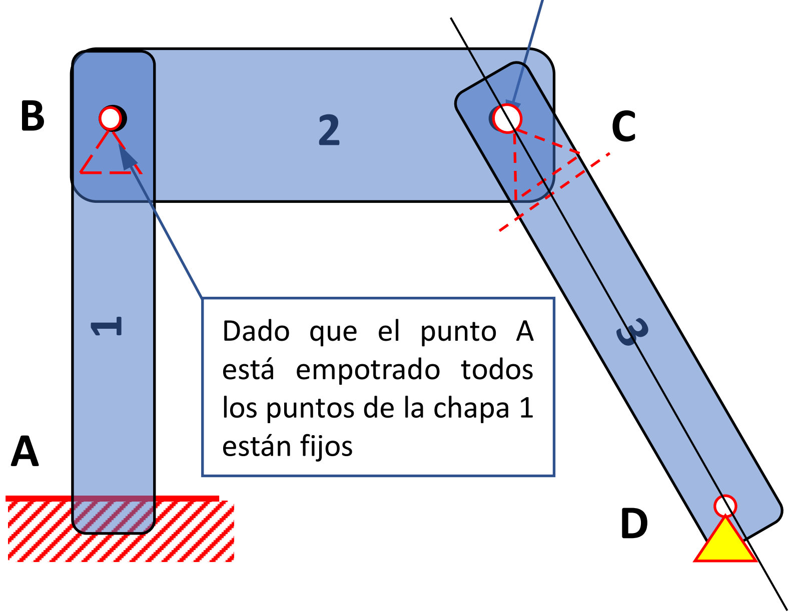
La barra vertical tiene un vínculo fijo en A y uno móvil en B. Como la dirección de B no pasa por el punto A, no hay vinculación aparente y por lo tanto se encuentra isostáticamente sustentada.

Fijo en A, móviles: horizontal en B y vertical en C.

SISTEMAS PLANOS VINCULADOS – CADENA CINÉMATICA ABIERTA DE TRES CHAPAS

Análisis cinemático. Ejemplo

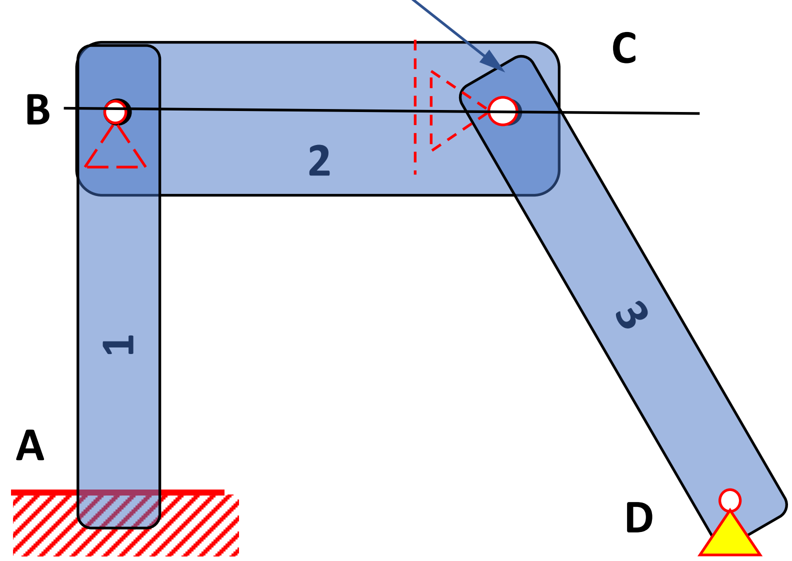
Como la dirección del vínculo móvil en C no pasa por B no hay vinculación aparente.



Dado que el punto A está empotrado todos los puntos de la chapa 1 están fijos

Análisis de isoestaticidad de la chapa 2.

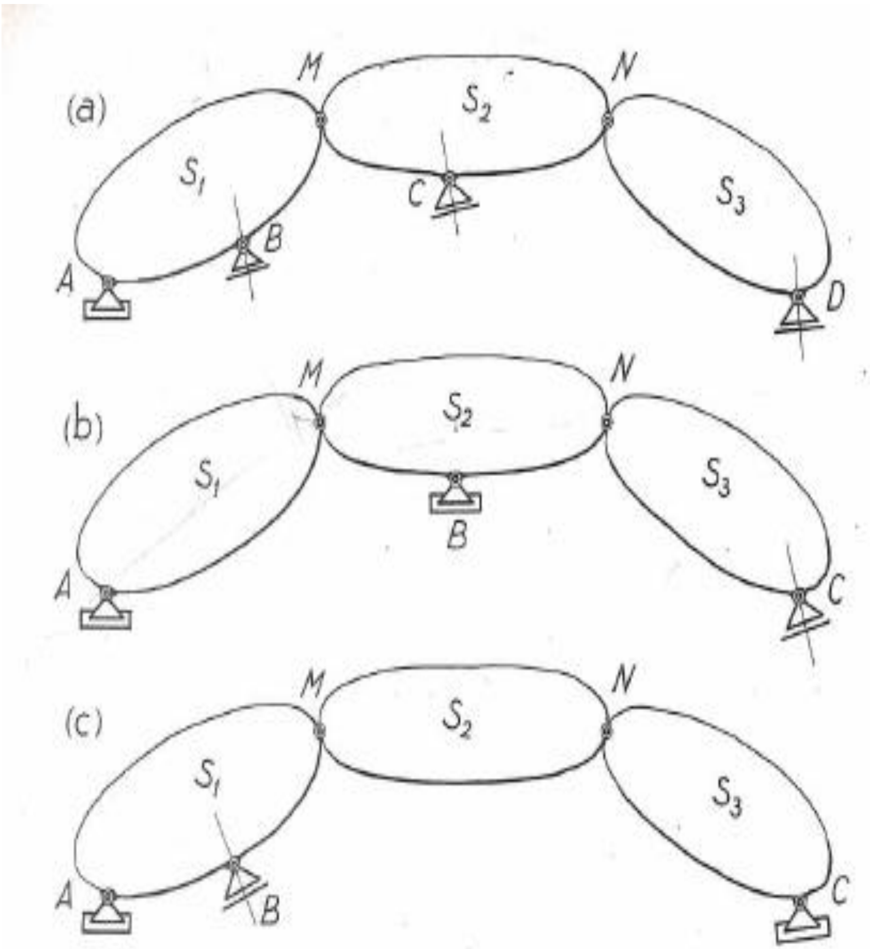
Dado que el punto B pertenece a la chapa 1 , este punto está fijo, por el empotramiento en A. Uniendo A con C obtenemos la dirección del vínculo móvil proporcionado para la barra inclinada. Como esta recta no pasa por D no hay vínculo aparente y la chapa 3 está isostáticamente sustentada.

