

Departamento de Estabilidad

64.04 | 64.05 | 84.05

Estática y Resistencia de Materiales

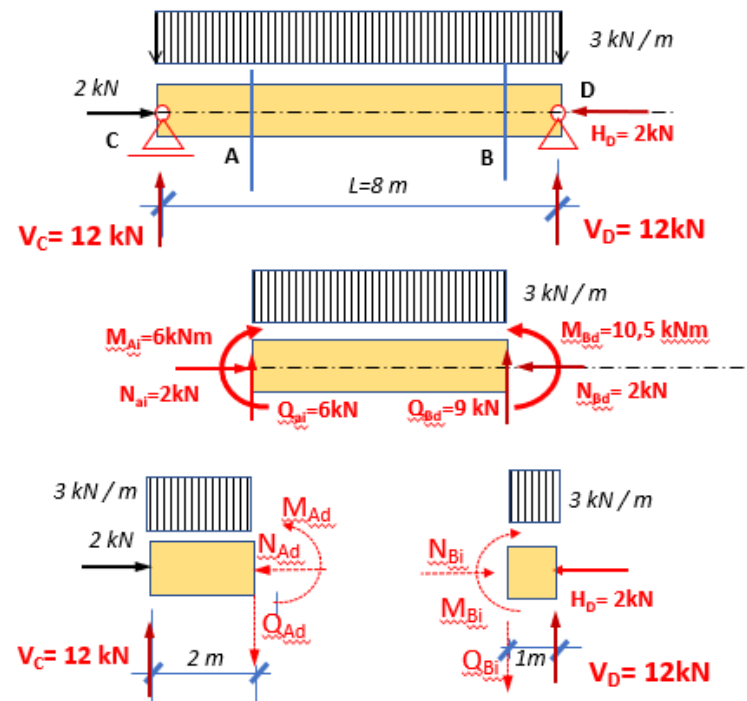
Teórica

Ing. Alfredo Corral

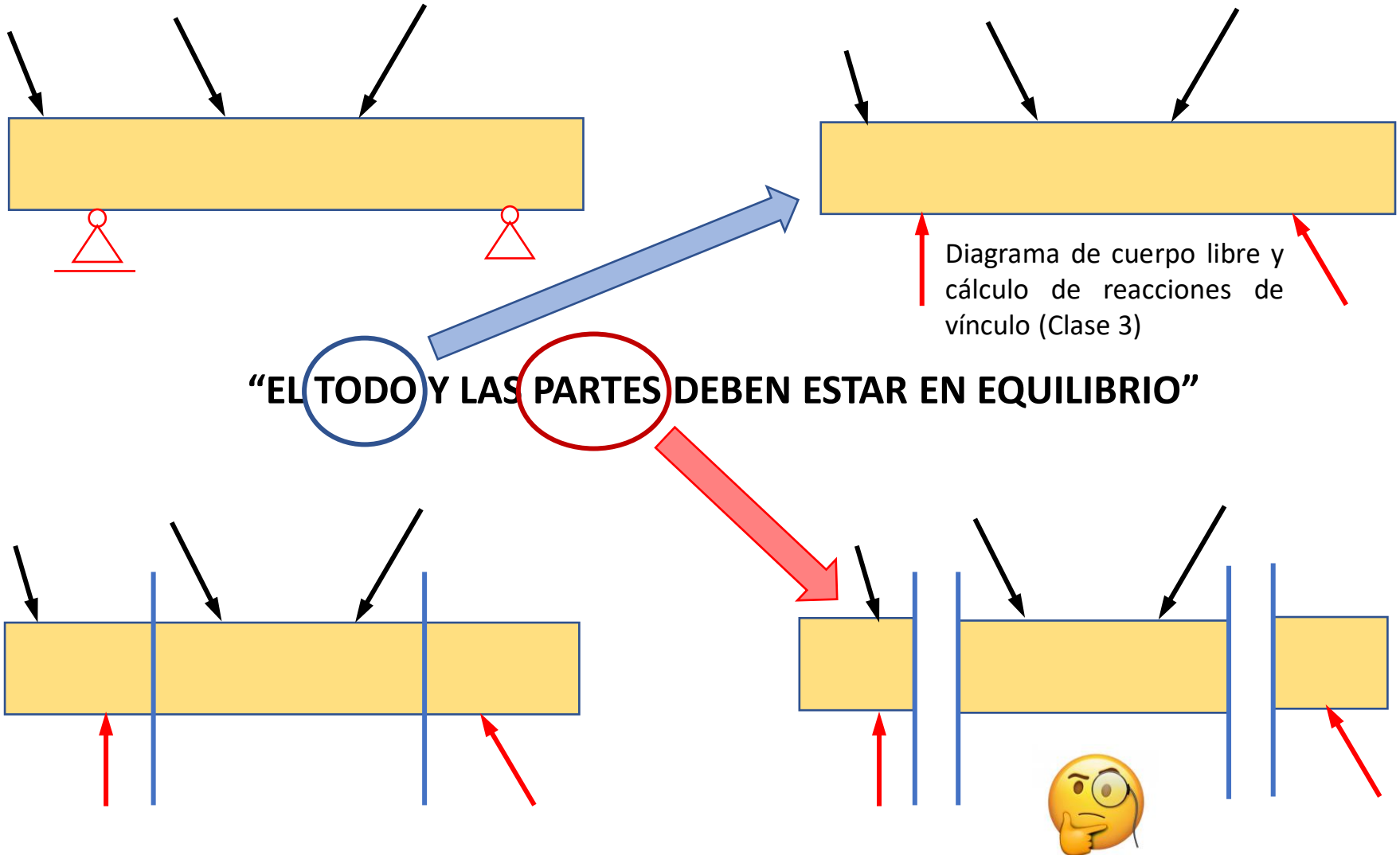
CLASE 5 SISTEMAS PLANOS DE ALMA LLENA

Primera Parte

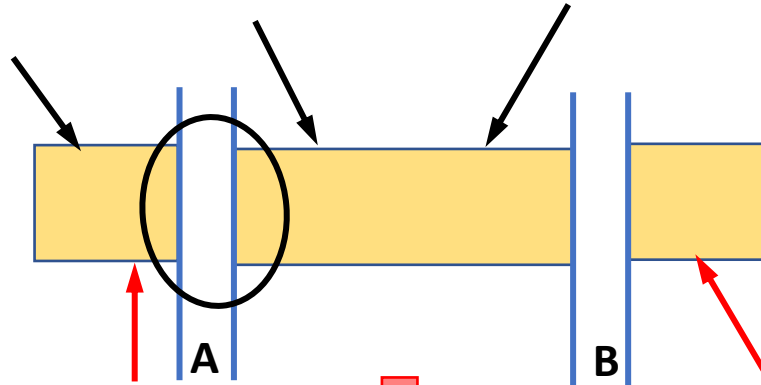
Conceptos. Definiciones. Diagramas de características en vigas



1. HACIA UNA DEFINICION DE ESFUERZO CARACTERÍSTICO:



1. HACIA UNA DEFINICION DE ESFUERZO CARACTERÍSTICO:

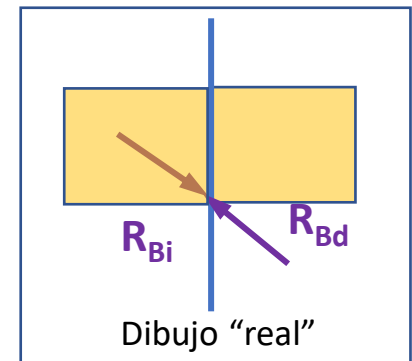
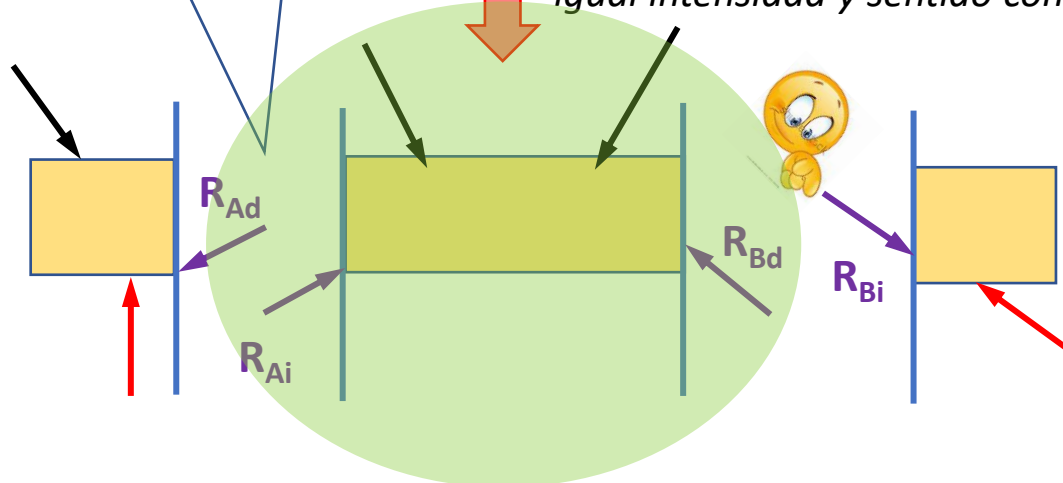


Es la misma sección !!
No hay distancia
material entre ellas.

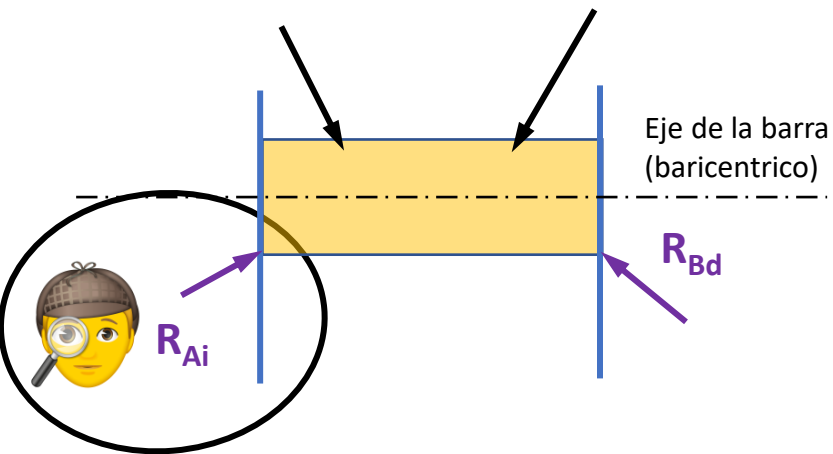
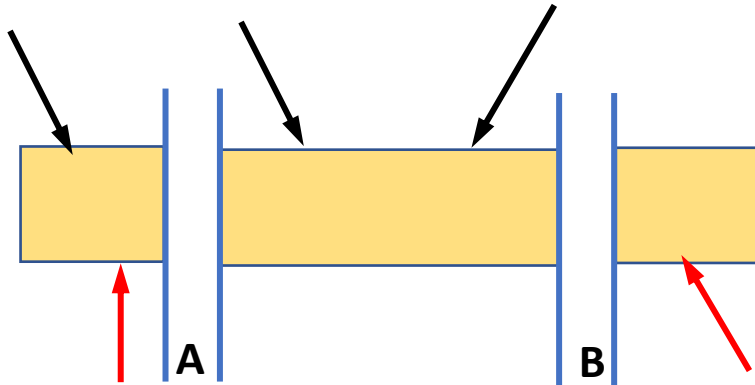
Cuarto principio de la Estática:

Principio de Acción y Reacción de Newton

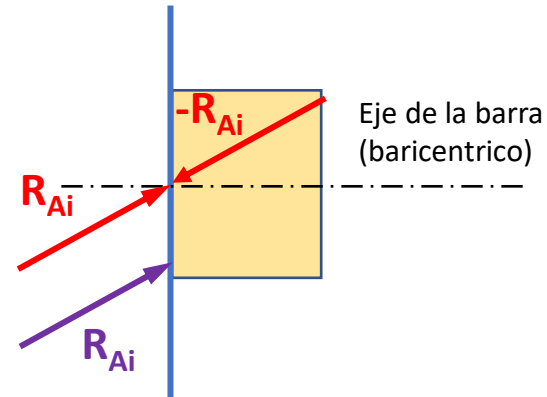
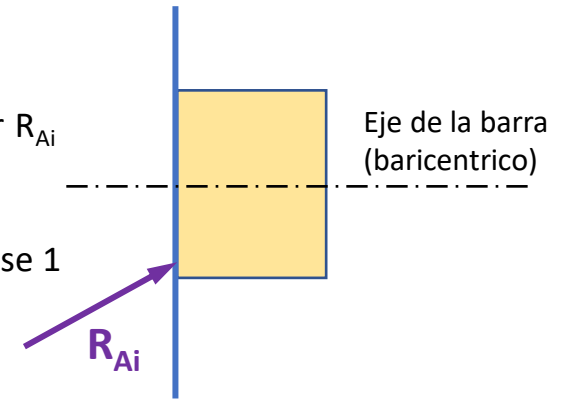
Toda acción implica existencia de una reacción, de igual intensidad y sentido contrario.



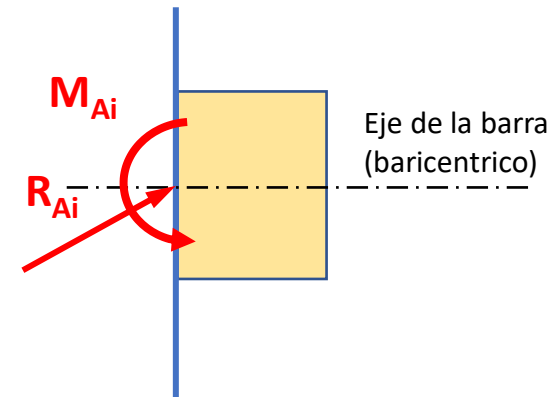
1. HACIA UNA DEFINICION DE ESFUERZO CARACTERÍSTICO:



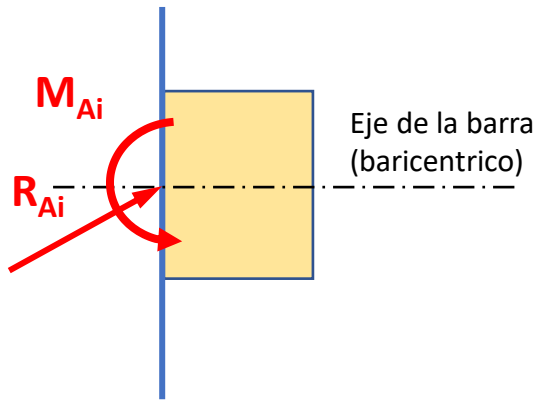
Podemos trasladar R_{Ai}
al baricentro de la
sección?
Diapositiva 22. Clase 1



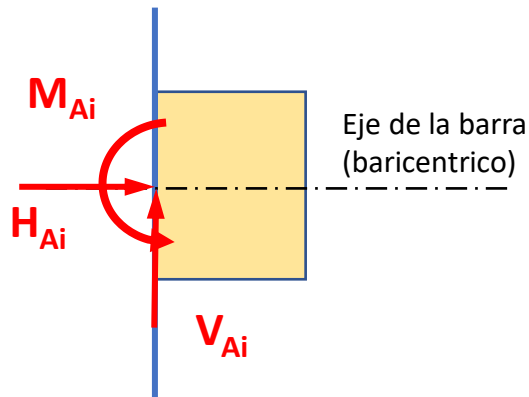
Tres sistemas
equivalentes !



1. HACIA UNA DEFINICION DE ESFUERZO CARACTERÍSTICO:



Si descomponemos R_{Ai} en una fuerza horizontal y otra vertical:

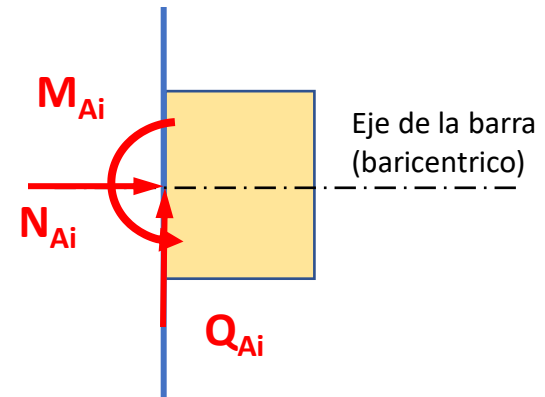


Denominaremos a M : Momento flexor

A la fuerza horizontal H , la nombramos con N : esfuerzo axial

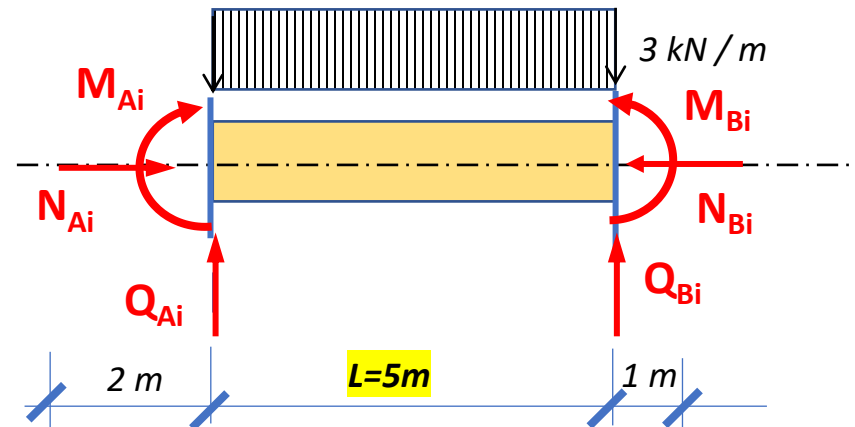
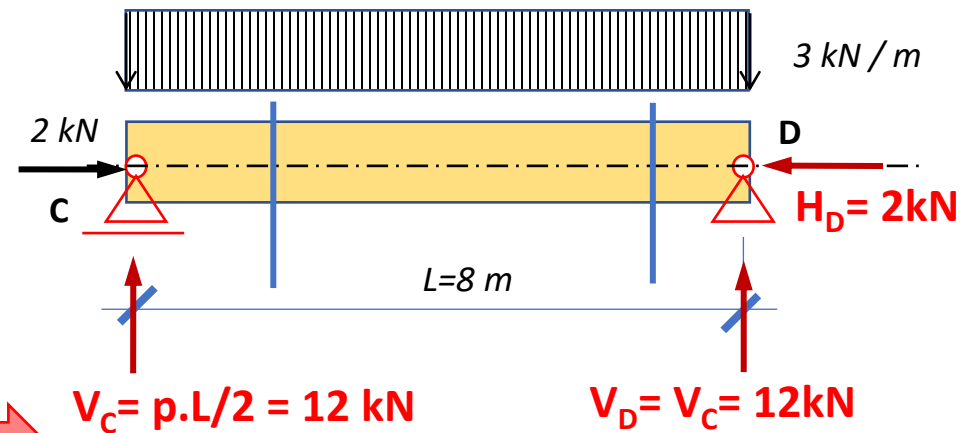
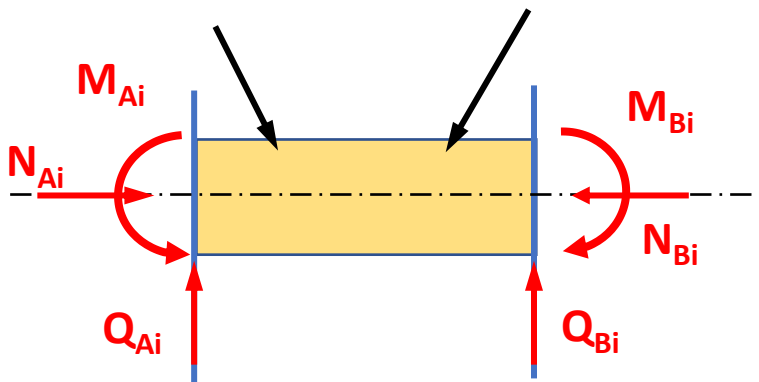
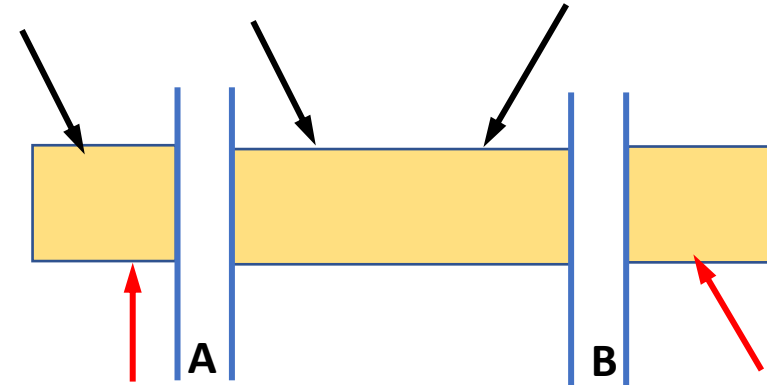
A la fuerza vertical V , la nombramos con Q : esfuerzo de corte.

No olvidar que son dos esfuerzos iguales y opuestos uno en cada lado de la sección considerada (izquierda o derecha)

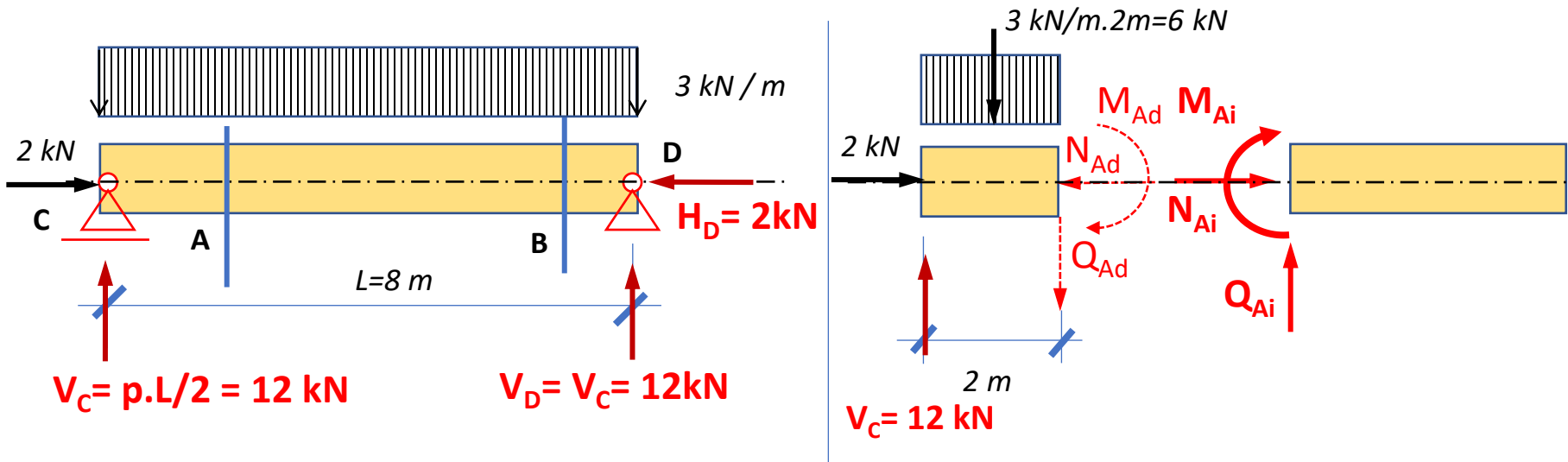


1. HACIA UNA DEFINICION DE ESFUERZO CARACTERÍSTICO:

A continuación ilustraremos con un ejemplo simple los conceptos transitados hasta ahora:



1. HACIA UNA DEFINICION DE ESFUERZO CARACTERÍSTICO:



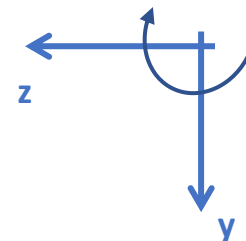
Calculamos N , Q y M en la sección A

Reducimos las fuerzas a la izquierda de A, al punto A baricéntrico.

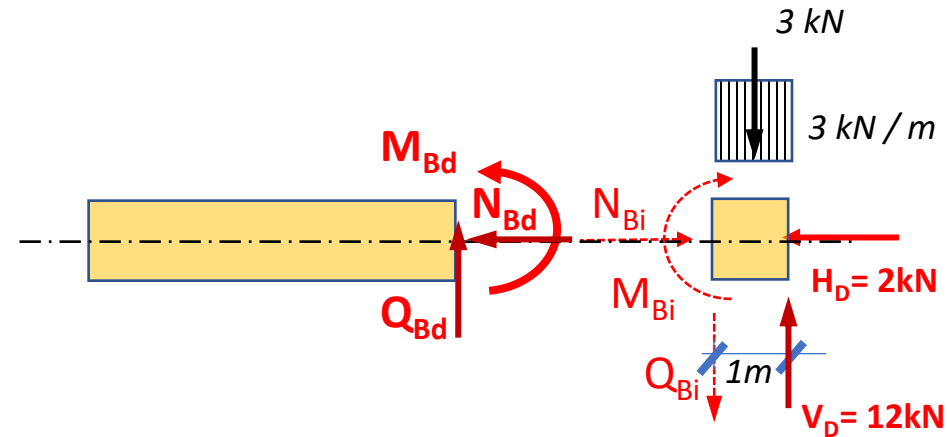
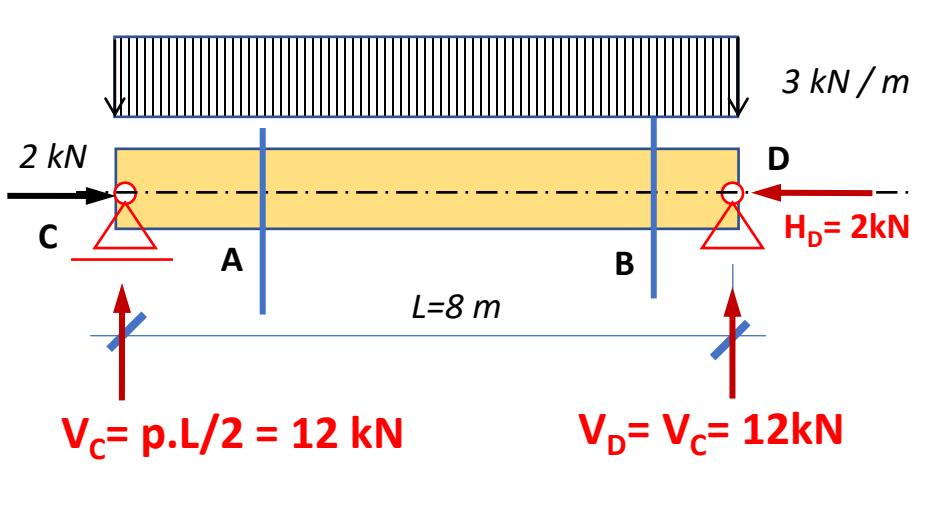
$$N_{AIZQ} = \sum H_i = -2\text{ kN}$$

$$Q_{AIZQ} = \sum V_i = -12\text{ kN} + 6\text{ kN} = -6\text{ kN}$$

$$M_{AIZQ} = \sum M_i = 12\text{ kN} \cdot 2\text{ m} - 6\text{ kN} \cdot 1\text{ m} = 18\text{ kNm}$$



1. HACIA UNA DEFINICION DE ESFUERZO CARACTERÍSTICO:



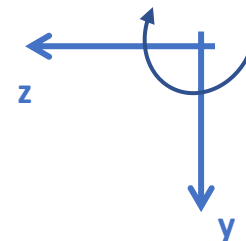
Calculamos N , Q y M en la sección B

Reducimos las fuerzas a la derecha de B, al punto B baricéntrico.

$$N_{B\text{ DER}} = \sum H_i = 2\text{ kN}$$

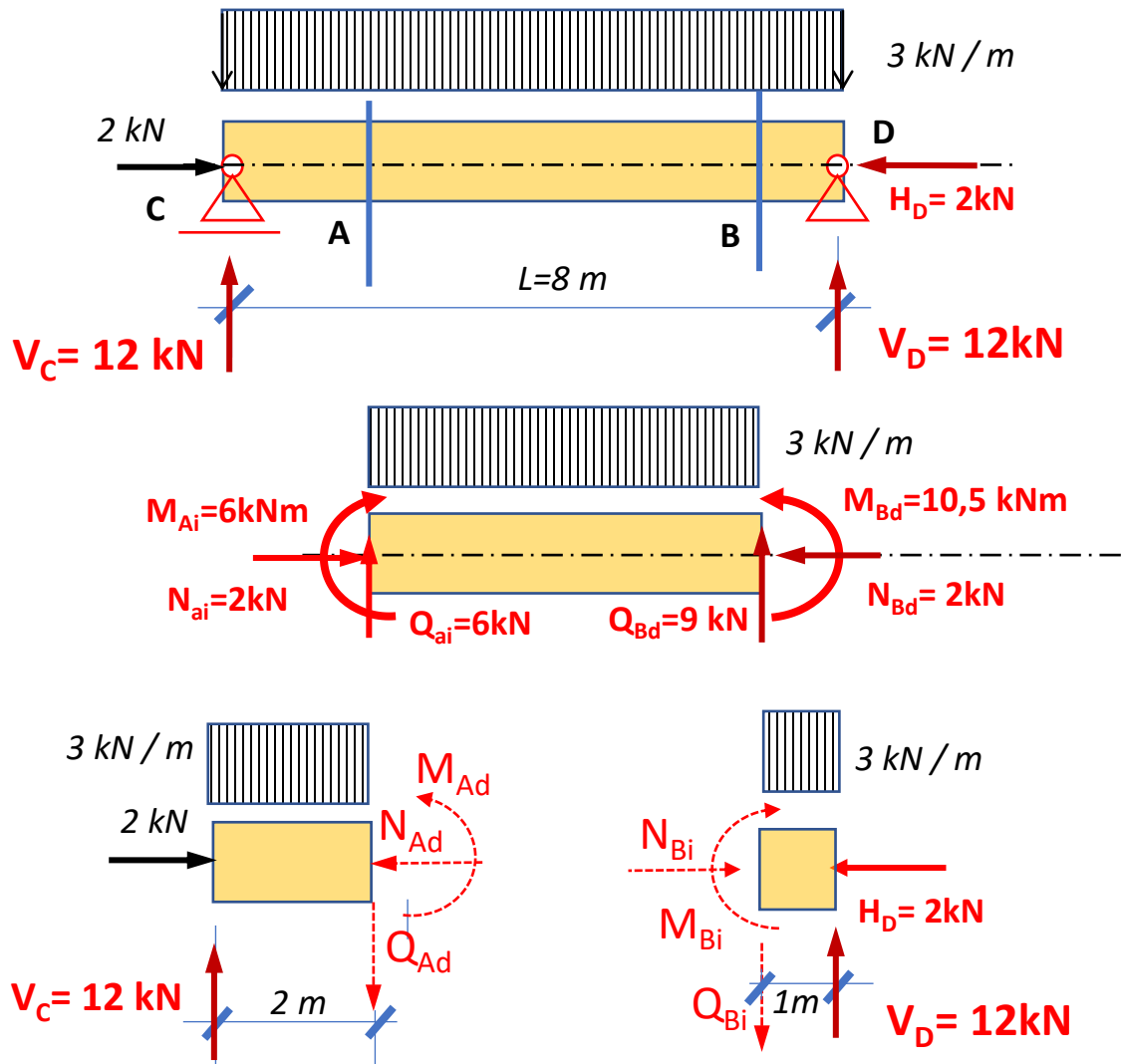
$$Q_{B\text{ DER}} = \sum V_i = -12\text{ kN} + 3\text{ kN} = -9\text{ kN}$$

$$M_{B\text{ DER}} = \sum M_i = -12\text{ kN} \cdot 1\text{ m} + 3\text{ kN} \cdot 0.5\text{ m} = -10,5\text{ kNm}$$



1. HACIA UNA DEFINICION DE ESFUERZO CARACTERÍSTICO:

Resumen de lo transitado hasta ahora.

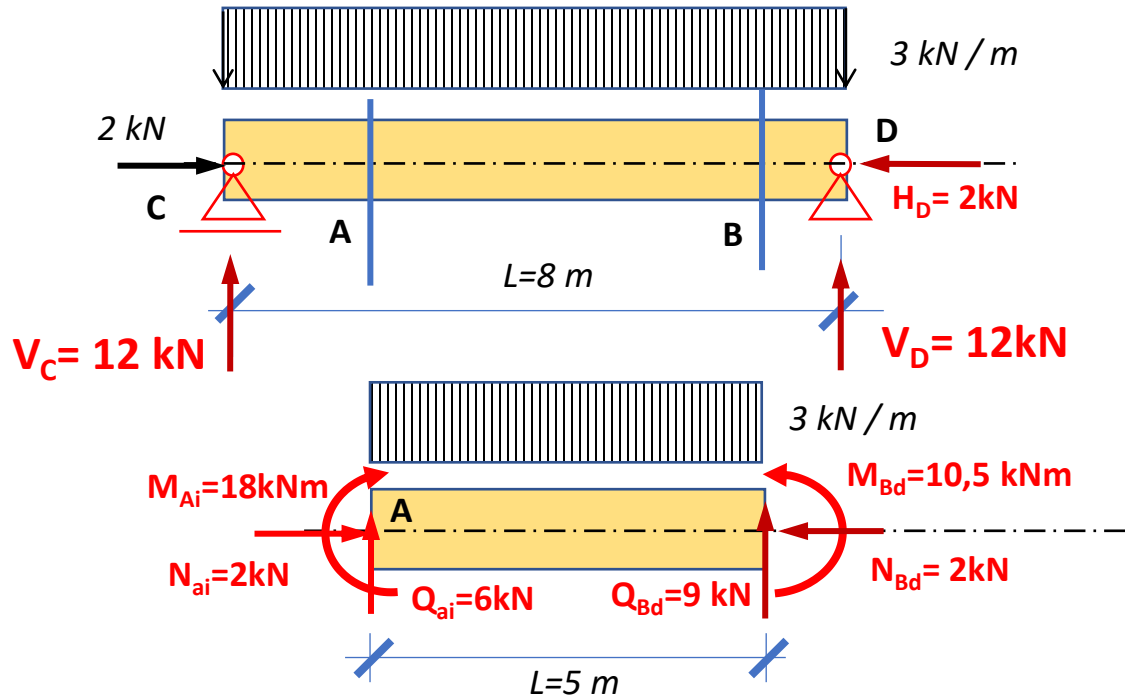


Siguiendo el principio de acción y reacción, hemos calculado los esfuerzos N , Q y M al reducir las fuerzas actuantes ya sea a la izquierda o a la derecha de las secciones consideradas. Las PARTES deberían estar en equilibrio también !

En la siguiente diapositiva lo verificamos para la porción de barra entre las secciones A y B.

1. HACIA UNA DEFINICION DE ESFUERZO CARACTERÍSTICO:

Verificamos el equilibrio de la porción entre A y B.



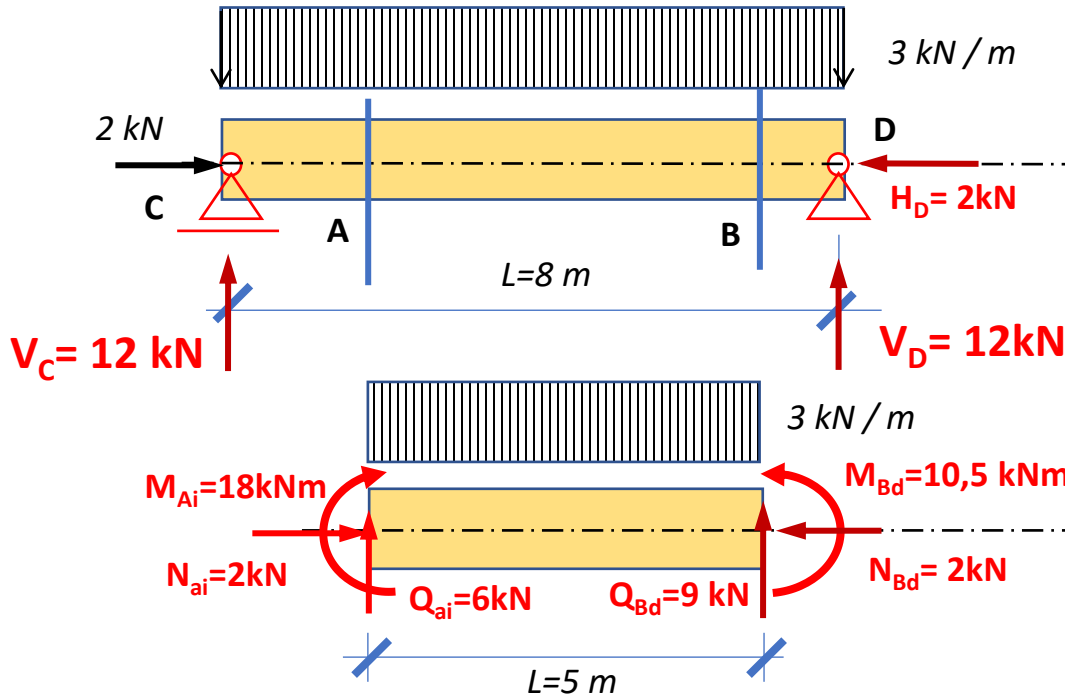
Hemos planteado el principio de acción y reacción para calcular las fuerzas que actúan sobre las secciones pertenecientes a la porción de estructura que debía estar en equilibrio. Y aquí verificamos que lo está !
Maravilloso !!

$$\sum H_i = -2\text{ kN} + 2\text{ kN} = 0$$

$$\sum V_i = -6\text{ kN} - 9\text{ kN} + 3\text{ kN/m} \cdot 5 = 0$$

$$\sum M_i^A = 18\text{ kNm} - 10.5\text{ kNm} + 3\frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 5\text{ m} \cdot 2.5\text{ m} - 9\text{ kN} \cdot 5\text{ m} = 7.5\text{ kNm} + 37.5\text{ kNm} - 45\text{ kNm} = 0$$

1. HACIA UNA DEFINICION DE ESFUERZO CARACTERÍSTICO:



Que significa “dimensionar”:
Dar dimensión a una sección.
Por ejemplo definir el b y H de una sección rectangular.

Y a continuación una pregunta:

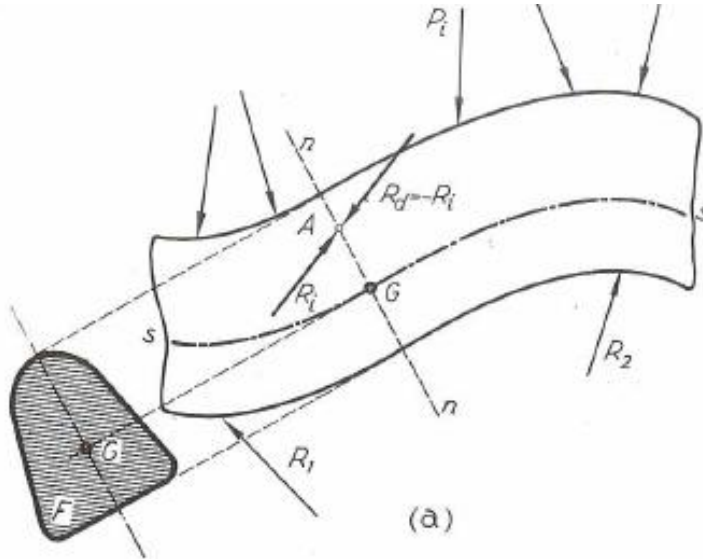
Si nos dicen que el perfil de esta viga está dimensionado para soportar un esfuerzo de flexión M_f (momento flexor) de 20 kNm , diríamos que soportará los esfuerzos a los que está sometido ?



No podemos dar una respuesta con los datos que tenemos !! Ya que si bien en las secciones A y B, que son solo dos tomadas arbitrariamente, el momento flexor es menor que aquel para el que fue dimensionado la pieza, no sabemos aún si hay otras secciones más solicitadas !

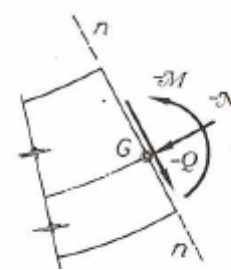
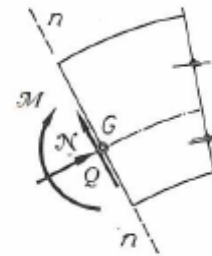
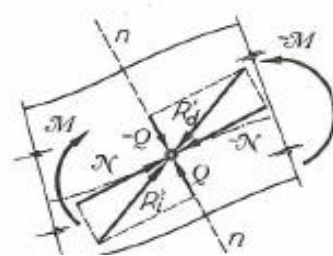
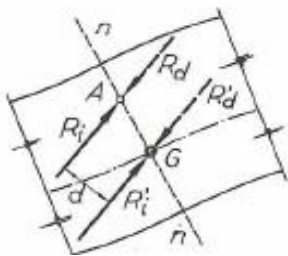
Precisamos conocer los esfuerzos N , Q y M en todas las secciones y sistematizar su cálculo.
DE AQUÍ LA NECESIDAD DE UN DIAGRAMA DE CARACTERÍSTICAS: Un diagrama que nos muestre la variación de las funciones M , Q y N a lo largo de la barra.