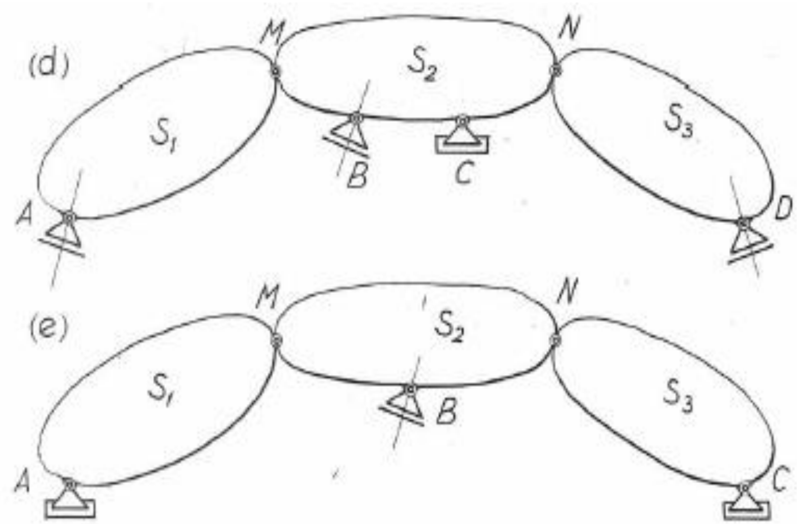


Análisis de isoestaticidad de la chapa 3.

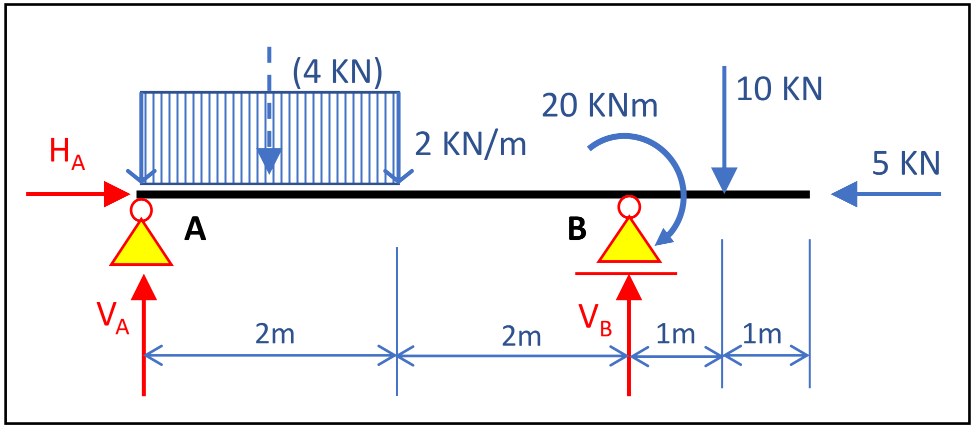
SISTEMAS PLANOS VINCULADOS – CADENA CINÉMATICA ABIERTA DE TRES CHAPAS

Análisis cinemático. Cinco ejercicios para hacer en casa.

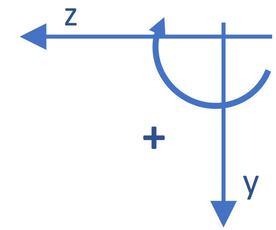




SISTEMAS PLANOS VINCULADOS – Resolución de una barra simplemente apoyada con voladizo – Cálculo de reacciones de vínculo.



$$\Sigma H_i = 0$$
$$\Sigma V_i = 0$$
$$\Sigma M_i = 0$$



$$\Sigma H_i = 0 \;\rightarrow\; \boldsymbol{-H_A + 5kN = 0\ (1)}$$

$$\Sigma V_i = 0 \rightarrow \boldsymbol{-V_A + 4\ kN - VB + 10\ kN = 0\ (2)}$$

$$\Sigma M_i^A = 0 \quad \boldsymbol{4kN \cdot 1m + 20kNm + 10kN \cdot 5m - V_B \cdot 4m = 0\ (3)}$$

$$74\ kNm - V_B \cdot 4m = 0 \qquad \boxed{V_B = \frac{74kNm}{4m} = \boldsymbol{18,5kN}}$$

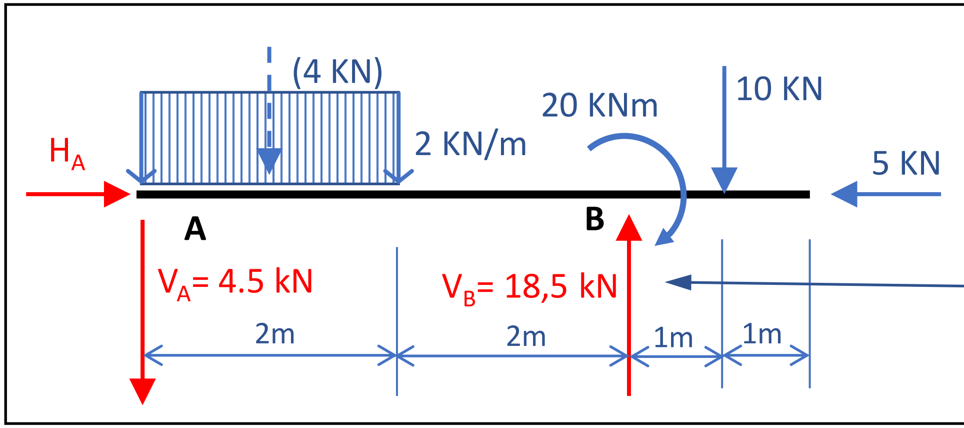
Reemplazando V_B en (2) $\rightarrow \boldsymbol{-V_A + 14\ kN - 18,5\ kN = 0} \rightarrow \boxed{V_A = \boldsymbol{-4,5kN}}$

El signo negativo significa que el sentido para V_A es contrario al adoptado primeramente de forma intuitiva.

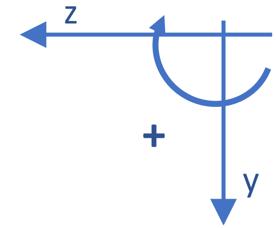
Finalmente de (1) despejamos H_A

$$\boldsymbol{H_A = 5kN}$$

SISTEMAS PLANOS VINCULADOS
Diagrama de cuerpo libre – Verificación de Reacciones de vínculo



$$\Sigma H_i = 0$$
$$\Sigma V_i = 0$$
$$\Sigma M_i = 0$$



En el diagrama de cuerpo libre, se ponen en evidencia las reacciones de vínculo, tras eliminar los grafismos que los representan.