2. DEFINICION DE ESFUERZOS CARACTERÍSTICOS:

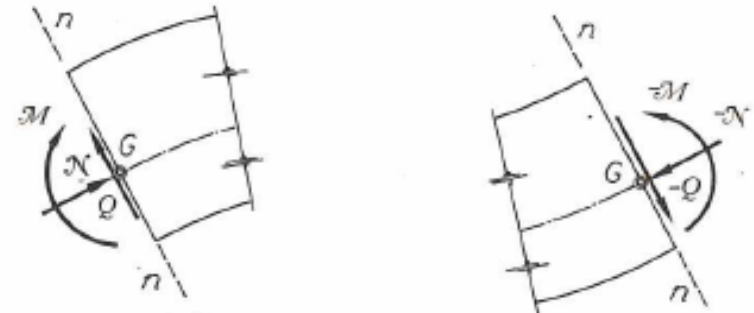


Llamamos R_i a la resultante de las fuerzas que actúan a la izquierda de $n-n$ y $R_d = -R_i$, a la de las que actúan a la derecha de la sección considerada.

Al reducir R_i al baricentro de la sección obtenemos los esfuerzos característicos N , Q y M



2. DEFINICION DE ESFUERZOS CARACTERÍSTICOS:



2.1 Momento Flexor:

“Se denomina momento flexor \mathcal{M} en una sección, el par de pares que actúan normalmente a uno y otro lados de la misma, cuyos momentos corresponden a los momentos con respecto al baricentro de la sección de las resultantes izquierda y derecha, y cuyo signo viene dado por el momento de la resultante, izquierda, o el de la derecha con signo contrario”.

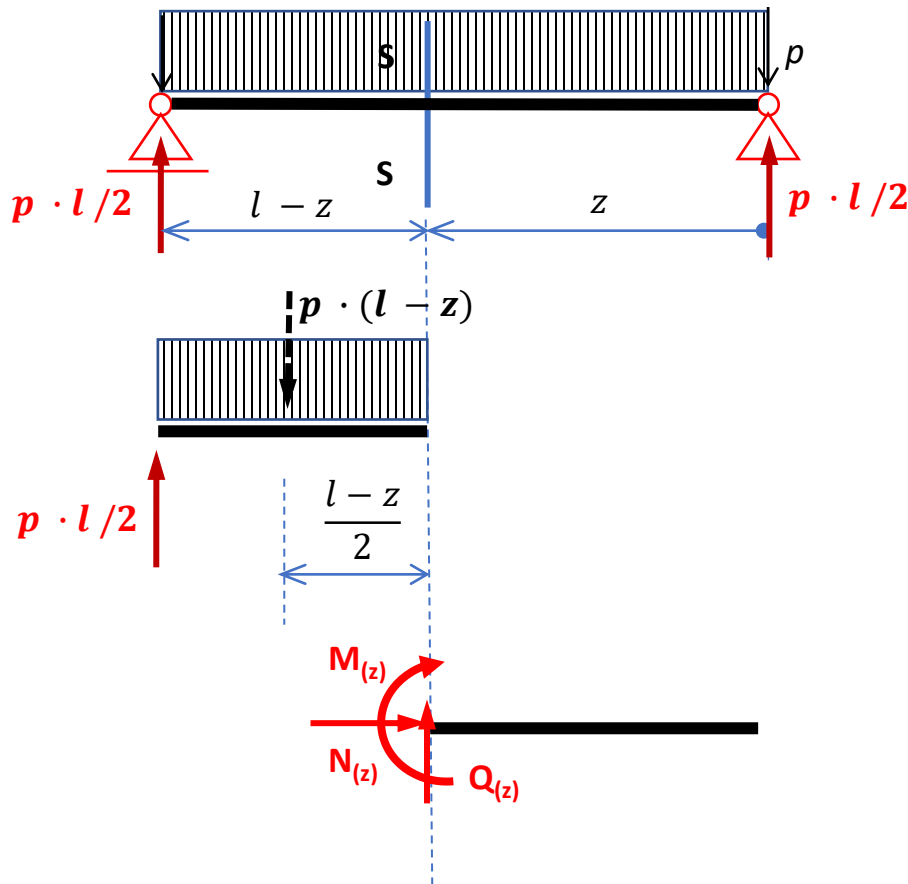
2.2 Esfuerzo de Corte.

“Se denomina esfuerzo de corte o tangencial \mathcal{Q} , en una sección al conjunto de las dos fuerzas Q , cuyas rectas de acción se encuentran contenidas en el plano de aquélla, y cuyas intensidades corresponden a las proyecciones de las resultantes izquierda o derecha sobre el plano de la sección y cuyo signo lo define la proyección de la resultante izquierda”.

2.3 Esfuerzo Normal.

“Se denomina esfuerzo normal o esfuerzo axial \mathcal{N} , al conjunto de las dos fuerzas aplicadas en el baricentro de la sección cuyas intensidades corresponden a las proyecciones sobre dicha dirección de la resultante izquierda y derecha”. El signo del esfuerzo normal depende de si la sección resulta solicitada por tracción o compresión. En el primer caso será positivo, y negativo en el segundo.

3. Determinación de las funciones características en una viga simplemente apoyada con carga uniforme.



$$N(z) = 0$$

$$Q(z) = -p \cdot \frac{l}{2} + p \cdot (l - z)$$

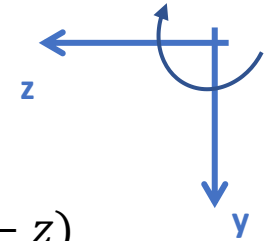
$$Q(z) = p \cdot \frac{l}{2} - p \cdot z$$

$$M(z) = p \cdot \frac{l}{2} \cdot (l - z) - p \cdot (l - z)^2/2$$

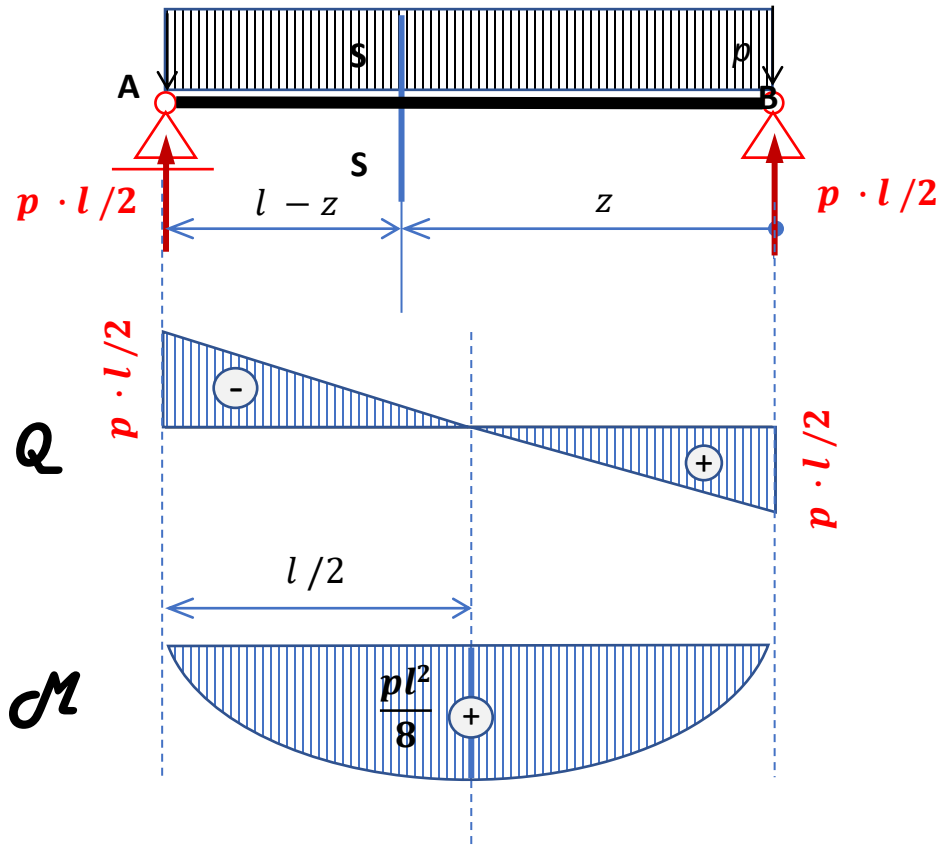
$$M(z) = \frac{pl^2}{2} - \frac{plz}{2} - \frac{pl^2}{2} + plz - pz^2/2$$

$$M(z) = \frac{plz}{2} - pz^2/2$$

$$M(z) = \frac{pz}{2} (l - z)$$



3. Determinación de las funciones características en una viga simplemente apoyada con carga uniforme.

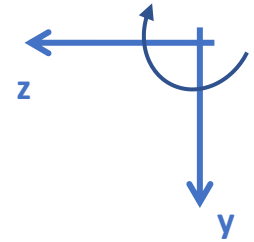


Ejemplos de escalas:

Esc p : x ton/m /cm

Esc Q : x ton/cm

Esc M : x tm /cm



$$Q(z) = p \cdot \frac{l}{2} - p \cdot z$$

$$Q(0) = p \cdot \frac{l}{2} \quad Q(l) = -p \cdot \frac{l}{2}$$

$$Q(l/2) = 0$$

$$M(z) = \frac{pz}{2} (l - z)$$

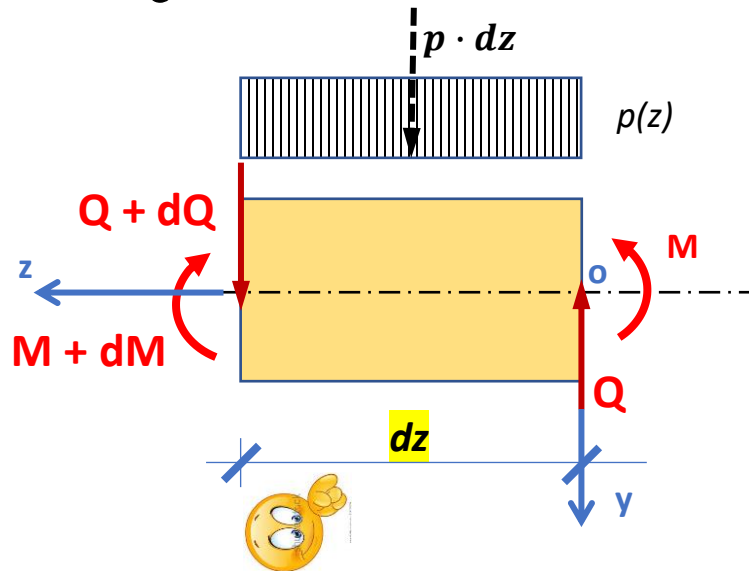
$$M(0) = M(l) = 0$$

$$M(l/2) = \frac{pl^2}{8}$$

Existe alguna relación entre las funciones carga p , Corte Q y Momento flexor M ?



4. RELACIONES ANALÍTICAS ENTRE LAS FUNCIONES QUE DEFINEN LOS DIAGRAMAS DE p , Q y M :



Aclaremos que la función carga puede ser cualquiera y no necesariamente una función constante.

El equilibrio de esta porción diferencial de barra exige que:

$$\sum H_i = 0, \sum V_i = 0, \sum M_i^0 = 0$$

$$\sum H_i = 0 \quad \checkmark$$

$$\sum V_i = 0 \rightarrow Q + dQ + p(z) \cdot dz - Q = 0 \rightarrow p(z) = -\frac{dQ}{dz}$$

$$\sum M_i^0 = 0 \rightarrow M + dM - (Q + dQ) \cdot dz - p(z) \cdot \frac{dz^2}{2} = 0$$

$$M + dM - Q \cdot dz - dQ \cdot dz - p(z) \cdot \frac{dz^2}{2} - M = 0$$

Despreciando diferenciales de orden superior

$$dM - Q \cdot dz = 0 \rightarrow Q(z) = \frac{dM}{dz}$$

Como podemos utilizar estas relaciones analíticas diferenciales para agilizar el trazado de los diagramas de características ?

VEAMOS !



5. Determinación de los diagramas de características aplicando las relaciones diferenciales entre la funciones carga, corte y momento para la viga simplemente apoyada con carga uniforme.

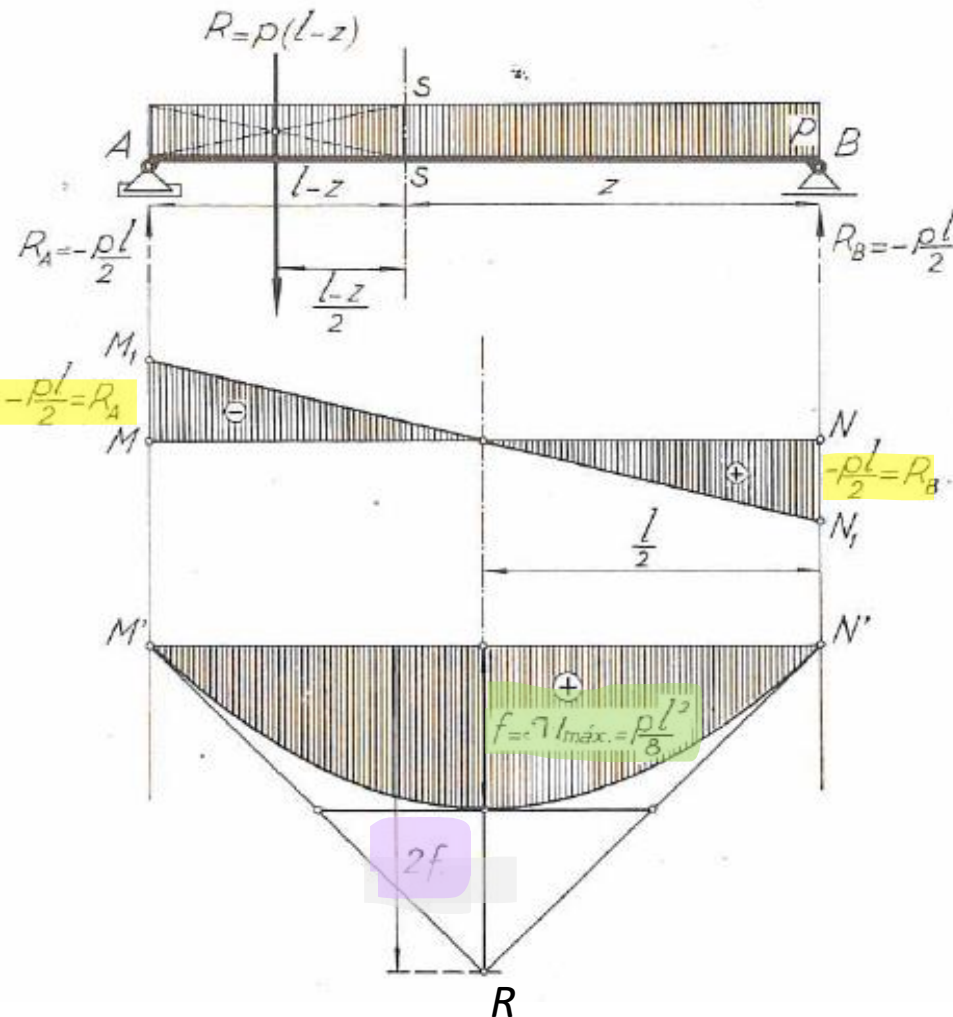


Diagrama de corte Q:

Podemos calcular los valores extremos de Q . En este caso coinciden con las reacciones de vínculo.

Como la función $p(z)$ es constante la función Q será lineal.

Diagrama de momento M:

Los valores extremos en A y B de este diagrama son cero.

La función es parabólica de segundo grado ya que la función corte es lineal.

Para trazar la parábola determinamos su flecha que se corresponde con el momento máximo: $\frac{pl^3}{8}$.

Las tangentes extremas de la parábola se cortan en un punto resultado de llevar $2f$ desde el centro de la función carga.

5. Determinación de los diagramas de características aplicando las relaciones diferenciales entre la funciones carga, corte y momento para la viga simplemente apoyada con carga triangular.

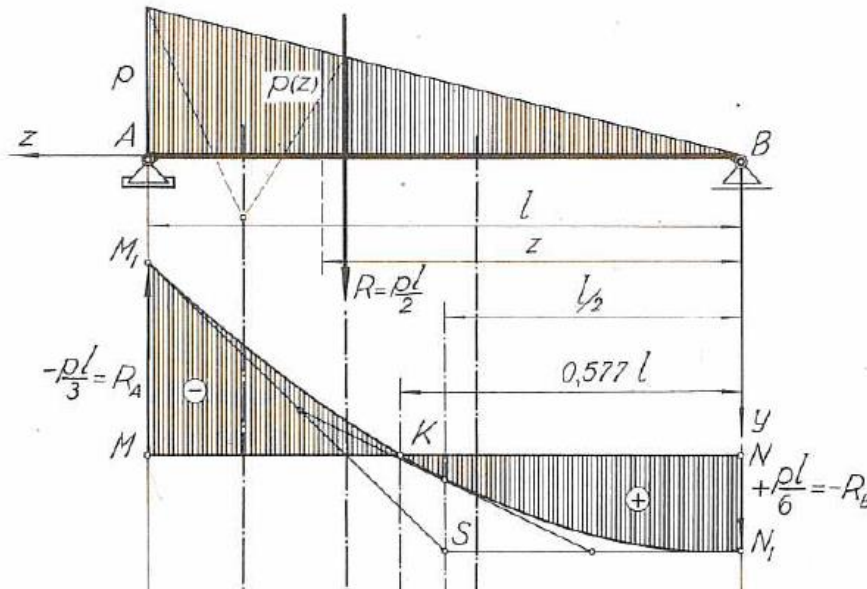


Diagrama de corte Q:

Podemos calcular los valores extremos de Q . En este caso coinciden con las reacciones de vínculo.

Como la función $p(z)$ es lineal la función Q será una parábola de segundo grado.

Determinación de las tangentes extremas:

Como la función carga indica la pendiente en el punto de la función corte, la tangente en B de la función corte es horizontal.

Como la función corte es una parábola de segundo grado, las tangentes extremas se cortan en el centro de la luz.

Trazando una horizontal desde N hasta cortar al eje central determinamos el punto S . Uniendo S con M_1 , ordenada de Q en A obtenemos la otra tangente extrema.

Para determinar otra tangente intermedia dividimos los segmentos M_1S y SN_1 en partes iguales y unimos los puntos así determinados.

5. Determinación de los diagramas de características aplicando las relaciones diferenciales entre la funciones carga, corte y momento para la viga simplemente apoyada con carga triangular.

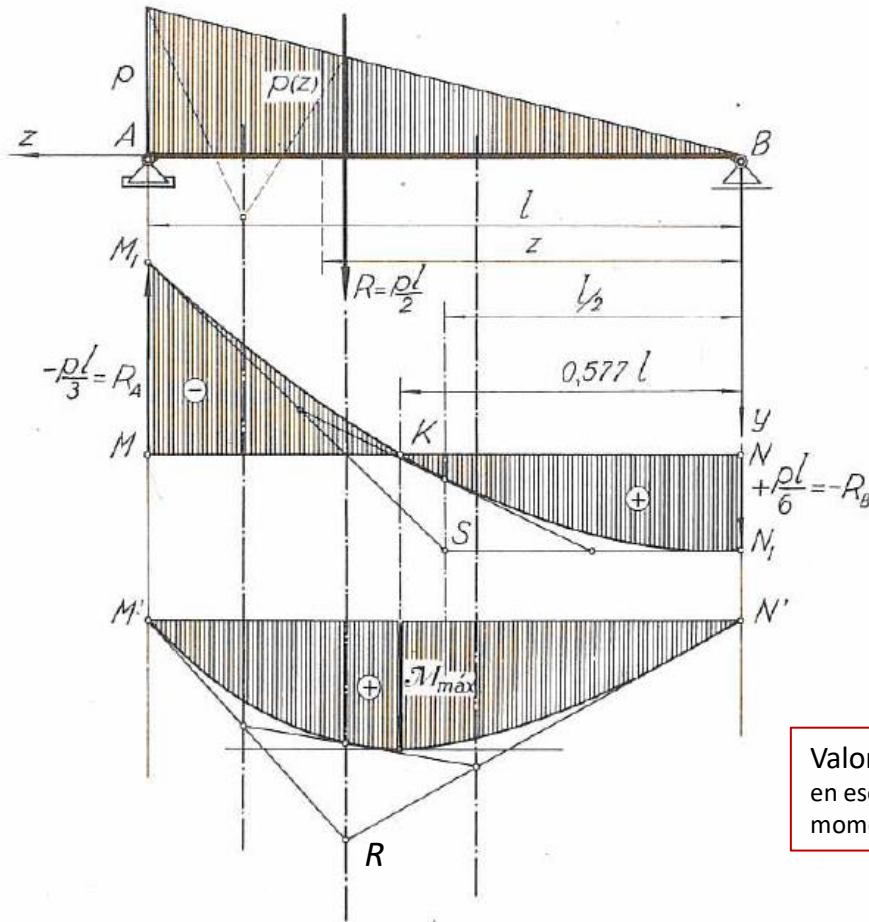


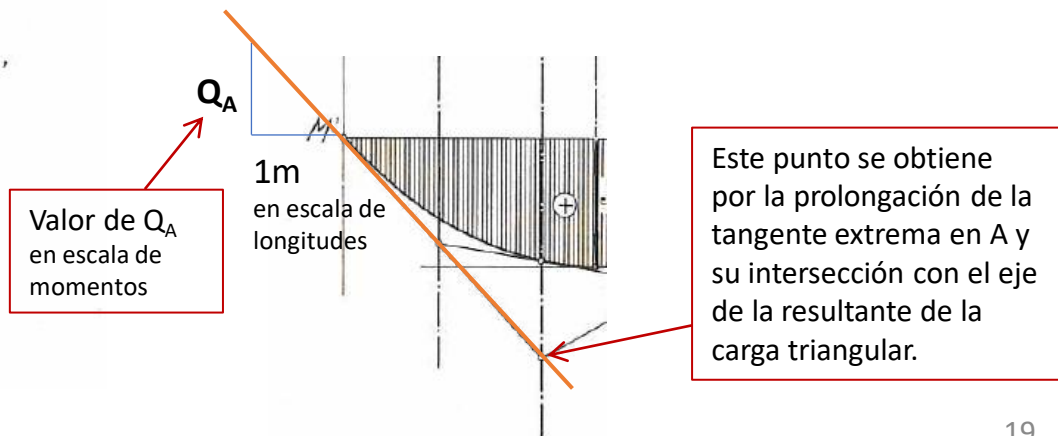
Diagrama de momentos flexores M:

En este caso los valores de momento flexor en los apoyos son nulos.

Como la función corte es una parábola de segundo grado, la función momento será una parábola cúbica.

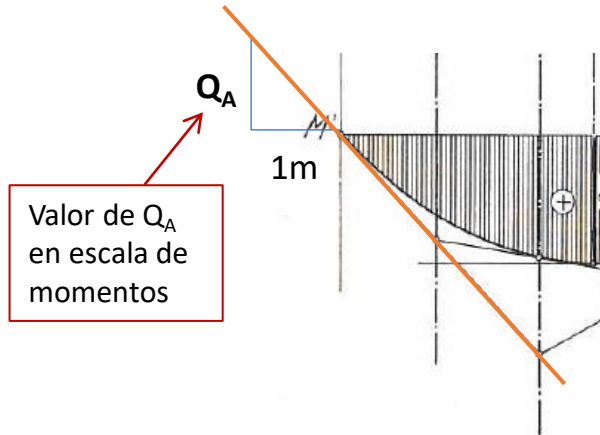
Tangentes extremas:

Para el trazado de tangentes, necesitamos conocer al menos una de las dos tangentes extremas, y procedemos así:



Finalmente uniendo R con N' obtenemos la otra tangente extrema.

5. Determinación de los diagramas de características aplicando las relaciones diferenciales entre la funciones carga, corte y momento para la viga simplemente apoyada con carga triangular.



Justificación de la construcción para determinar la tangente extrema.

$$Q(z) = \frac{dM}{dz}$$

$$Q(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta z}$$

$$Q(z_A) = \text{pendiente de } M(z) \text{ en } A = \text{tg } \varphi_A$$

$$Q(z_A) = \text{tg } \varphi_A = Q_A \text{ (en escala de momentos)} / 1\text{m}$$

5. Determinación de los diagramas de características aplicando las relaciones diferenciales entre la funciones carga, corte y momento para la viga simplemente apoyada con carga triangular.

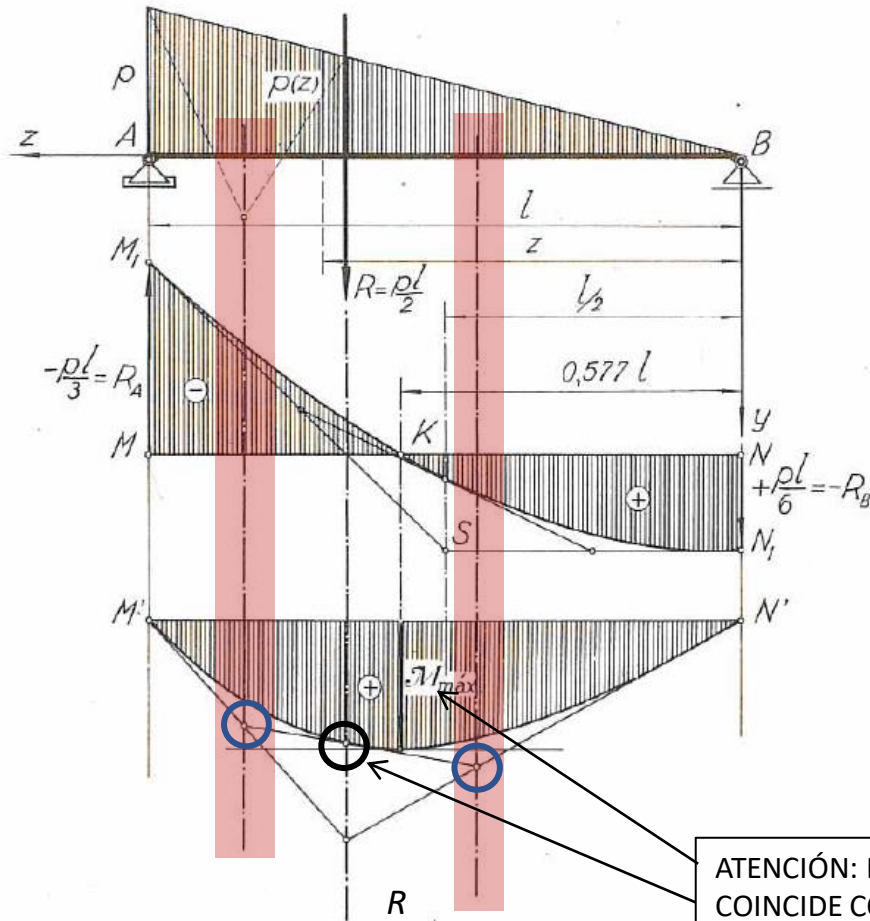


Diagrama de Momentos:

Determinación de la tangente intermedia.

Se determinan los baricentros de las cargas parciales a ambos lados de la resultante de la carga triangular.

Se determinan los puntos de intersección de dichos ejes con las rectas tangentes extremas.

Uniando estos puntos de intersección tenemos la tangente intermedia a la curva de momentos.

ATENCIÓN: EL PUNTO DE TANGENCIA NO COINCIDE CON EL DE MOMENTO MÁXIMO !!
Coincide con el baricentro de la carga triangular.

5. Determinación de los diagramas de características aplicando las relaciones diferenciales entre la funciones carga, corte y momento para la viga simplemente apoyada con carga triangular.

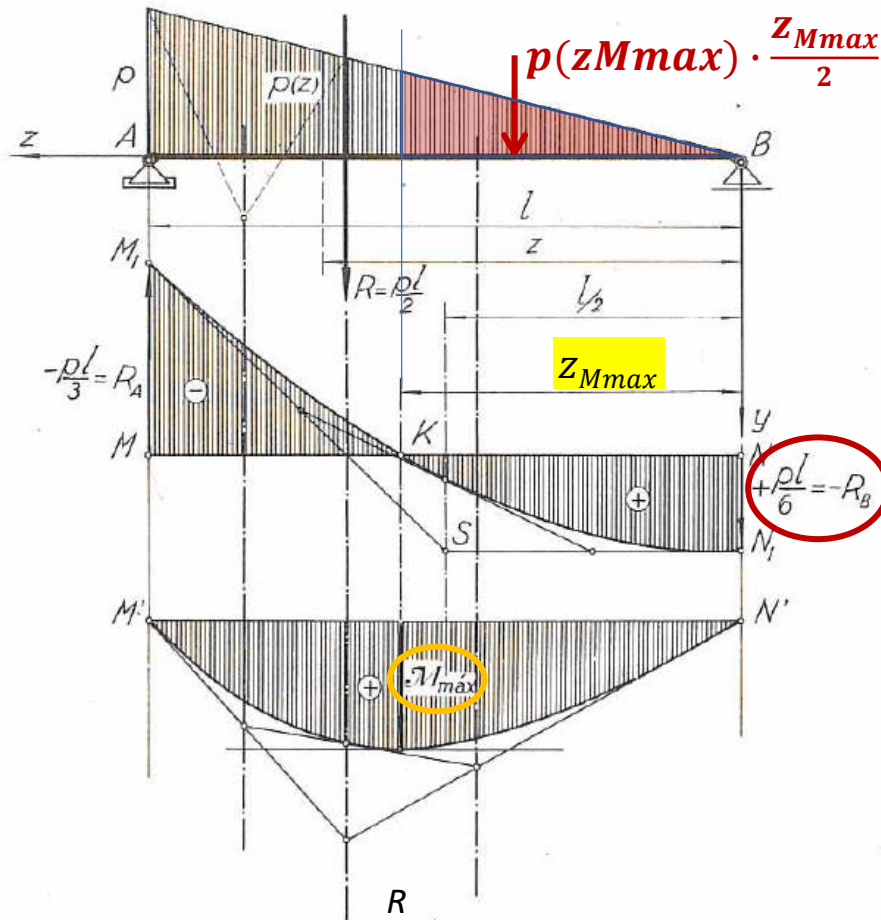


Diagrama de Momentos: Determinación de la ubicación de la sección de momento máximo y el valor del mismo.

$$Q(z) = \frac{dM}{dz} \quad \text{Donde } Q=0, \text{ tenemos } z_{Mmax}$$

Buscamos el valor de z_{Mmax}

Para ello necesitamos conocer la función carga p :

$$\frac{p}{l} = \frac{p(z)}{z} \rightarrow p(z) = p \cdot z/l$$

$$p(z_{Mmax}) = p \cdot z_{Mmax}/l$$

$$Q(z_{Mmax}) = -R_B + p(z_{Mmax}) \cdot \frac{z_{Mmax}}{2} = 0$$

$$Q(z_{Mmax}) = -p \cdot l/6 + p \cdot \frac{z_{Mmax}^2}{2l} = 0$$

$$p \cdot \frac{l}{6} = p \cdot \frac{z_{Mmax}^2}{2l} \rightarrow \frac{l^2}{3} = z_{Mmax}^2$$

$$z_{Mmax} = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0,577 \cdot l$$

5. Determinación de los diagramas de características aplicando las relaciones diferenciales entre la funciones carga, corte y momento para la viga simplemente apoyada con carga triangular.

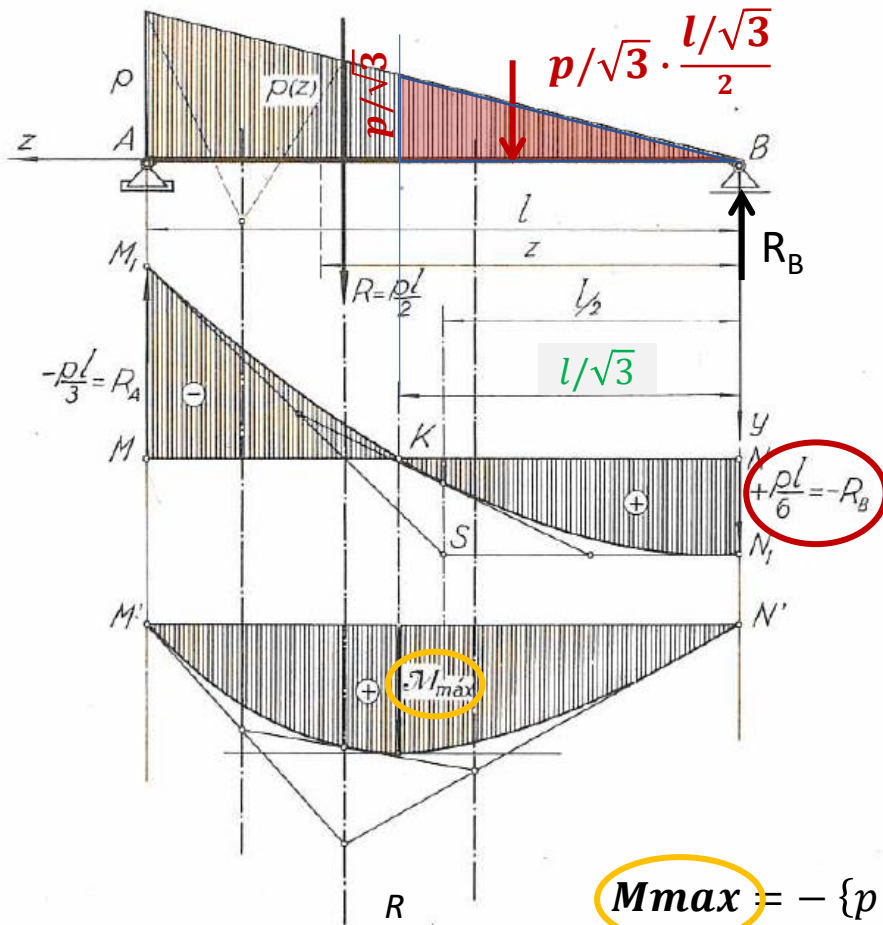


Diagrama de Momentos: Determinación del valor de $M_{m\acute{a}x}$

Ya sabemos que:

$$z_{M_{max}} = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0,577 \cdot l$$

$$p(z_{M_{max}}) = p \cdot \frac{z_{M_{max}}}{l} = p \cdot \frac{l/(l\sqrt{3})}{1} = p/\sqrt{3}$$

Calcularemos el valor de M_{max} para la sección derecha, esto es tomando las fuerzas que actúan a la derecha de la sección K y luego por la definición de diagrama de características le cambiamos el signo para expresar el valor y signo en la sección izquierda.

$$M_{max} = - \left\{ -p \cdot \frac{l}{6} \cdot \frac{l}{\sqrt{3}} + \frac{p}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{l}{2\sqrt{3}} \right) \cdot \left(\frac{l}{\sqrt{3}} \right) / 3 \right\}$$

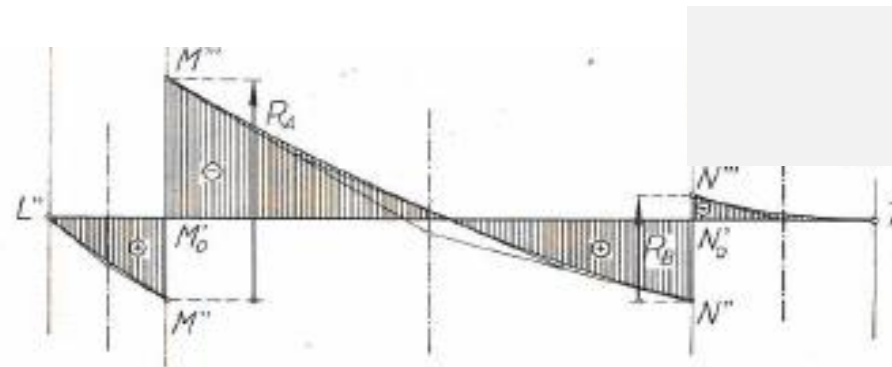
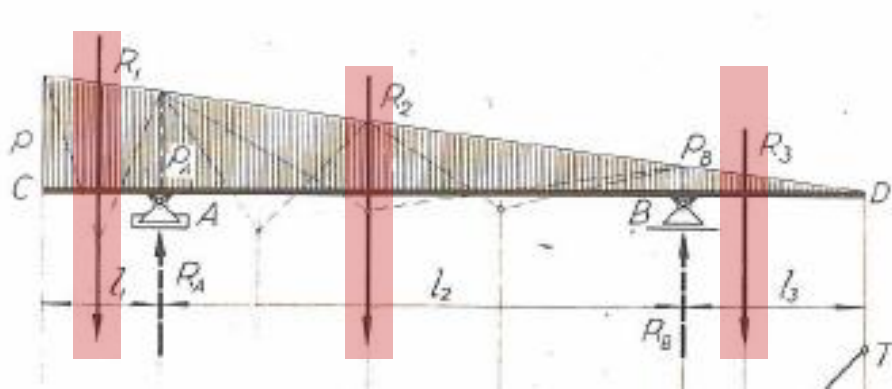
$$M_{max} = - \left\{ p \cdot l^2 \cdot \left(-\frac{1}{6\sqrt{3}} + \frac{1}{18\sqrt{3}} \right) \right\}$$

$$M_{max} = - \{ p \cdot l^2 \cdot (-0,09622 + 0,03207) \} = 0,0642 \cdot p \cdot l^2$$

INTERVALO



6. Determinación de los diagramas de características aplicando las relaciones diferenciales entre la funciones carga, corte y momento para la viga con dos voladizos y carga triangular.



Para el trazado de los diagramas de Q y M, aplicaremos todos los conceptos utilizados en el caso anterior: la viga simplemente apoyada con carga triangular.

Diagrama de corte Q:

Calculamos las resultantes parciales de la función carga, R_1 , R_2 y R_3 .

Podemos determinar los valores de Q extremos en cada tramo.

$$Q_C = 0$$

$$Q_A \text{ (antes del apoyo)} = R_1$$

$$Q_A \text{ (después del apoyo)} = R_1 - R_A$$

$$Q_B \text{ (antes del apoyo)} = -(R_3 - R_B); \text{ porque leemos en sección derecha.}$$

$$Q_B \text{ (después del apoyo)} = -R_3$$

$$Q_D = 0$$

6. Determinación de los diagramas de características aplicando las relaciones diferenciales entre la funciones carga, corte y momento para la viga con dos voladizos y carga triangular.

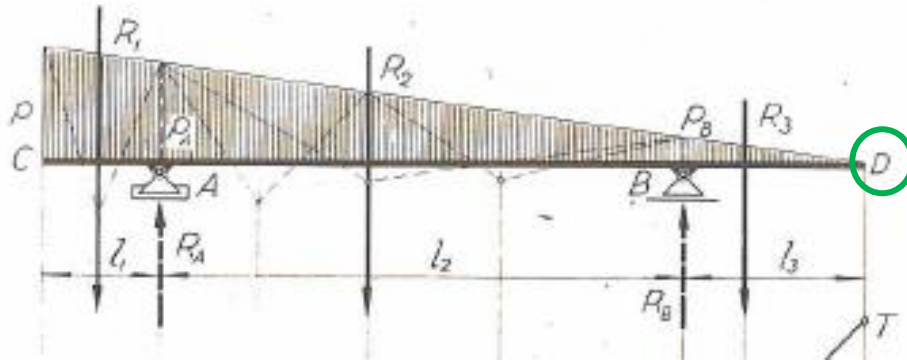


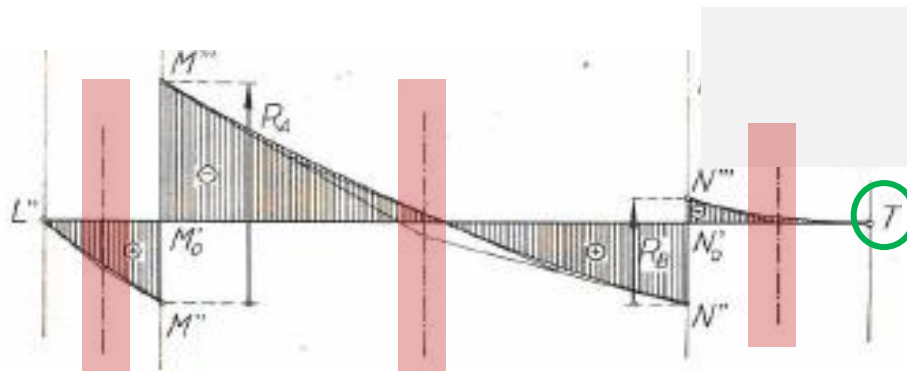
Diagrama de corte Q:

Como la función carga es lineal, la función corte será una parábola de segundo grado.

Aplicaremos la propiedad para las parábolas de segundo grado que dice que las tangentes extremas se cortan en el centro de la luz.

Necesitamos una primera tangente:

En el punto D el valor de la función carga es cero, es decir que en T, la tangente del diagrama de corte es horizontal.



6. Determinación de los diagramas de características aplicando las relaciones diferenciales entre la funciones carga, corte y momento para la viga con dos voladizos y carga triangular.