A modo de verificación planteamos:

$$\Sigma M_i^B = 0 \;\rightarrow\; \Sigma M_i^B = -4{,}5KN \cdot 4m - 4kN \cdot 3m + 20kNm + 10kN \cdot 1m$$
$$\Sigma M_i^B = -18kNm - 12kNm + 20kNm + 10kNm = 0$$

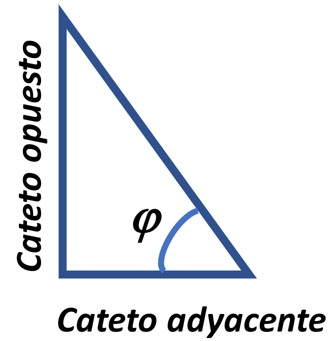
Que hemos resuelto ? 

Un problema de equilibrio de un sistema de fuerzas no concurrentes en el plano !

INTERVALO TRIGONOMÉTRICO !
Valores de seno y coseno de los ángulos más habituales

$$\cos\varphi = \frac{cateto\ adyacente}{Hipotenusa}$$

$$\text{sen}\,\varphi = \frac{cateto\ opuesto}{Hipotenusa}$$



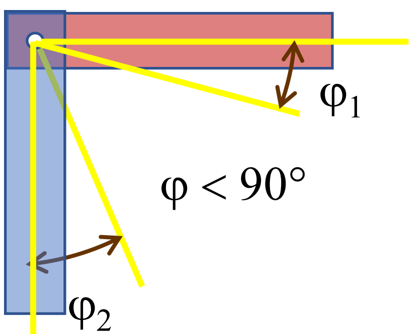
cos 0°	cos 30°	cos 45°	cos 60°	cos 90°
4	3	2	1	0
$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1/2$	**0**
1	**0.866**	**0.7071**	**0.5**	**0**

sen 0°	sen 30°	sen 45°	sen 60°	sen 90°
0	1	2	3	4
$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$
0	$1/2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**
0	**0.5**	**0.7071**	**0.866**	**1**

ARTICULACIÓN RELATIVA

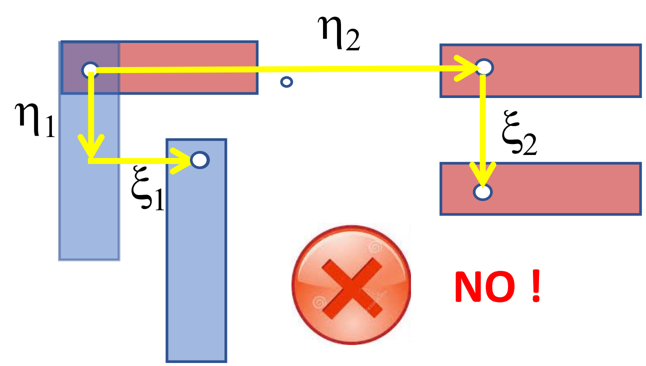
Que permite ?

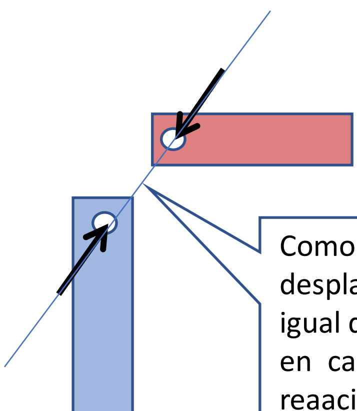
Una rotación relativa entre ambas chapas en el nodo de unión donde se encuentra la articulación.



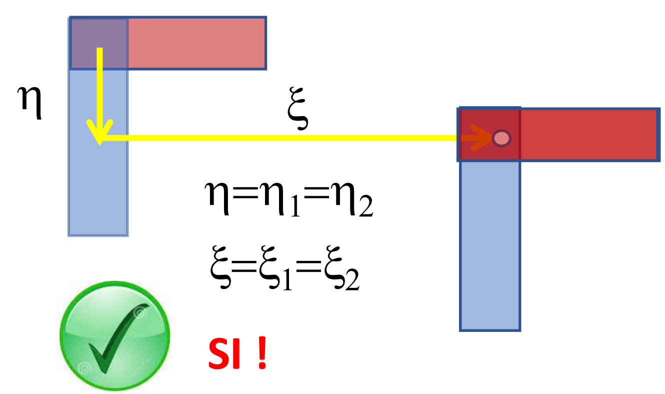
Que impide ?

Que el punto en el que está ubicada la articulación, perteneciente a ambas chapas pueda tener distintos deplazamientos horizontales o verticales.