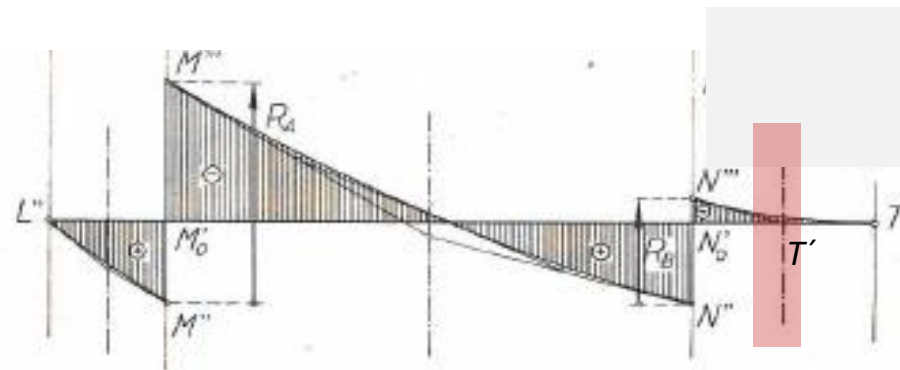
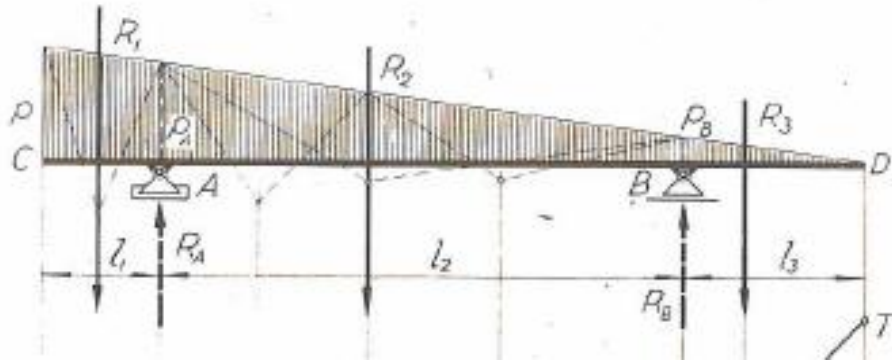
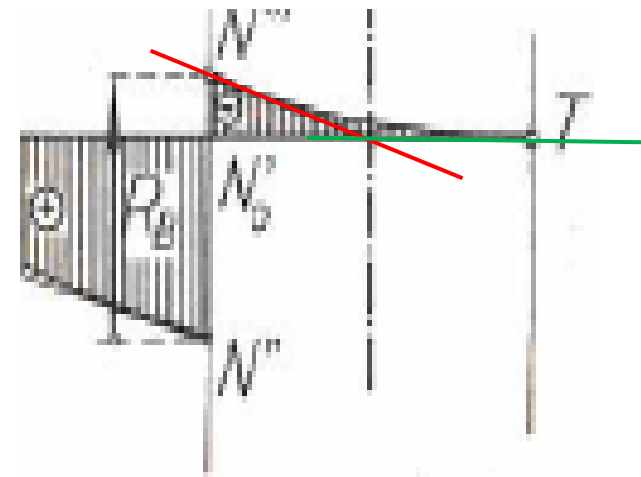


Diagrama de corte Q:

Uniendo T con el centro de la luz del voladizo izquierdo obtenemos un punto T'.

Si unimos N''' con T' obtenemos la otra tangente para construir la parábola de Q para el voladizo



6. Determinación de los diagramas de características aplicando las relaciones diferenciales entre la funciones carga, corte y momento para la viga con dos voladizos y carga triangular.

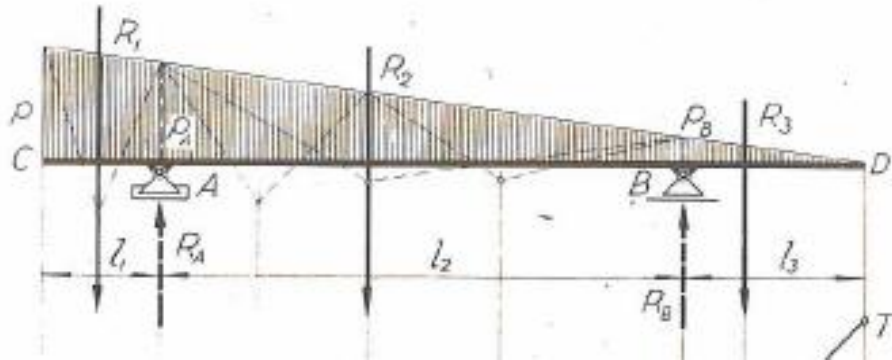
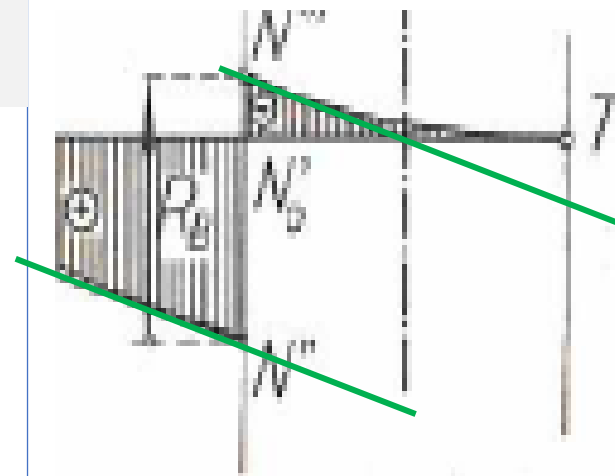
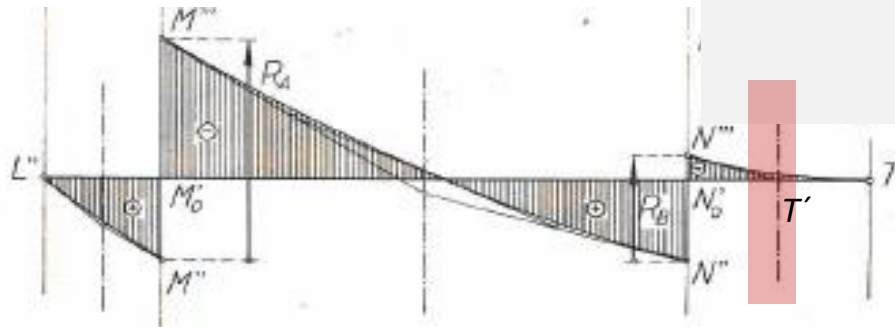
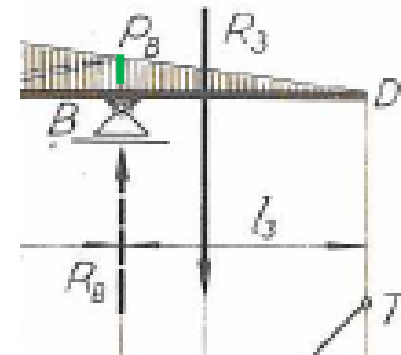


Diagrama de corte Q:

Como el valor de la función carga a ambos lados de B es el mismo (no hay un salto) esto nos dice que **la pendiente del diagrama de corte a ambos lados de B son iguales !**



Por lo tanto si trazamos una paralela a la pendiente $N''' T'$, por N'' obtenemos la tangente extrema del tramo central para el diagrama Q.

6. Determinación de los diagramas de características aplicando las relaciones diferenciales entre la funciones carga, corte y momento para la viga con dos voladizos y carga triangular.

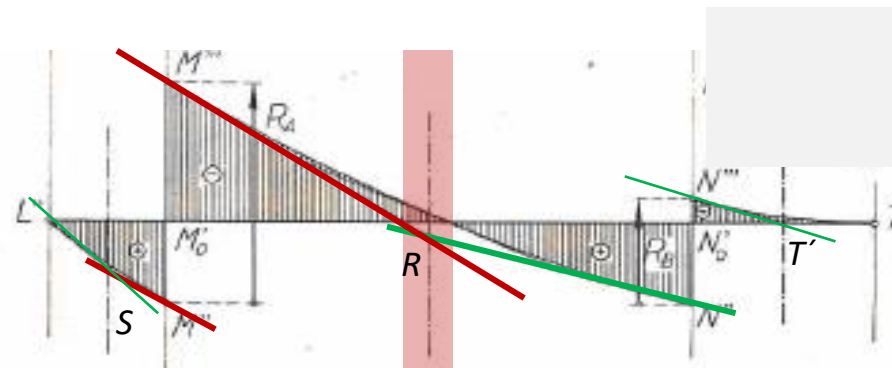
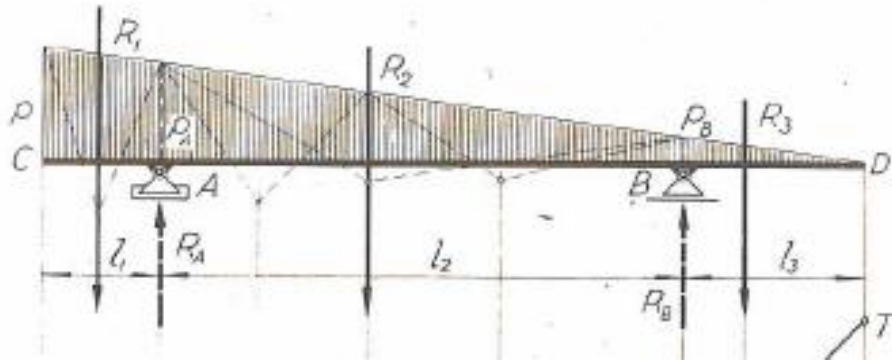


Diagrama de Corte Q:

Nuevamente dado que las tangentes extremas en una parábola de segundo grado se cortan en el centro de la luz, prolongando la tangente izquierda, don se se corta con el centro de l_2 obtenemos el punto R.

Uniendo R con M'' , obtenemos la otra tangente extrema.

Luego procedemos en A como hemos visto para B.

Llevamos una paralela a M''' por M''

En el centro del voladizo determinamos el punto S. Uniendo S con L'' obtenemos la otra tangente extrema para el voladizo izquierdo.

6. Determinación de los diagramas de características aplicando las relaciones diferenciales entre la funciones carga, corte y momento para la viga con dos voladizos y carga triangular.

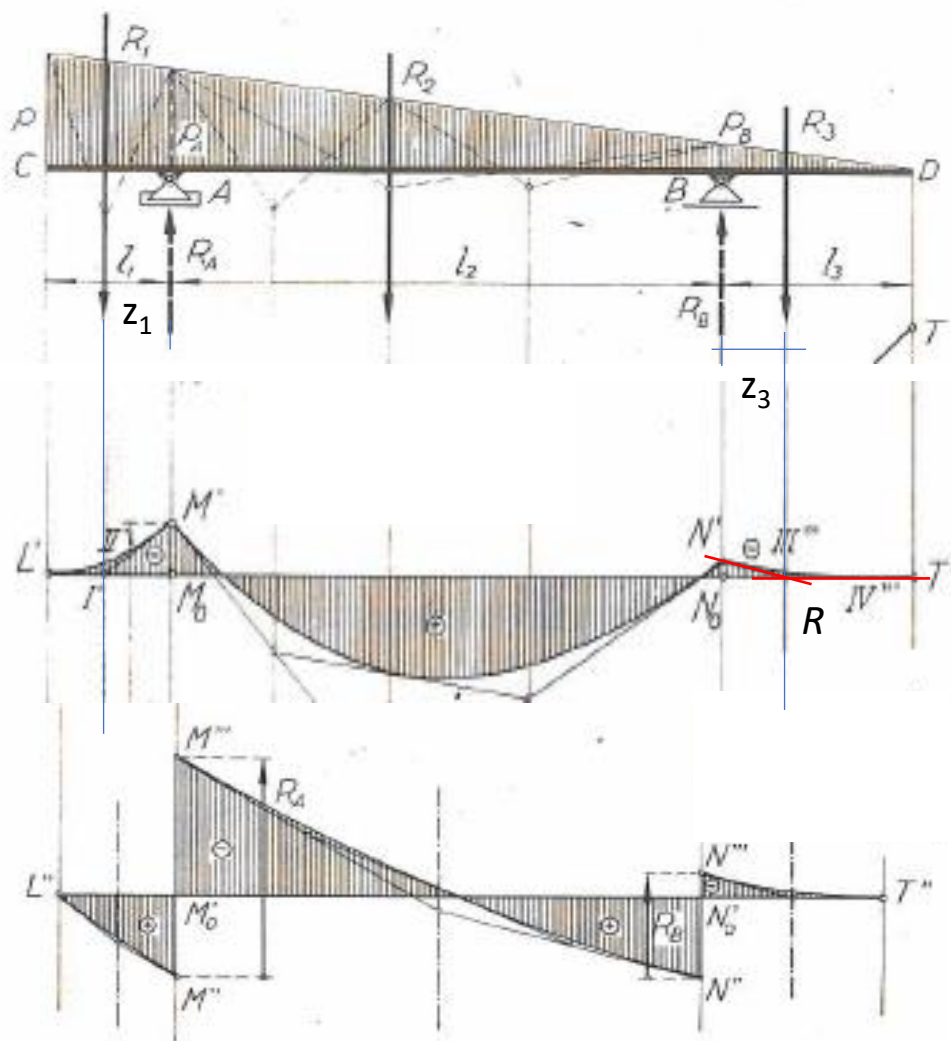


Diagrama de momentos M:

Podemos determinar los valores de M extremos en cada tramo.

$$M_C = 0$$

$$M_A = R_1 \cdot z_1$$

$$M_B = -(R_3 \cdot z_3)$$

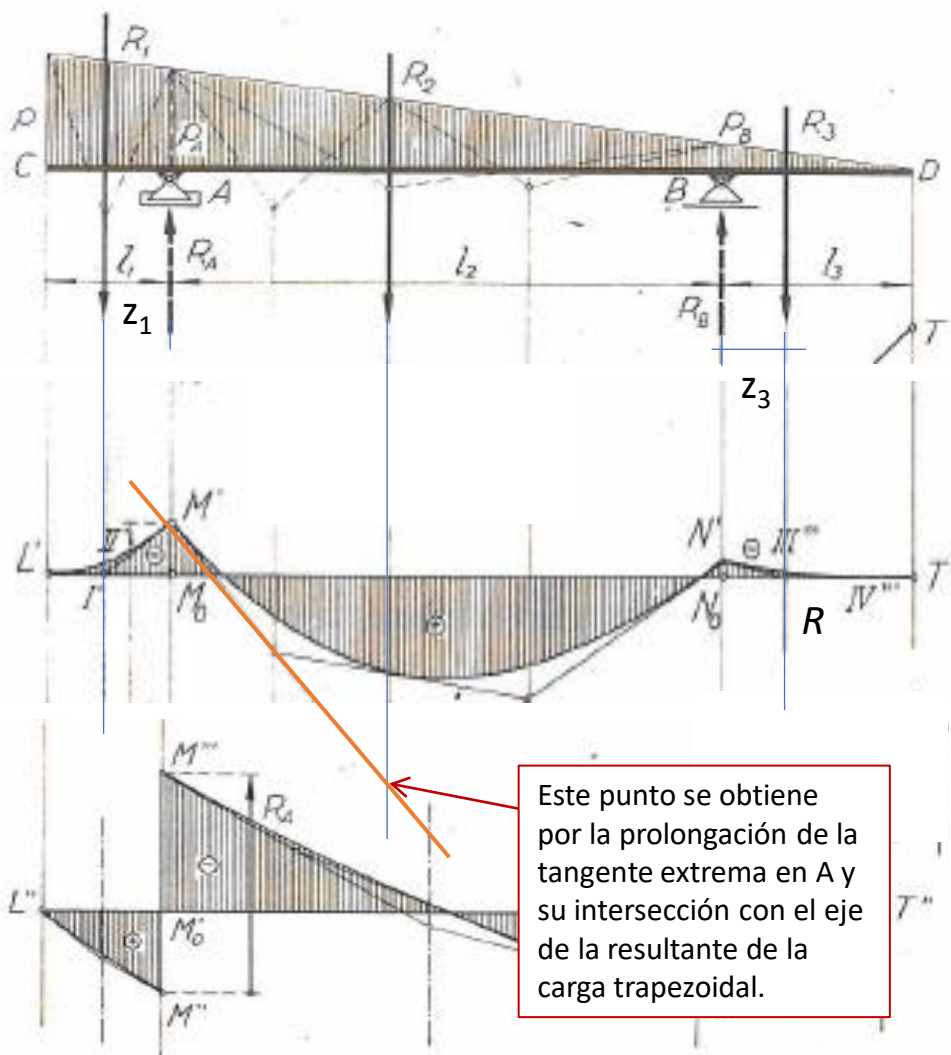
Determinación de las tangentes extremas para el voladizo derecho:

Como la función corte es cero en T'' en T' la función momento tiene tangente horizontal.

Las tangentes se cortan en el baricentro de la resultante de R₃. Así determinamos el punto R.

Uniéndolo N' con R determinamos la otra tangente extrema del voladizo.

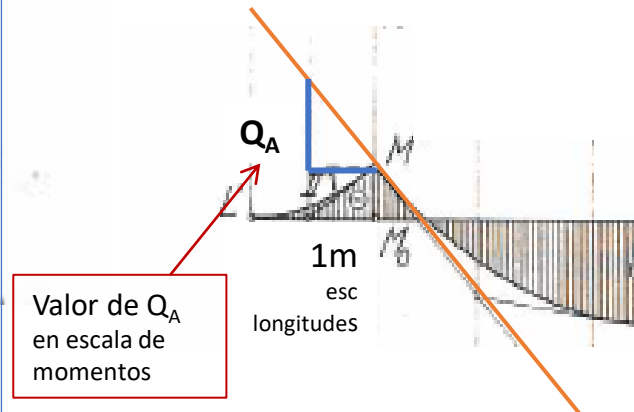
6. Determinación de los diagramas de características aplicando las relaciones diferenciales entre la funciones carga, corte y momento para la viga con dos voladizos y carga triangular.



Este punto se obtiene por la prolongación de la tangente extrema en A y su intersección con el eje de la resultante de la carga trapezoidal.

Diagrama de momentos M:
Determinación de las tangentes extremas en el tramo central:

Como vimos en la diapositiva 19 para la viga simplemente apoyada con carga triangular:



Valor de Q_A en escala de momentos

1m
esc
longitudes

6. Determinación de los diagramas de características aplicando las relaciones diferenciales entre la funciones carga, corte y momento para la viga con dos voladizos y carga triangular.

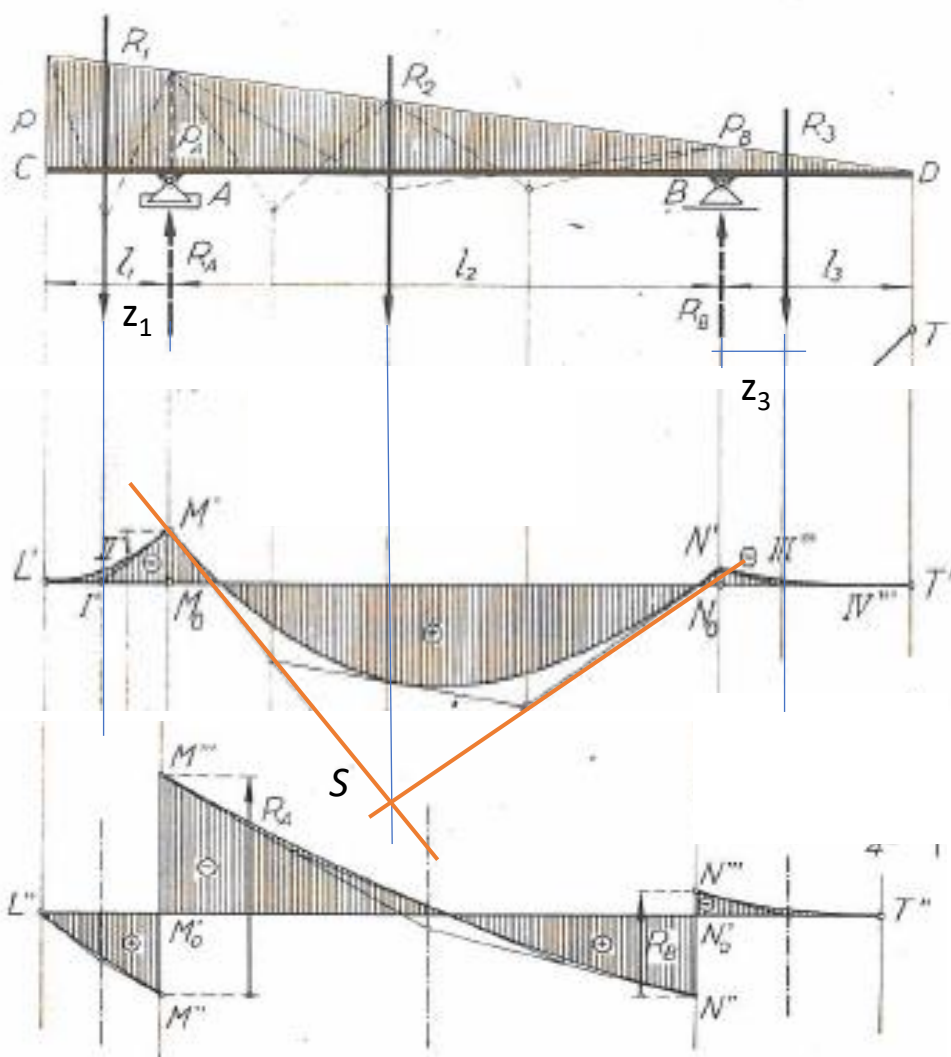


Diagrama de momentos M :
Determinación de las tangentes extremas en el tramo central:

Uniéndolo el punto S con el N' determinamos la otra tangente extrema para el tramo central.

6. Determinación de los diagramas de características aplicando las relaciones diferenciales entre la funciones carga, corte y momento para la viga con dos voladizos y carga triangular.

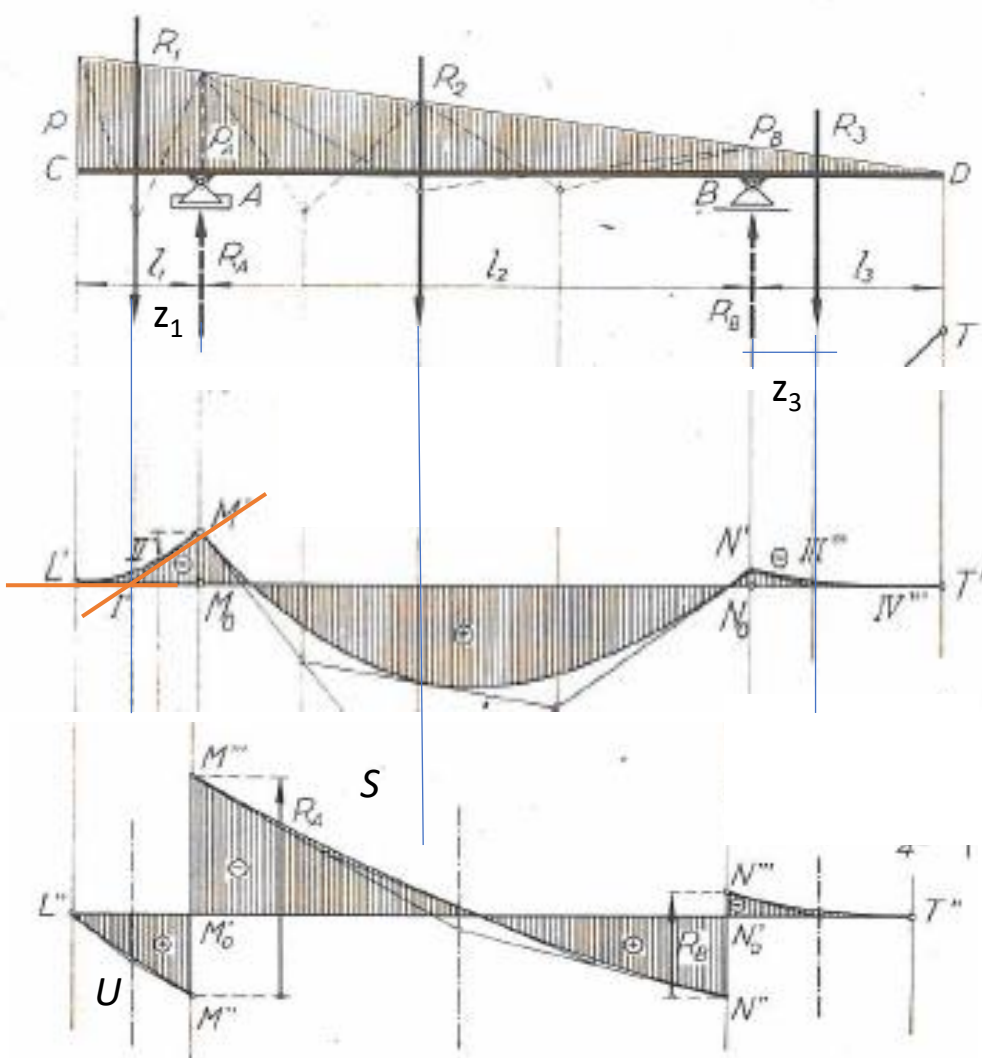


Diagrama de momentos M :
Determinación de las tangentes extremas en el tramo voladizo izquierdo:

Por último para este caso procedemos como en la diapositiva 30 para el voladizo derecho.

Como la función corte es cero en L'' en L' la función momento tiene tangente horizontal.

Las tangentes se cortan en el baricentro de la resultante de R_1 . Así determinamos el punto U .

Uniendo U con M'' determinamos la otra tangente extrema del voladizo.

6. Determinación de los diagramas de características aplicando las relaciones diferenciales entre la funciones carga, corte y momento para la viga con dos voladizos y carga triangular.

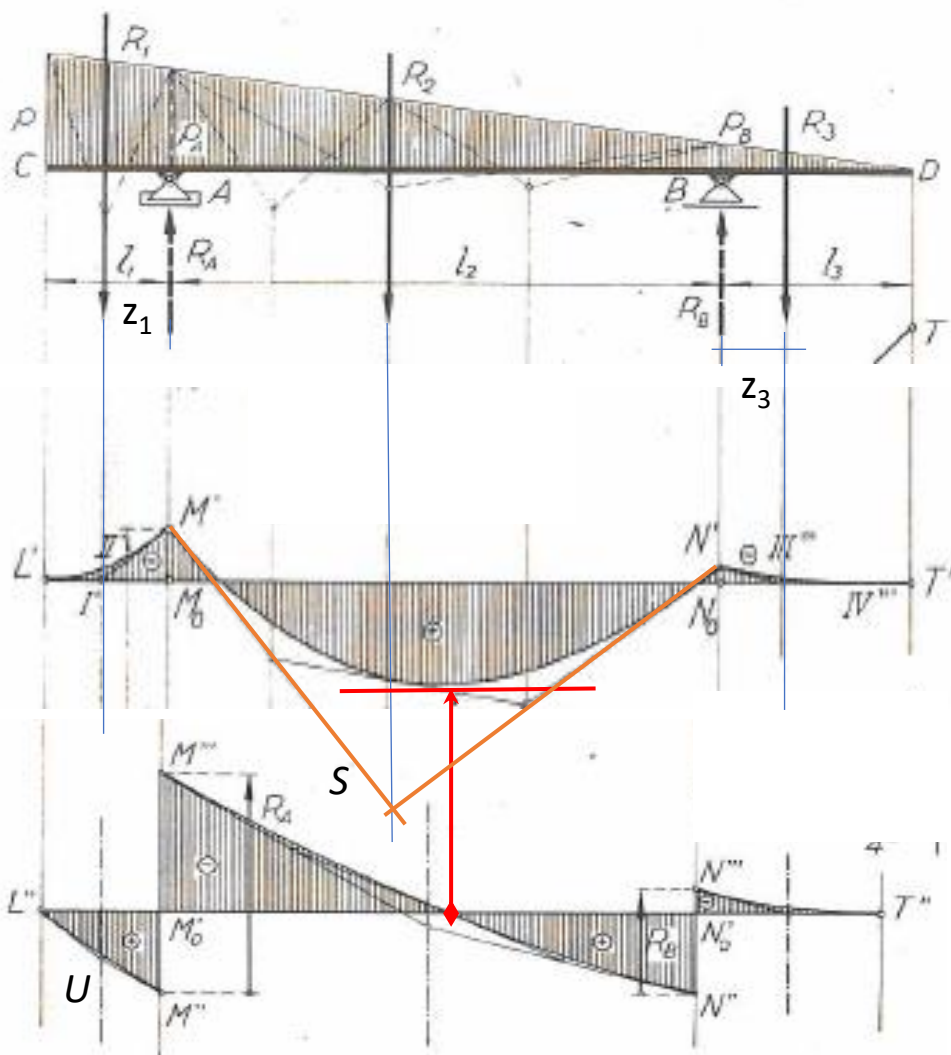


Diagrama de momentos M :

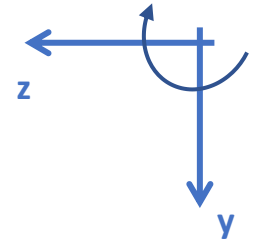
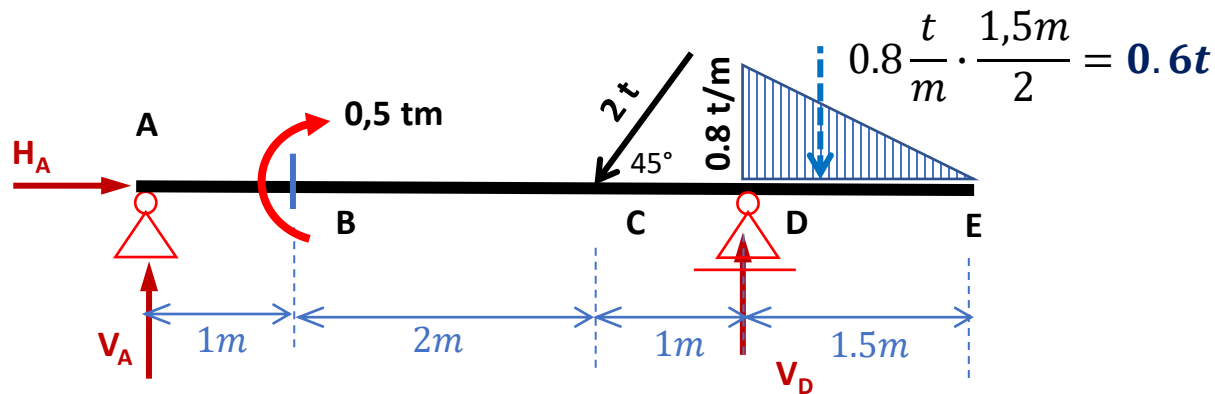
Observar que el valor de Momento máximo coincide con el punto de $Q=0$, y la tangente en este punto es horizontal, obedeciendo a la relación diferencial

Para el cálculo de la distancia desde B a este punto y el valor de M_{max} podemos proceder calculando la función carga, como hemos hecho para la carga triangular en la barra simplemente apoyada.

Ver diapositiva 22

Las tangentes extremas en el tramo central se cortan en S , baricentro de R_2 , pero no tiene porqué coincidir con la ordenada de momento máximo.

7. Diagrama de características en una viga simplemente apoyada con voladizo. Ejemplo



7.1 Reacciones de vínculo

$$\sum H_i = 0, -H_A + 2t \cdot \cos 45^\circ \rightarrow H_A = 1.41 \text{ ton}$$

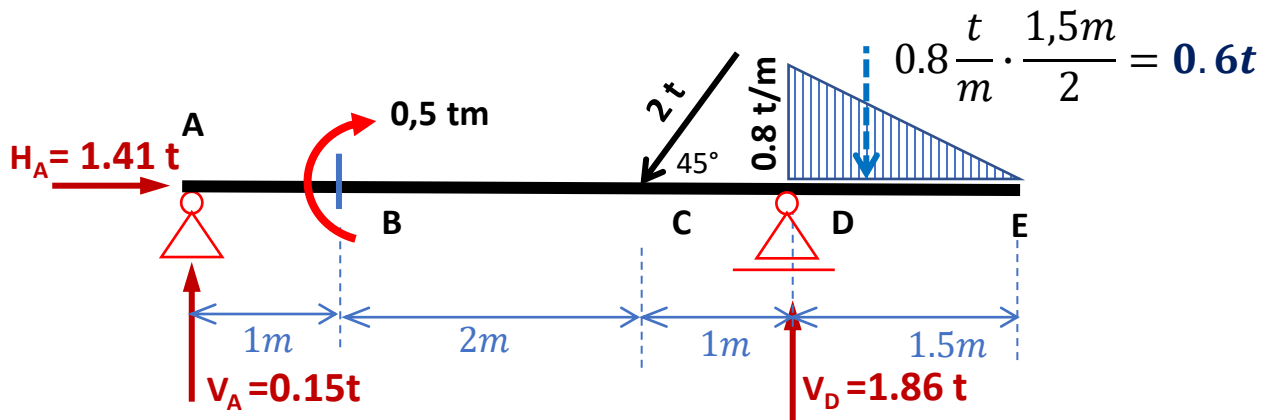
$$\sum V_i = 0, -V_A - V_D + 2t \cdot \sin 45^\circ + 0.6t \rightarrow V_A = 2.01 \text{ ton} - V_D$$

$$\sum M_i^A = 0, 0,5 \text{ tm} + 2 \text{ ton} \cdot \sin 45^\circ \cdot 3m - V_D \cdot 4m + 0.6 \text{ ton} \cdot 4.5m$$

$$\sum M_i^A = 0, 0,5 \text{ tm} + 4,243 \text{ tm} - V_D \cdot 4m + 2.7 \text{ tm} = 0 \rightarrow V_D = 1.86 \text{ ton}$$

$$V_A = 2.01 \text{ ton} - 1.86 \text{ ton} = 0.15 \text{ ton}$$

7. Diagrama de características en una viga simplemente apoyada con voladizo. Ejemplo



7.2 Verificación de las reacciones de vínculo

Tomamos sumatoria de momentos con respecto al punto D.

$$\sum M_i^D = 0.15 \text{ ton} \cdot 4m + 0,5 \text{ tm} - 2 \text{ ton} \cdot \text{sen } 45^\circ \cdot 1m + 0,6 \text{ ton} \cdot 0,5m$$

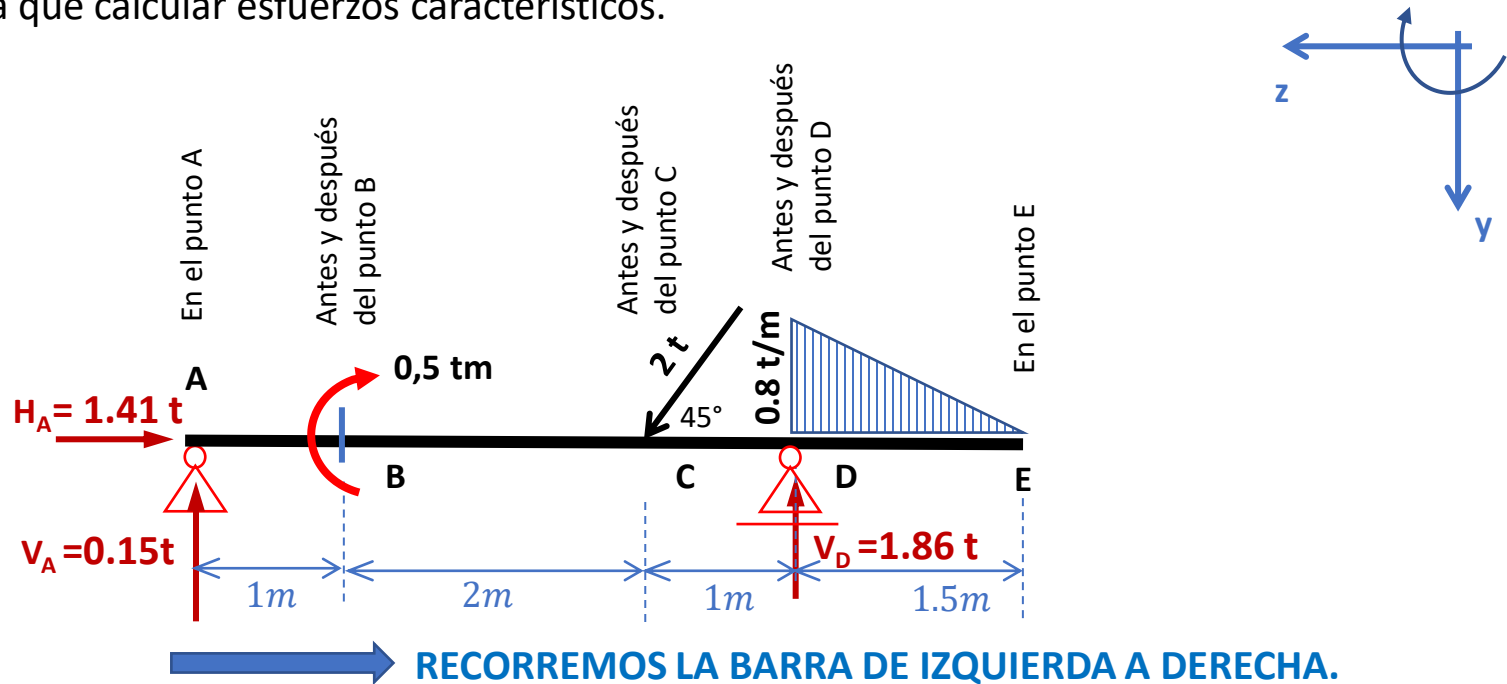
$$\sum M_i^D = 0.6 \text{ tm} + 0,5 \text{ tm} - 1.41 \text{ tm} + 0.3 \text{ tm} = -0.01 \cong 0 \quad \checkmark$$



Es muy importante antes de continuar que hagan esta verificación !!

7.3 Diagrama de corte

7.3.1 Primeramente determinamos los puntos donde cambia la función carga y allí será donde habrá que calcular esfuerzos característicos.



En el punto A

$$Q_A = V_A = -0,15 t$$

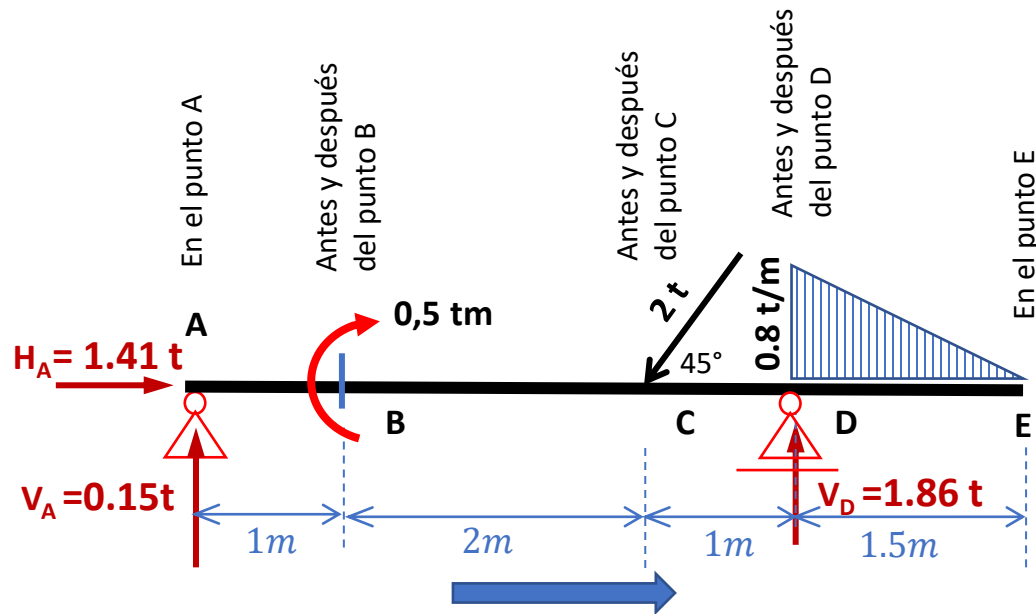
En el punto B hay aplicado un momento \rightarrow la función corte no cambia.

$$Q_{Cantes} = -0,15 t$$

$$Q_{Cdespués} = -0,15 t + 2t \cdot \text{sen } 45^\circ = 1.26 t$$

7.3 Diagrama de corte

7.3.1 Primeramente determinamos los puntos donde cambia la función carga y allí será donde habrá que calcular esfuerzos característicos.