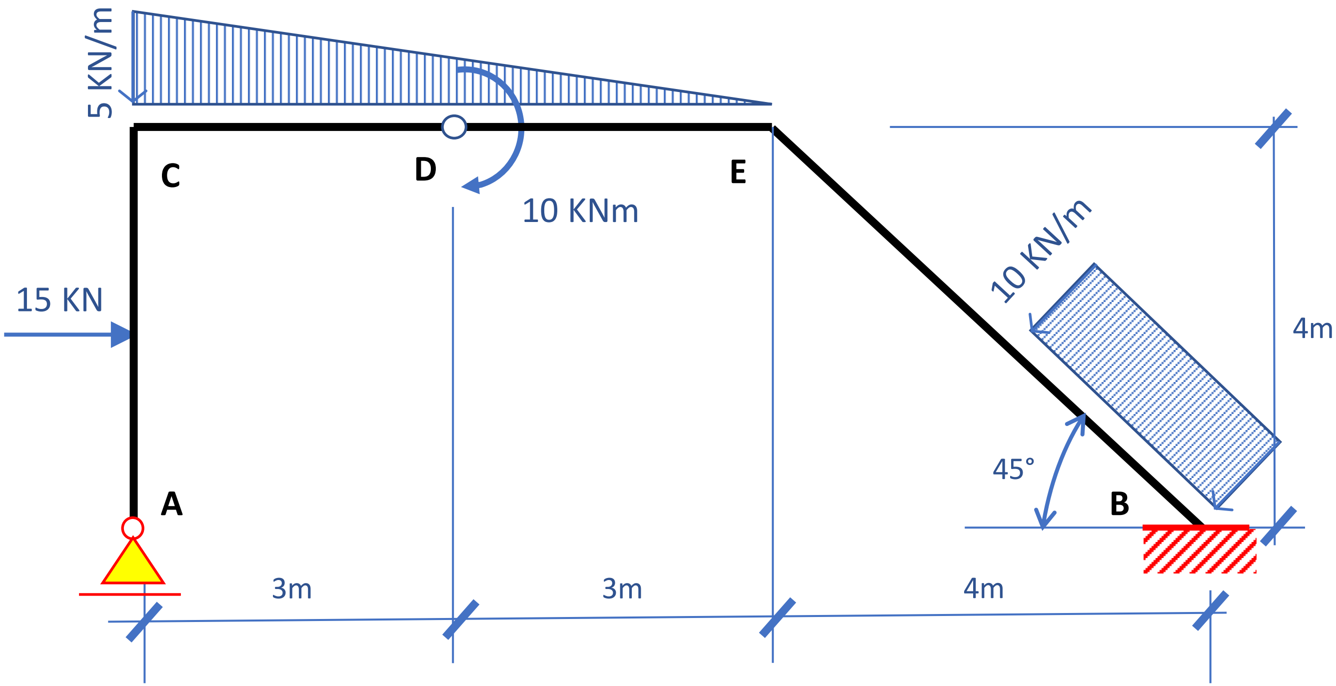


Como resultado de esta restricción a los desplazamientos relativos aparecen dos fuerzas, de igual direeción e intensidad y sentidos contrarios, una en cada chapa, siguiendo el principio de acción y reaación. .



RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA PLANO DE DOS CHAPAS ARTICULADAS

Cálculo de reacciones de vínculo.



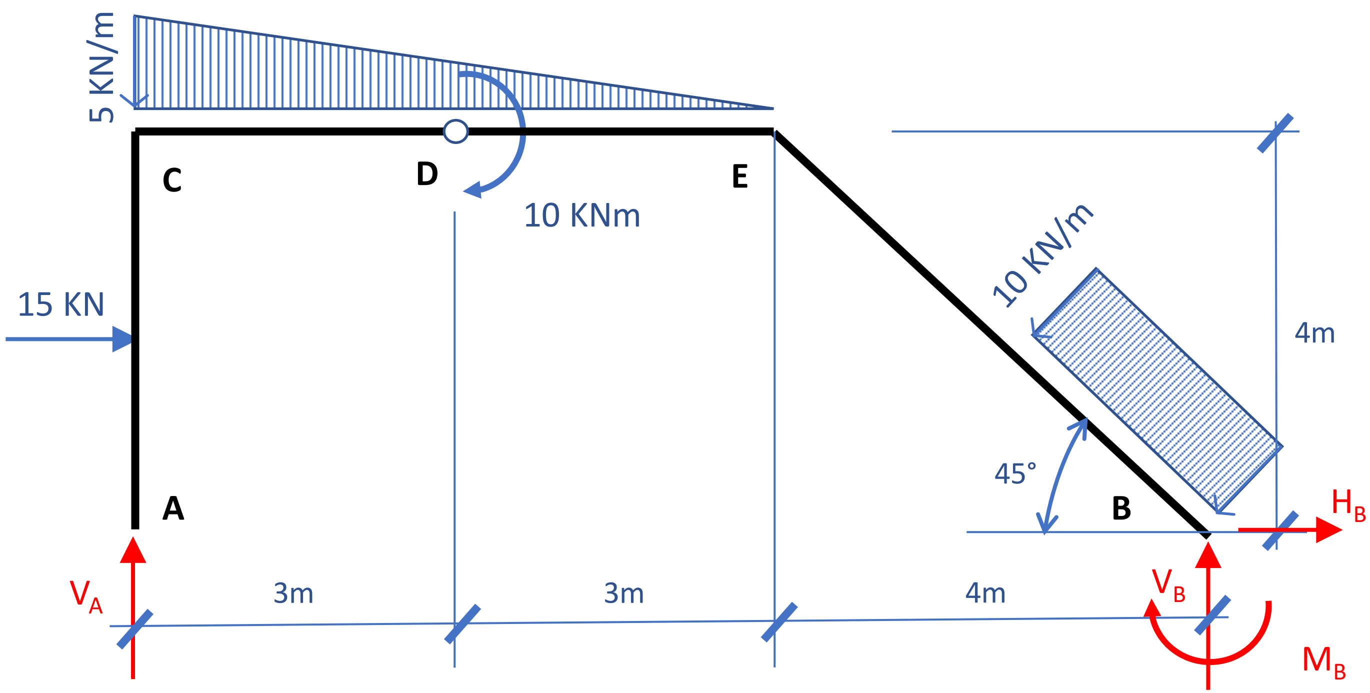
Número de barras (o chapas), n = 2

Número de grados de libertad, g = n + 2 = **4**

Número de incógnitas en reacciones de vínculo = 4

RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA PLANO DE DOS CHAPAS - PÓRTICO

Diagrama de cuerpo libre



Tenemos cuatro incógnitas y tres ecuaciones.

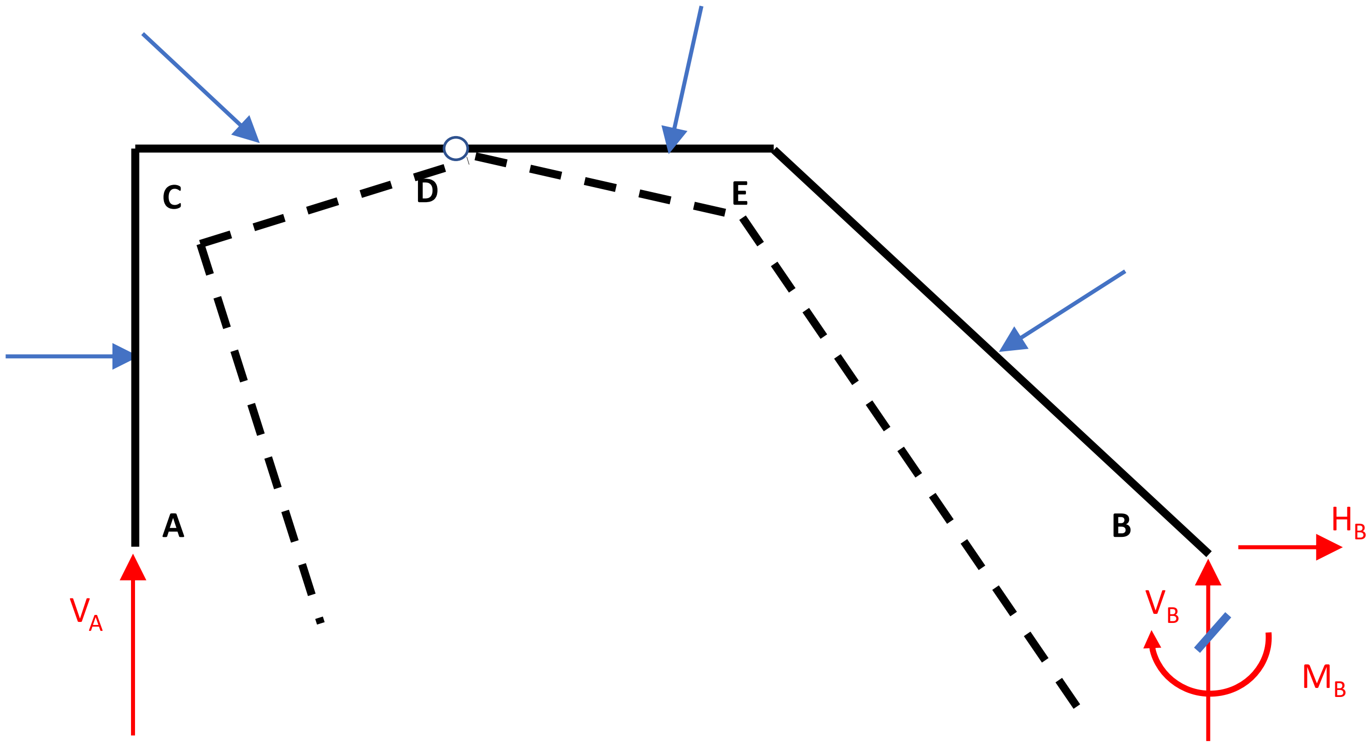
Necesitamos una ecuación más para resolver el problema !

Nuevamente tenemos un problema de resolución de un sistema plano de fuerzas no concurrentes.
Sistemas de ecuaciones que nos proporciona la estática, si analizamos el equilibrio como un todo.
Tres opciones de sistemas de ecuaciones:

$\Sigma H_i = 0$	$\Sigma H_i = 0$	$\Sigma M_i^A = 0$
$\Sigma V_i = 0$	$\Sigma M_i^A = 0$	$\Sigma M_i^B = 0$
$\Sigma M_i^B = 0$	$\Sigma M_i^B = 0$	$\Sigma M_i^C = 0$

RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA PLANO DE DOS CHAPAS - PÓRTICO

Diagrama de cuerpo libre



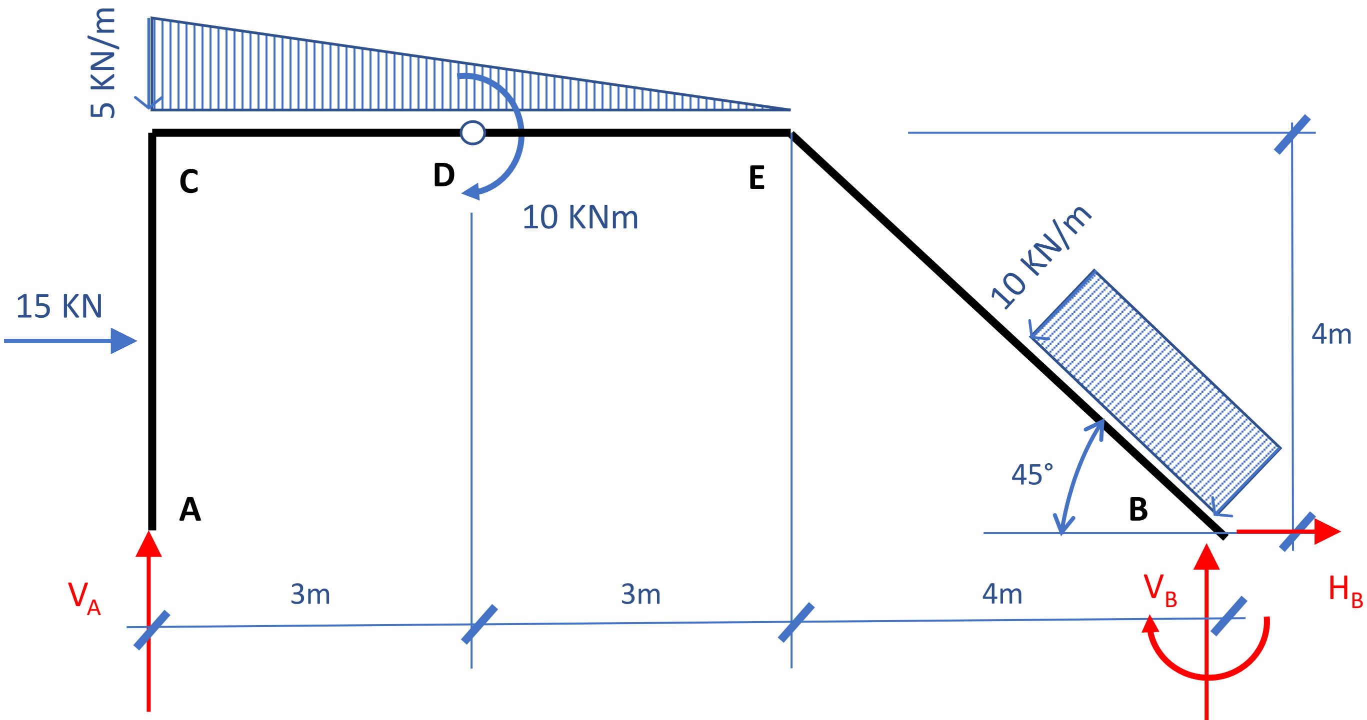
EL TODO Y LAS PARTES DEBEN ESTAR EN EQUILIBRIO

La suma de los momentos a un lado y al otro de la articulación con respecto al punto D (en este caso) deben ser nulas ya que la articulación es incapaz de transferir momento.

Podemos entonces plantear alguna de las siguientes ecuaciones:

$$\Sigma M_{izq}^{D} = 0 \qquad \Sigma M_{der}^{D} = 0$$

RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA PLANO DE DOS CHAPAS ARTICULADAS
Cálculo de reacciones de vínculo.