$$Q_{Dantes} = 1.26 t$$

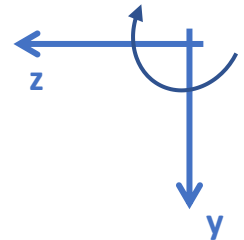
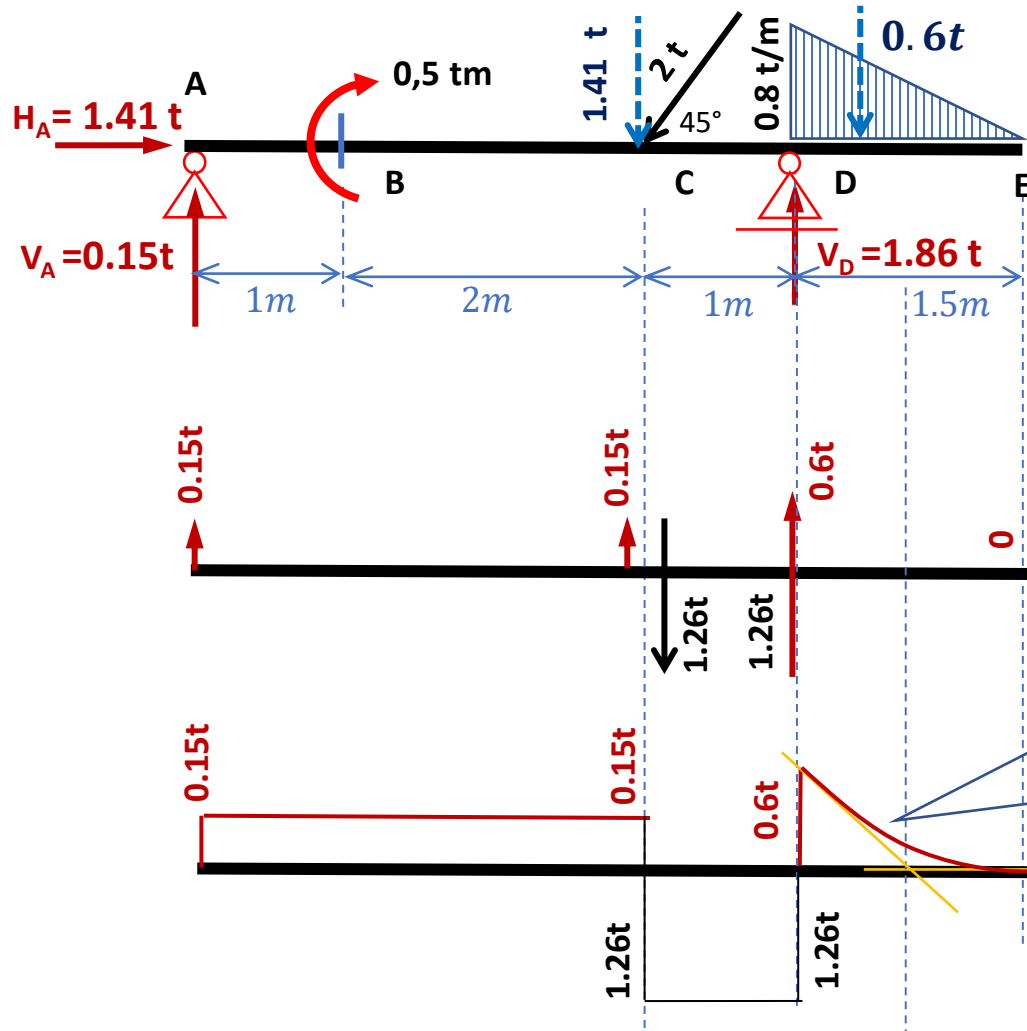
$$Q_{Ddespués} = 1,26 t - 1.86 t = -0.6 t$$

$$Q_E = 0$$

7. Diagrama de características en una viga simplemente apoyada con voladizo . Ejemplo

7.3 Diagrama de corte

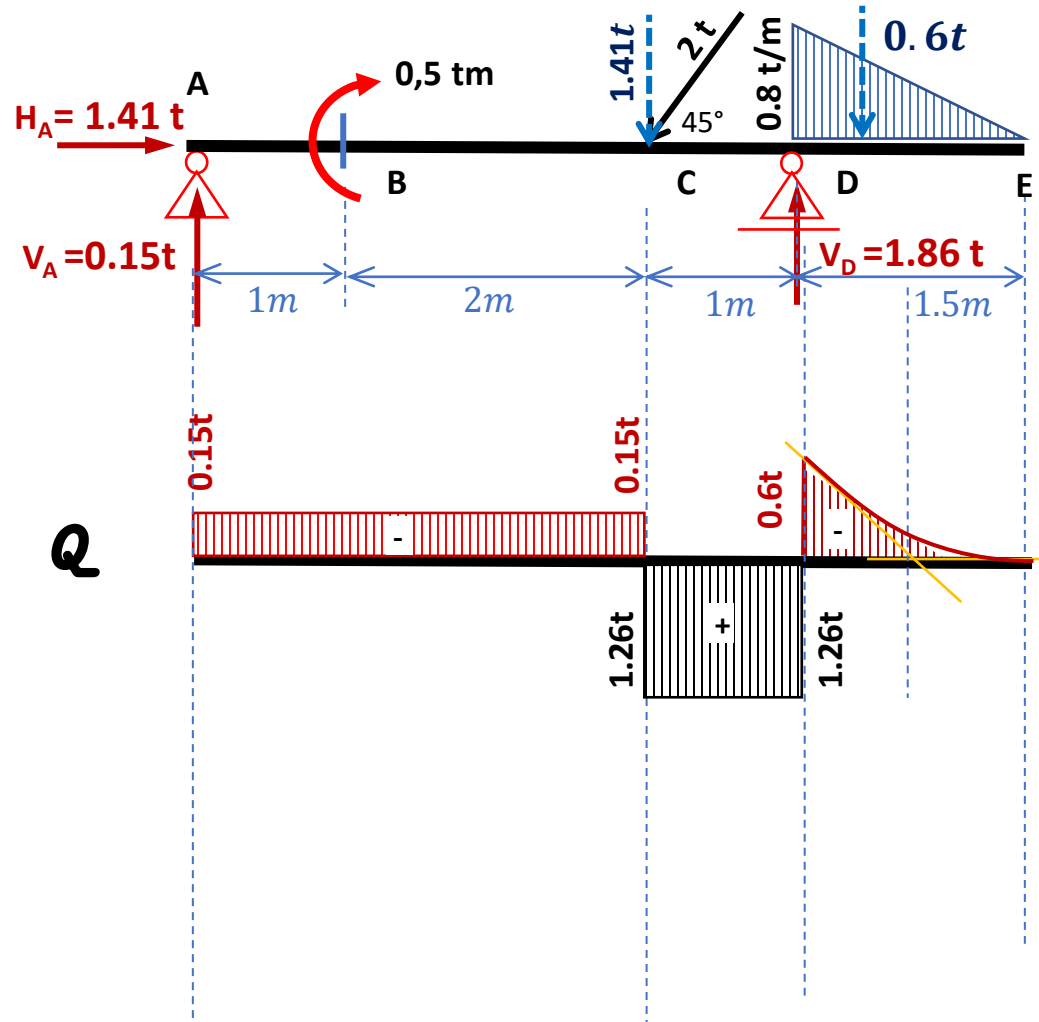
7.3.1 Con esos valores y en función de la variación de la función carga trazamos los diagramas.



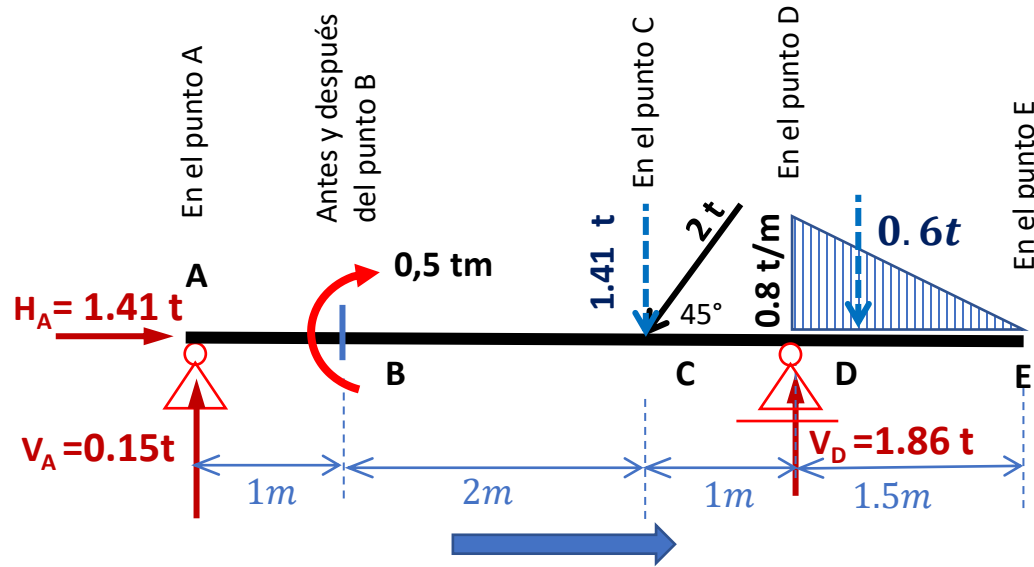
La función carga es lineal. La función corte será cuadrática. Las tangentes extremas se cortan en el centro de la longitud de la carga. Además en E sabemos que la tangente es horizontal ya que $p(z) = 0$

7.3 Diagrama de corte

7.3.1 Con esos valores y en función de la variación de la función carga trazamos los diagramas.



7.4 Diagrama de Momentos



$$M_A = 0$$

$$M_{B \text{ antes}} = 0.15 t \cdot 1 m = 0.15 t m$$

$$M_{B \text{ después}} = 0.15 t m + 0,5 t m = 0.65 t m$$

$$M_C = 0.15 t \cdot 3 m + 0,5 t m = 0.95 t m$$

$$M_D = 0.15 t \cdot 4 m + 0,5 t m - 1.41 t \cdot 1 m = -0,31 t m$$

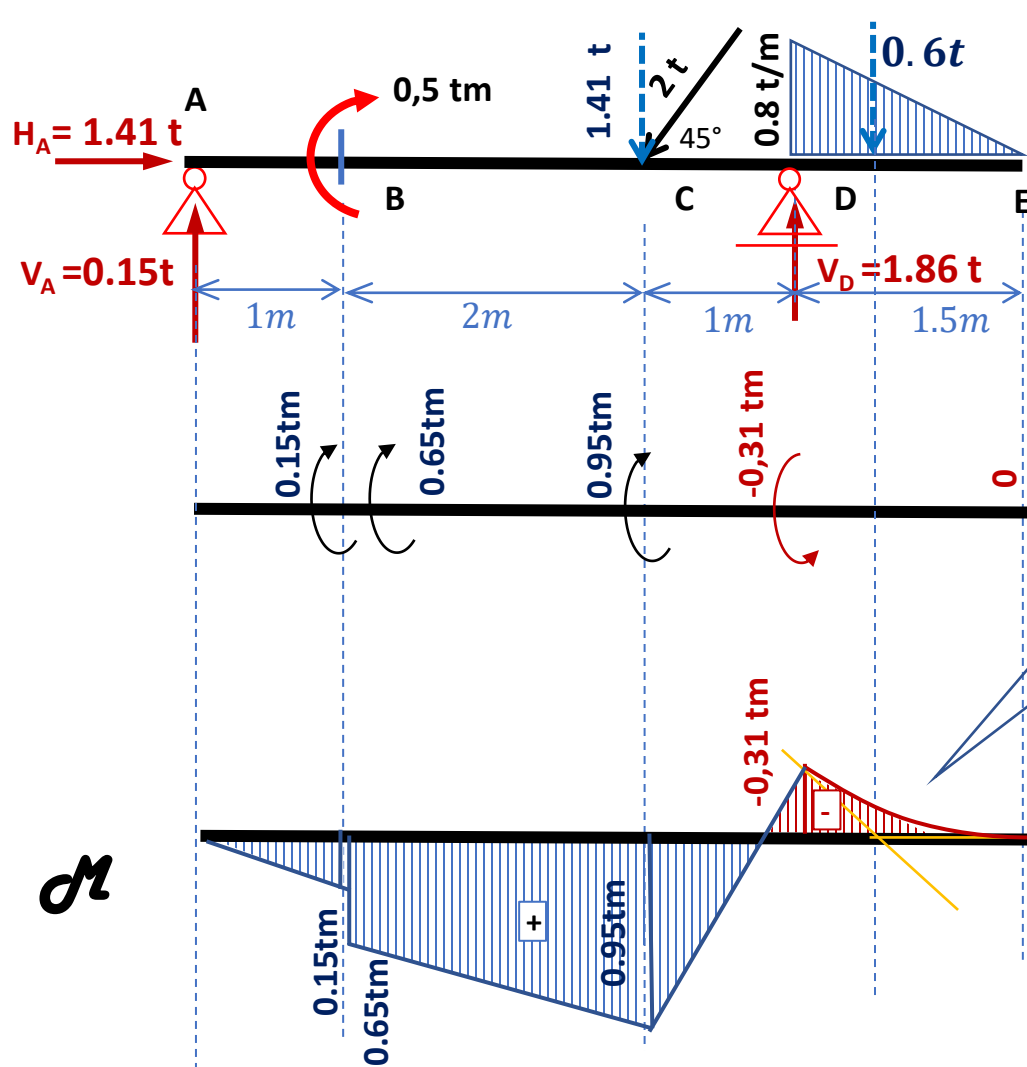
$$M_E = 0.15 t \cdot 5.5 m + 0,5 t m - 1.41 t \cdot 2,5 m + 1.86 t \cdot 1.5 m - 0,6 \cdot 1 m = -0.01 \cong 0 \quad \checkmark$$

De antemano conocíamos el valor de M_E , ya que si leemos a derecha de la sección obtenemos cero como valor. Pero es una buena verificación de equilibrio !

7. Diagrama de características en una viga simplemente apoyada con voladizo . Ejemplo

7.3 Diagrama de Momentos

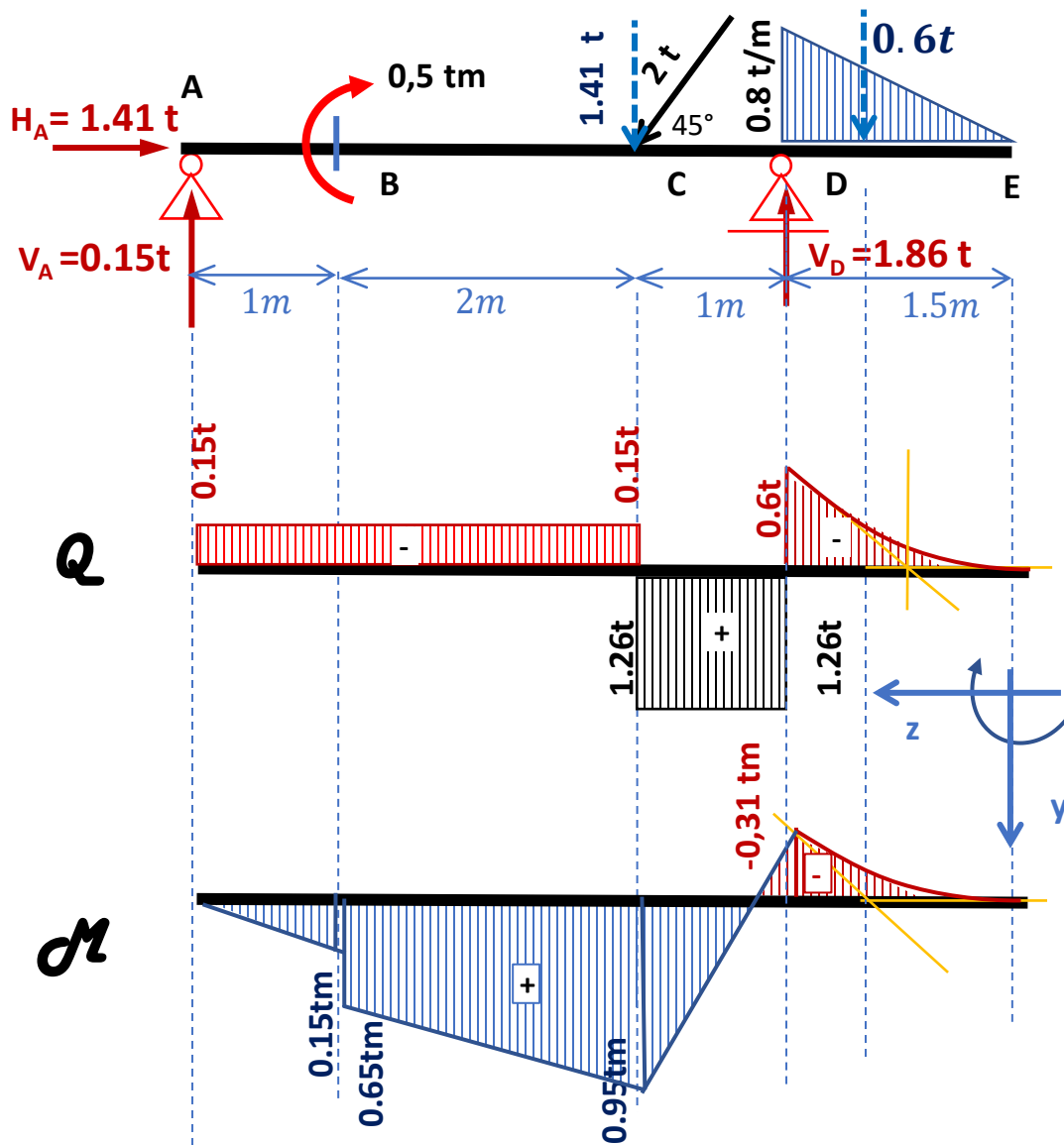
7.3.1 Con esos valores y en función de la variación de la función carga trazamos los diagramas.



La función corte es una parábola de segundo grado en este tramo. La función momento será una parábola de tercer grado. Las tangentes extremas se cortan en el baricentro de la carga distribuida. Además en E sabemos que la tangente es horizontal ya que $Q(z_E) = 0$

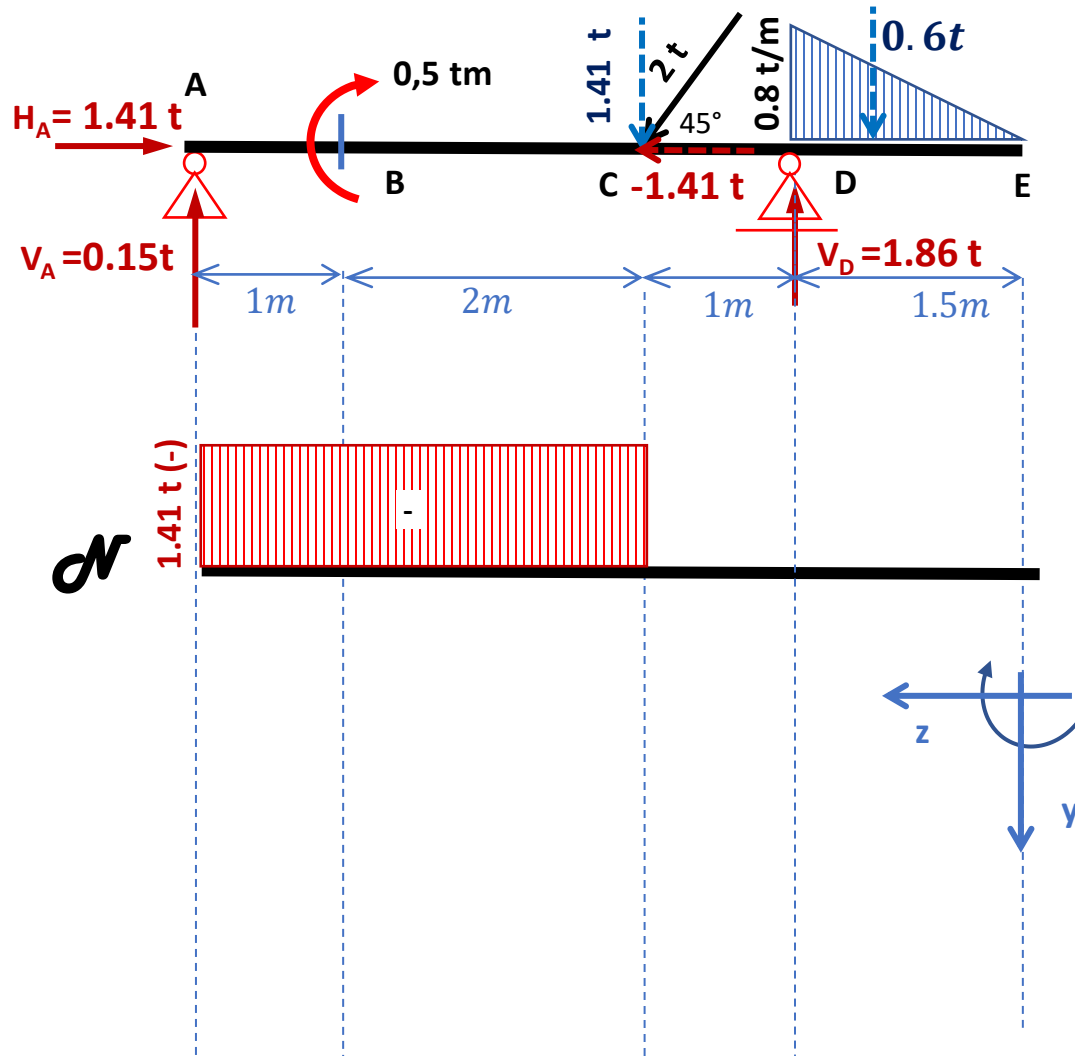
7. Diagrama de características en una viga simplemente apoyada con voladizo . Ejemplo

7.4 Verificación a través de las ecuaciones diferenciales



Verificamos el orden de las funciones carga, Q y M, cuando son crecientes o decrecientes y que en el punto de $Q=0$, M tiene su valor máximo

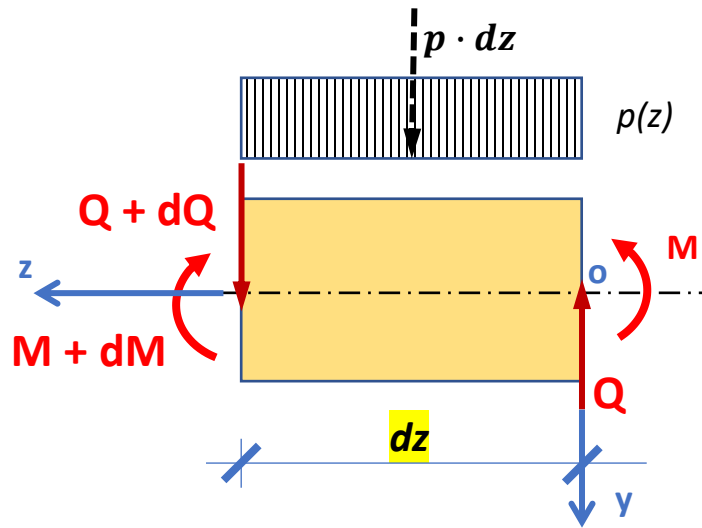
7.5 Diagrama de esfuerzos normales.