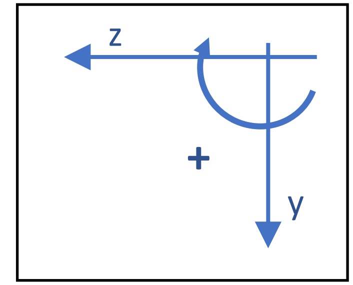


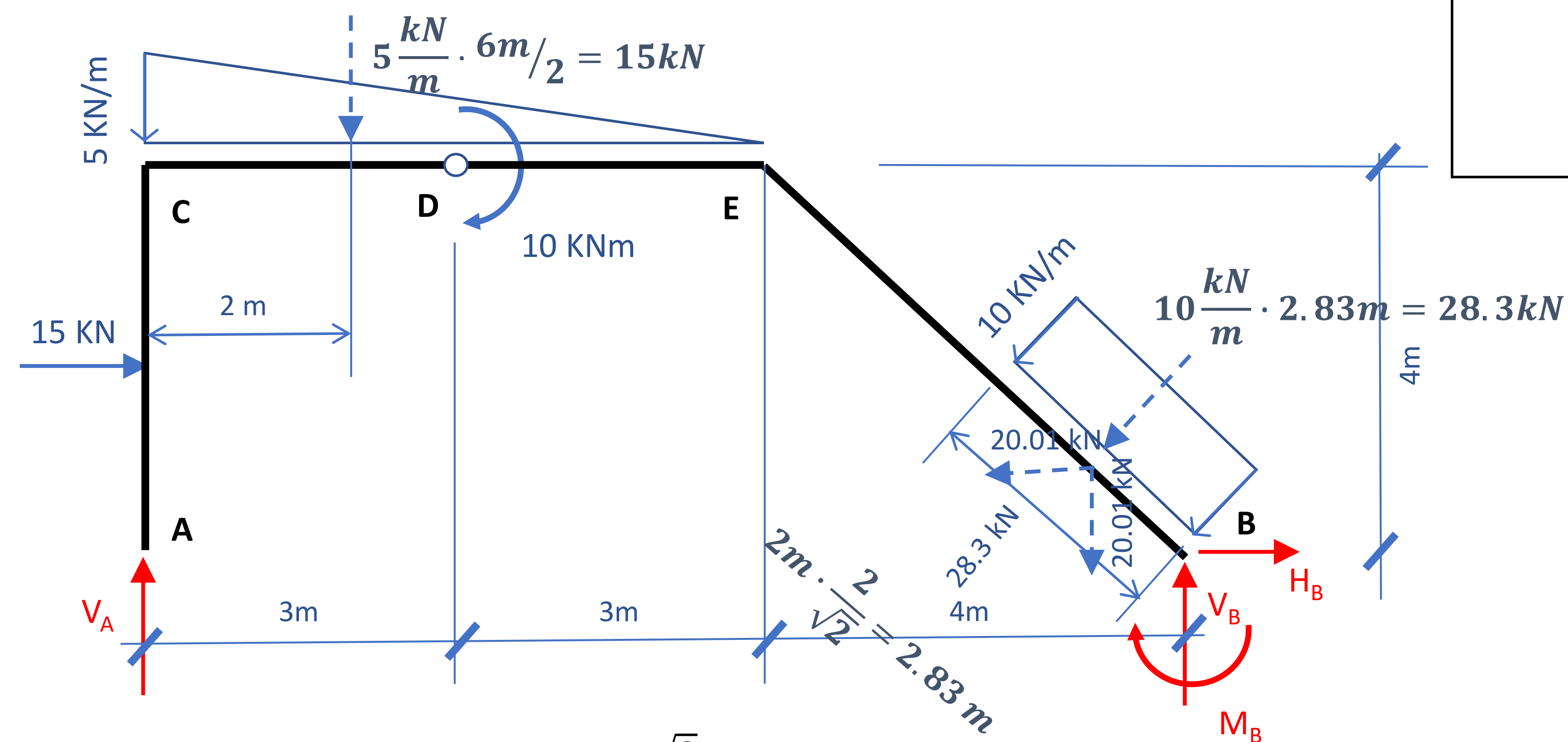
El sistema de cuatro ecuaciones elegido entonces es:

$$\begin{cases} \Sigma H_i = 0 \\ \Sigma V_i = 0 \\ \Sigma M_i^B = 0 \\ \Sigma M_{izq}^D = 0 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA PLANO DE DOS CHAPAS ARTICULADAS

Cálculo de reacciones de vínculo.





$$\Sigma H_i = 0,\quad -15\ kN + 28,3kN\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - H_B = 0$$

$$\Sigma V_i = 0,\quad -V_A + 15\ kN + 28,3\ kN\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - V_B = 0$$

$$\boxed{28,3\ kN\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 20,01\ kN}$$

$$\Sigma M_i^B = 0,\ V_A\cdot 10m + 15kN\cdot 2m\ - 15kN\ \cdot 8m + 10kNm\ - 20.01kN\ \cdot 1m - 20.01kN\ \cdot 1m + M_B = 0$$

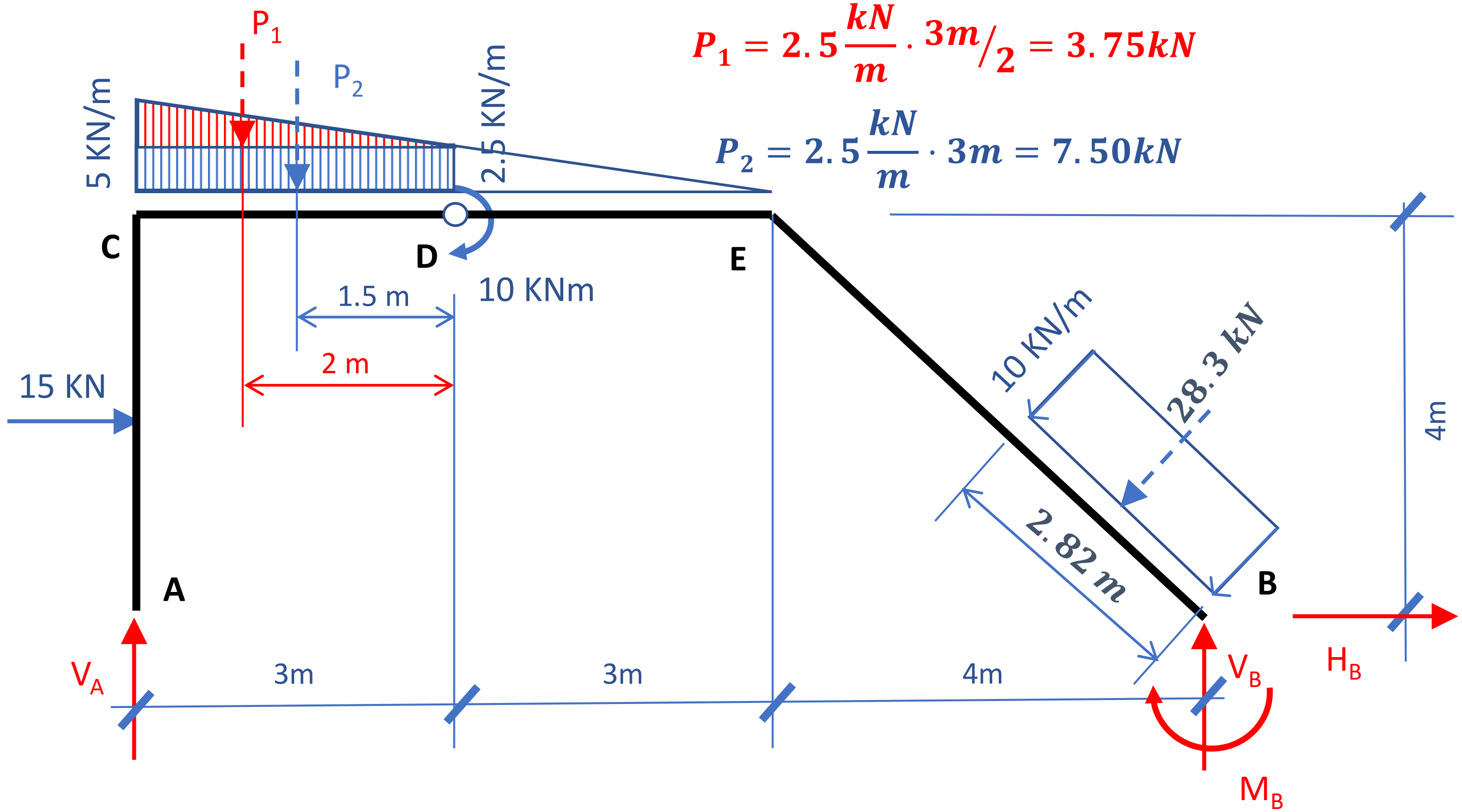
FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

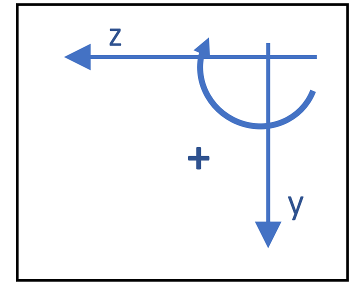
RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA PLANO DE DOS CHAPAS ARTICULADAS

Cálculo de reacciones de vínculo.

$$P_1 = 2.5\frac{kN}{m}\cdot 3m/_2 = 3.75kN$$

$$P_2 = 2.5\frac{kN}{m}\cdot 3m = 7.50kN$$





Planteamos como cuarta ecuación la suma de momentos de las fuerzas a la izquierda de la articulación D.

$$\Sigma M^D_{izq} = 0,\ V_A \cdot 3m - 15kN \cdot 2m - 3.75kN \cdot 2m - 7,50kN \cdot 1.5 = 0$$

RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA PLANO DE DOS CHAPAS ARTICULADAS
Cálculo de reacciones de vínculo.

$$(1)\ \Sigma H_i = 0, \quad -15\ kN + 28,3\ kN \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{H_B} = 0$$

$$(2)\ \Sigma V_i = 0, \quad -V_A + 15\ kN + 28,3\ kN \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - V_B = 0$$

$$(3)\ \Sigma M_i^B = 0, \quad V_A \cdot 10m + 15kN \cdot 2m - 15kN \cdot 8m + 10kNm - 20.01kN \cdot 1m -$$
$$-20.01\mathrm{kN} \cdot 1\mathrm{m} + \mathrm{M_B} = 0$$

$$(4)\ \Sigma M_i^D = 0, \quad V_A \cdot 3m - 15kN \cdot 2m - 3.75kN \cdot 2m - 7,50kN \cdot 1.5 = 0$$

De (1)

$$-15\ kN + 28,3\ kN \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + H_B = 0 \rightarrow -H_B + 5,01\ kN = 0 \qquad \boxed{H_B = 5.01\ kN}$$

De (4)

$$-V_A \cdot 3m - 15kN \cdot 2m - 3.75kN \cdot 2m - 7,50kN \cdot 1.5 = 0 \qquad \boxed{V_A = 16,25\ kN}$$

Reemplazamos V_A en (2)

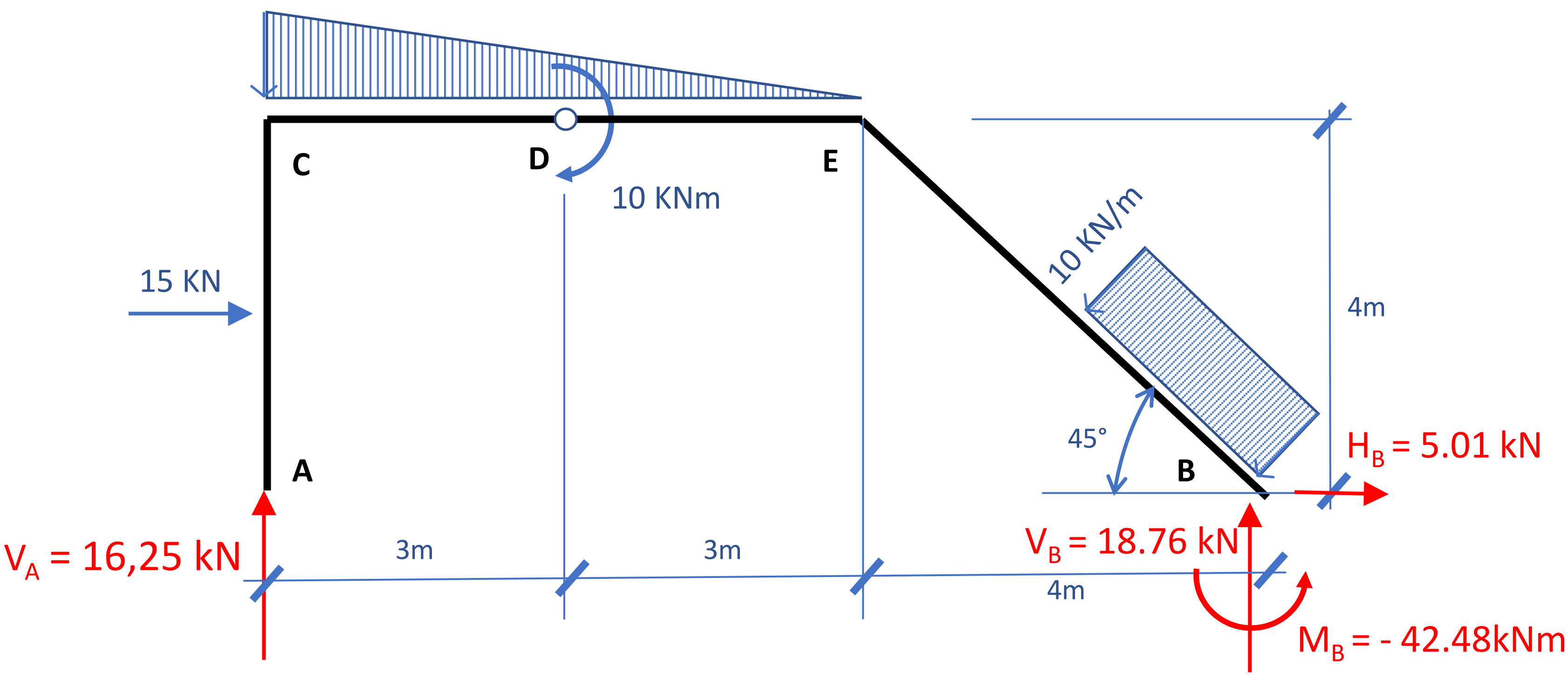
$$-16,25\ kN + 15\ kN + 28,3\ kN \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - VB = 0 \qquad \boxed{V_B = 18.76\ kN}$$

RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA PLANO DE DOS CHAPAS ARTICULADAS
Cálculo de reacciones de vínculo.

Reemplazamos V_A = 16,25 kN en (3)

$$16,25\,kN \cdot 10m + 15kN \cdot 2m\ - 15kN\ \cdot 8m + 10kNm\ - 20.01kN\ \cdot 1m\ \ - 20.01\mathrm{kN}\ \cdot 1\mathrm{m}\ + \mathrm{M_B} = 0$$

$\boxed{M_B = -\,42.48\ \mathrm{kNm}}$ Como supusimos MB positivo, el signo menos en este caso coincide también con el signo de acuerdo a la terna adoptada (negativo → antihorario.

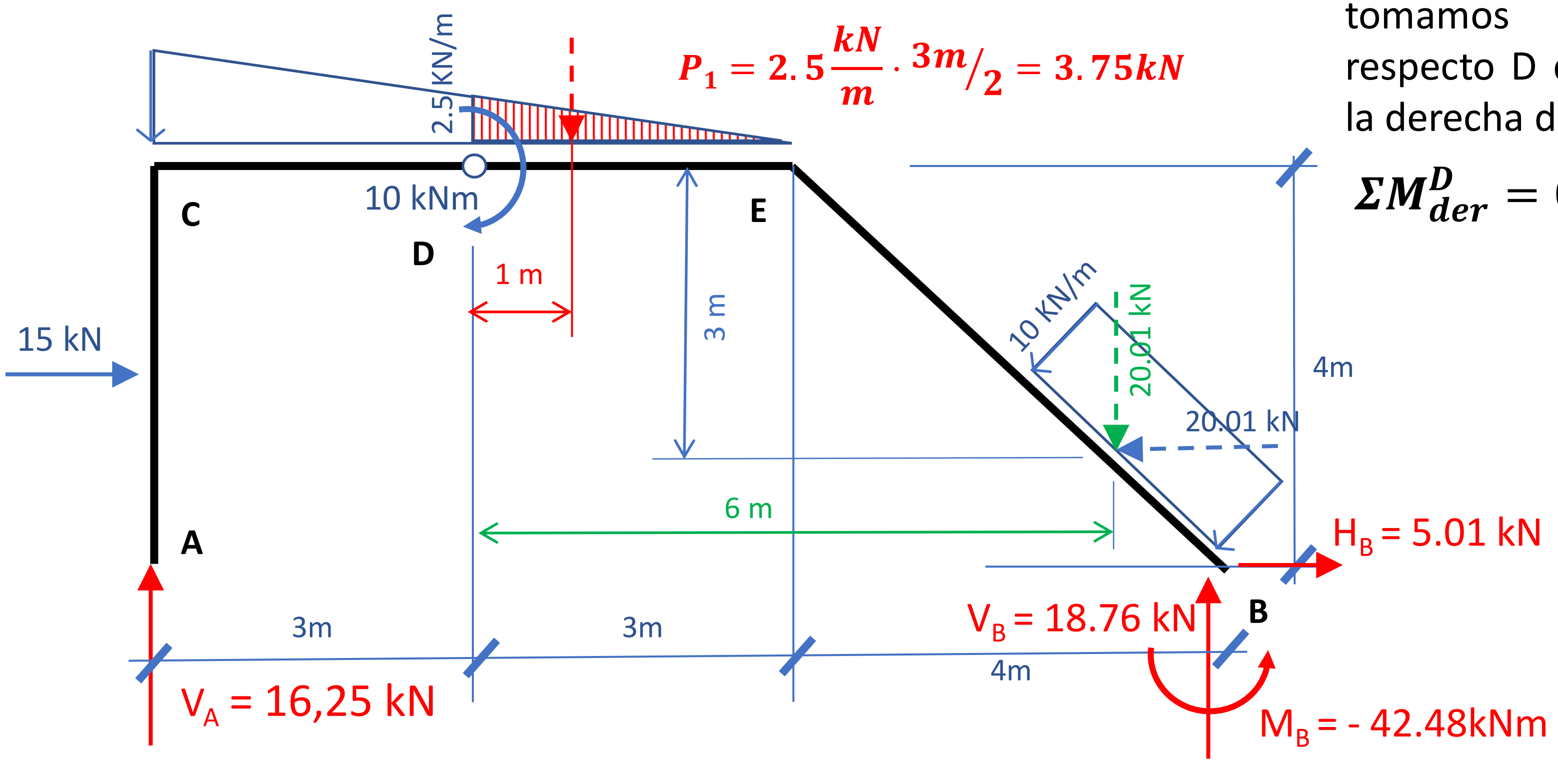


RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA PLANO DE DOS CHAPAS ARTICULADAS

Cálculo de reacciones de vínculo - VERIFICACIÓN

A modo de verificación tomamos momento con respecto D de las fuerzas a la derecha de la articulación

$$\Sigma M_{der}^{D} = 0$$



$$10\ knm + 3.75kN \cdot 1m + 20.01kN \cdot 3m + 20.01\ kN \cdot 6m\ - 5.01kN \cdot 4m\ - 18{,}76kN \cdot 7m\ - 42.48\ kNm =$$

$$10\ knm + 3.75kNm + 60.03\ kNm + 120.06\ kNm\ - 20.04kNm\ - 131.2\ kNm\ - 42.48\ kNm = \mathbf{0.12\ kNm}$$

$\cong$ **0 !**

FIN