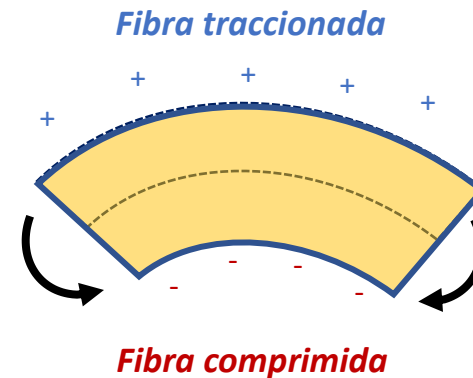
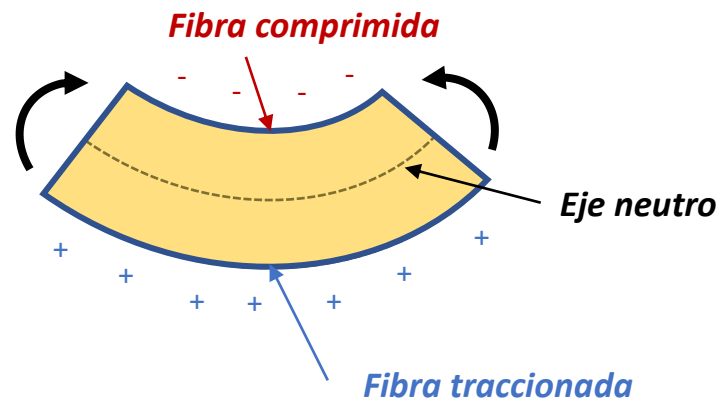
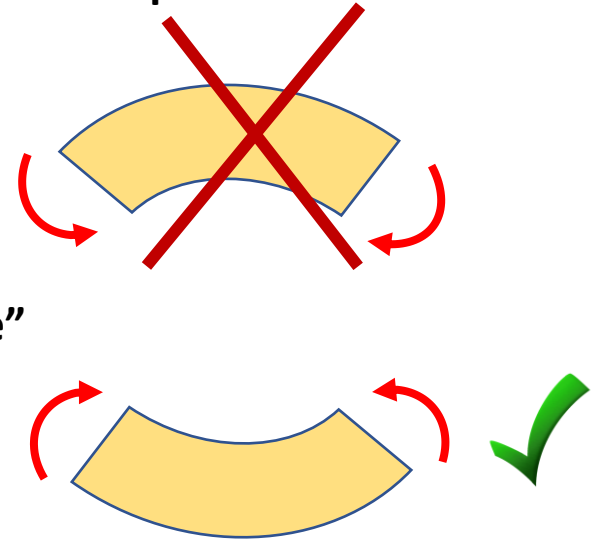
Siguiendo la convención para esfuerzos axiales en Reticulado, adoptamos positivo para barra traccionada y negativo para barra comprimida. Que scon el criterio de signo e corresponde con la terna izquierda que estamos utilizando para los valores en z.

8. EL CONCEPTO DE “FIBRA TRACCIONADA”

Analicemos una vez más la porción diferencial de barra de la diapositiva 16

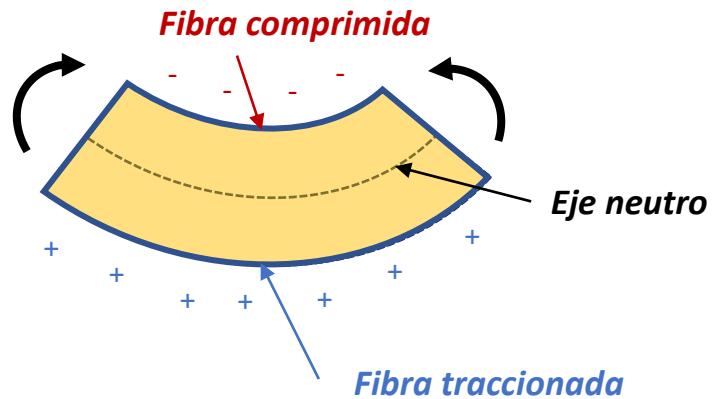


Si aceptáramos por un momento que pudiera deformarse, “flexionarse” debido al momento flexor, como lo haría ?



8. EL CONCEPTO DE “FIBRA TRACCIONADA” Una forma “naiv” de ver el tema.

Fibras superiores



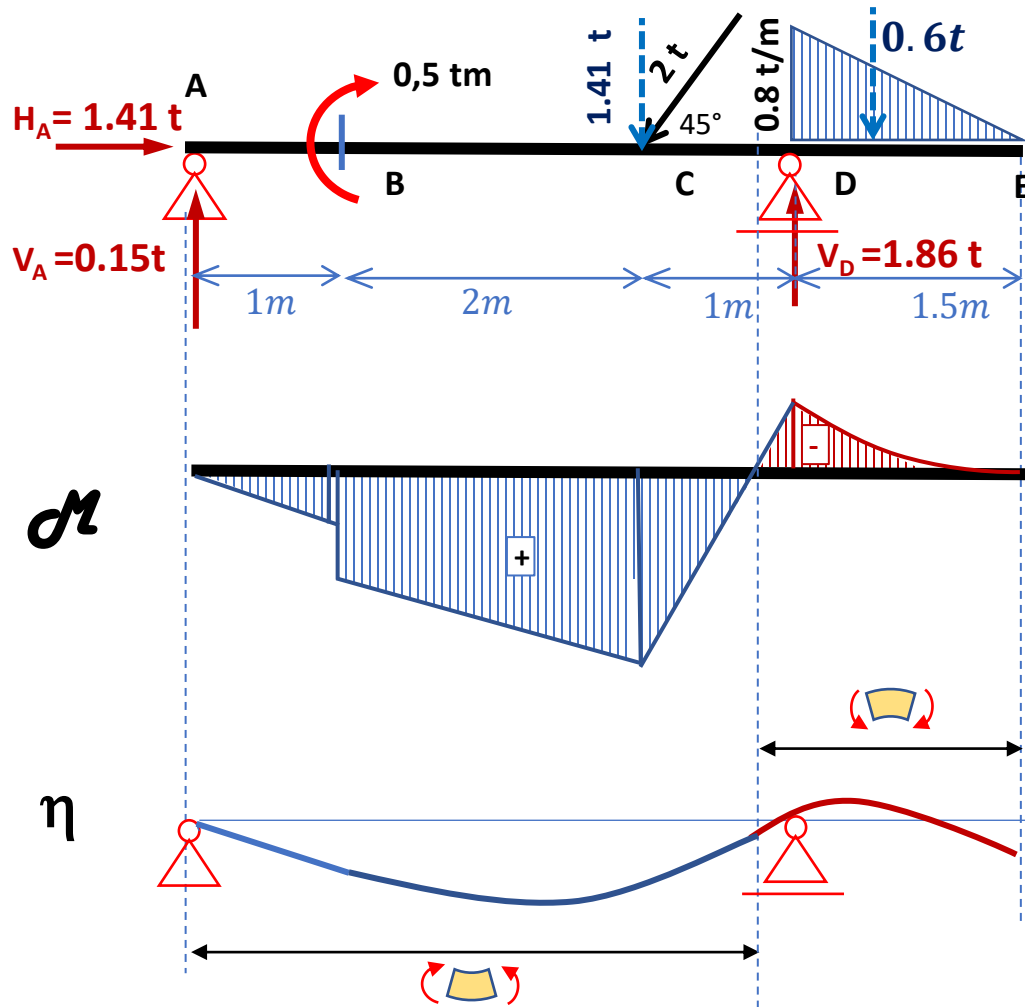
Fibras del eje neutro

Fibras inferiores

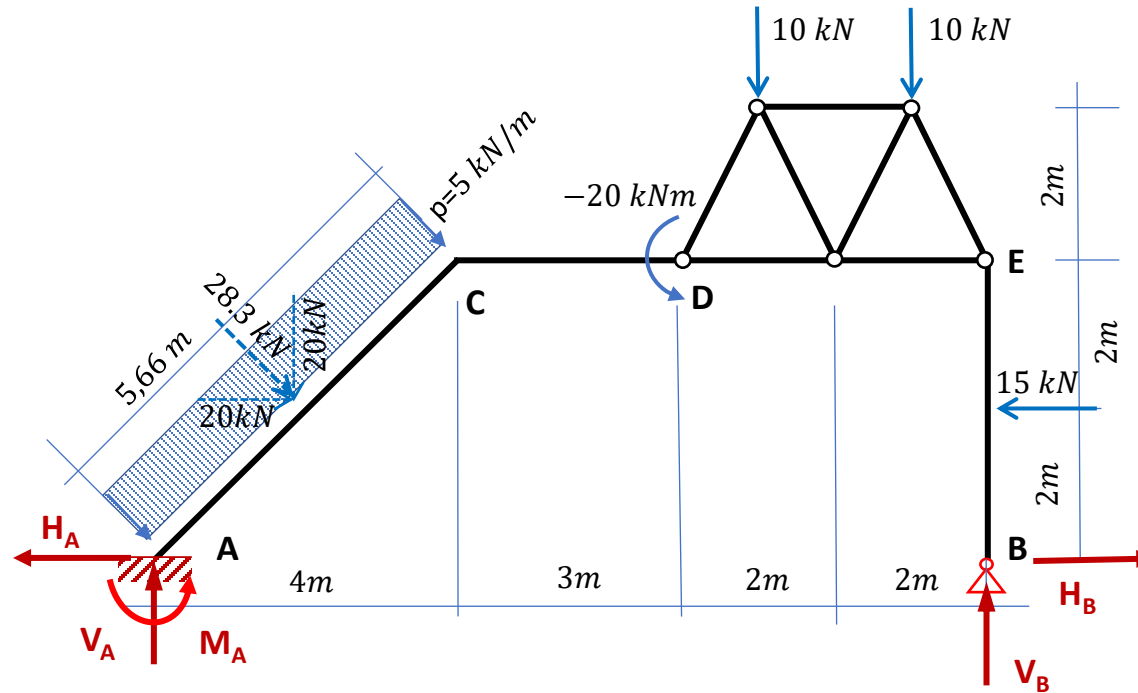


8. EL CONCEPTO DE “FIBRA TRACCIONADA”

En el ejemplo de la viga del punto 7, el diagrama de momentos queda dibujado del lado de las fibras traccionadas y además nos da una idea cualitativa de la deformada de la barra.



9. RESOLUCIÓN DE UNA ESTRUCTURA MIXTA: ALMA LLENA + RETICULADO - EJEMPLO.



9.1 Reacciones de Vínculo

$$\Sigma M_{der}^E = 0$$

$$-H_B \cdot 4m + 15 \text{ kN} \cdot 2m = 0$$

$$H_B = 7.5 \text{ kN}$$

$$\Sigma H_i = 0$$

$$H_A - 20 \text{ kN} + 15 \text{ kN} - H_B = 0$$

$$H_A = 20 \text{ kN} - 15 \text{ kN} + 7.5 \text{ kN}$$

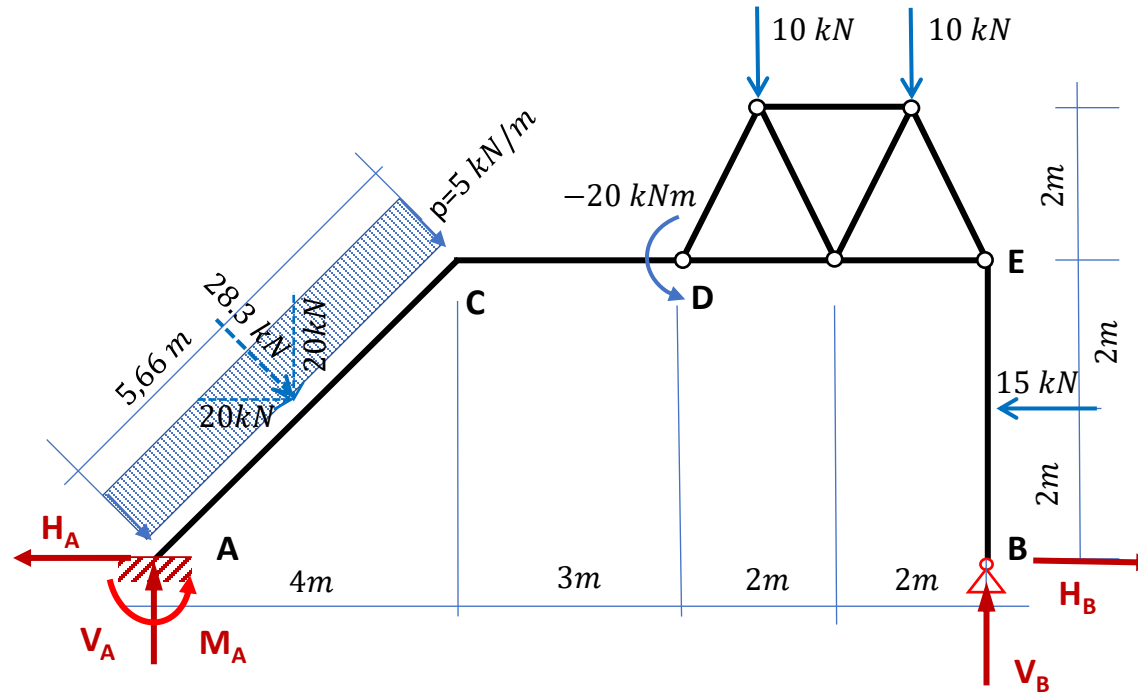
$$H_A = 12.5 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_{der}^D = 0 \rightarrow 10 \text{ kN} \cdot 1m + 10 \text{ kN} \cdot 3m + 15 \text{ kN} \cdot 2m - H_B \cdot 4m - V_B \cdot 4m = 0$$

$$10 \text{ kN} \cdot 1m + 10 \text{ kN} \cdot 3m + 15 \text{ kN} \cdot 2m - 7.5 \cdot 4m - V_B \cdot 4m = 0$$

$$V_B = 10 \text{ kN}$$

9. RESOLUCIÓN DE UNA ESTRUCTURA MIXTA: ALMA LLENA + RETICULADO - EJEMPLO.



9.1 Reacciones de Vínculo

$$\Sigma M_{der}^E = 0 \quad H_B = 7.5 \text{ kN}$$

$$\Sigma H_i = 0 \quad H_A = 12.5 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_{der}^D = 0 \quad V_B = 10 \text{ kN}$$

$$\Sigma M^A = 0 \rightarrow -M_A + 28.3 \text{ kN} \cdot \frac{5.66 \text{ m}}{2} - 20 \text{ kNm} + 10 \text{ kN} \cdot 8 \text{ m} + 10 \text{ kN} \cdot 10 \text{ m} - 15 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} - V_B \cdot 11 \text{ m} = 0$$

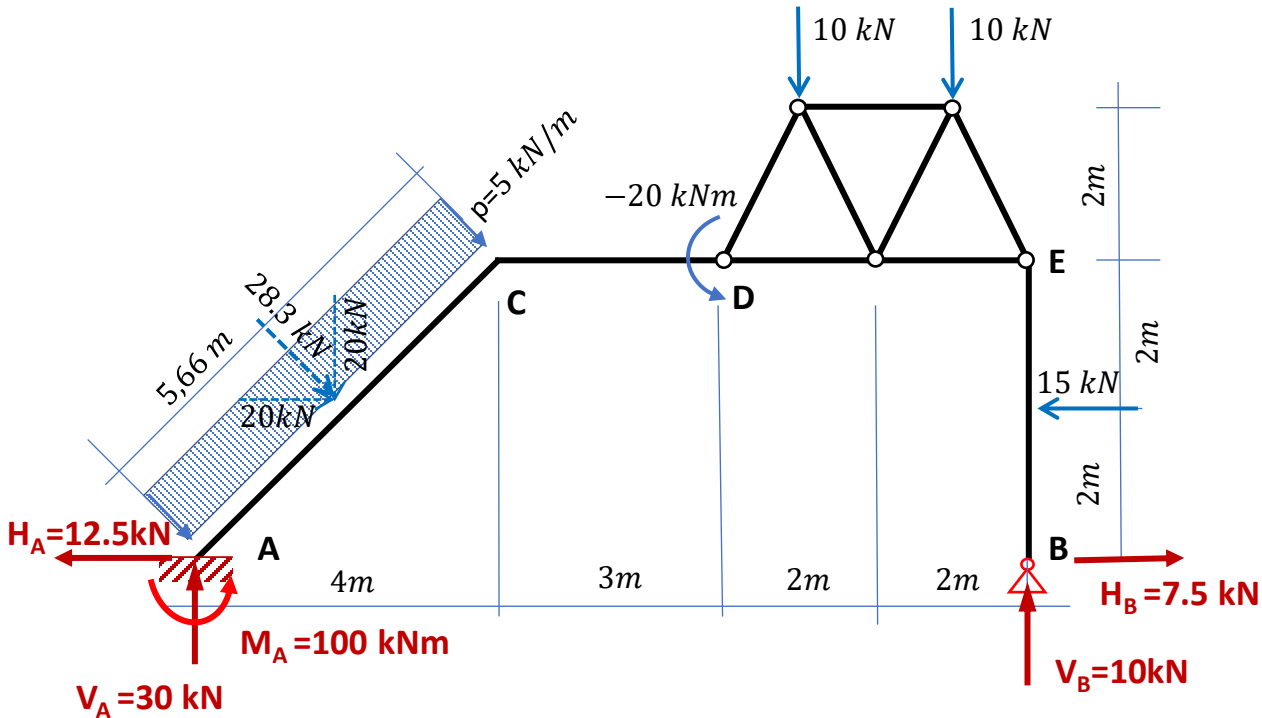
$$-M_A + 28.3 \text{ kN} \cdot \frac{5.66 \text{ m}}{2} - 20 \text{ kNm} + 10 \text{ kN} \cdot 8 \text{ m} + 10 \text{ kN} \cdot 10 \text{ m} - 15 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} - 10 \text{ kN} \cdot 11 \text{ m} = 0$$

$$M_A = 100 \text{ kNm}$$

$$\Sigma V_i = 0 \rightarrow -V_A + 20 \text{ kN} + 10 \text{ kN} + 10 \text{ kN} - V_B = 0 \rightarrow -V_A + 40 \text{ kN} - 10 \text{ kN} = 0$$

$$V_A = 30 \text{ kN}$$

9. RESOLUCIÓN DE UNA ESTRUCTURA MIXTA: ALMA LLENA + RETICULADO - EJEMPLO.



9.2 Verificación de las Reacciones de Vínculo

$$\Sigma M^B = 0$$

$$\sum M^B = -100 \text{ kNm} + 30 \text{ kN} \cdot 11 \text{ m} + 20 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} - 20 \text{ kN} \cdot 9 \text{ m} - 20 \text{ kNm} - 10 \text{ kN} \cdot 3 \text{ m} - 10 \text{ kN} \cdot 1 \text{ m} - 15 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} =$$

$$-100 \text{ kNm} + 330 \text{ kNm} + 40 \text{ kNm} - 180 \text{ kNm} - 20 \text{ kNm} - 30 \text{ kNm} - 10 \text{ kNm} - 30 \text{ kNm} = 0 \quad \checkmark$$

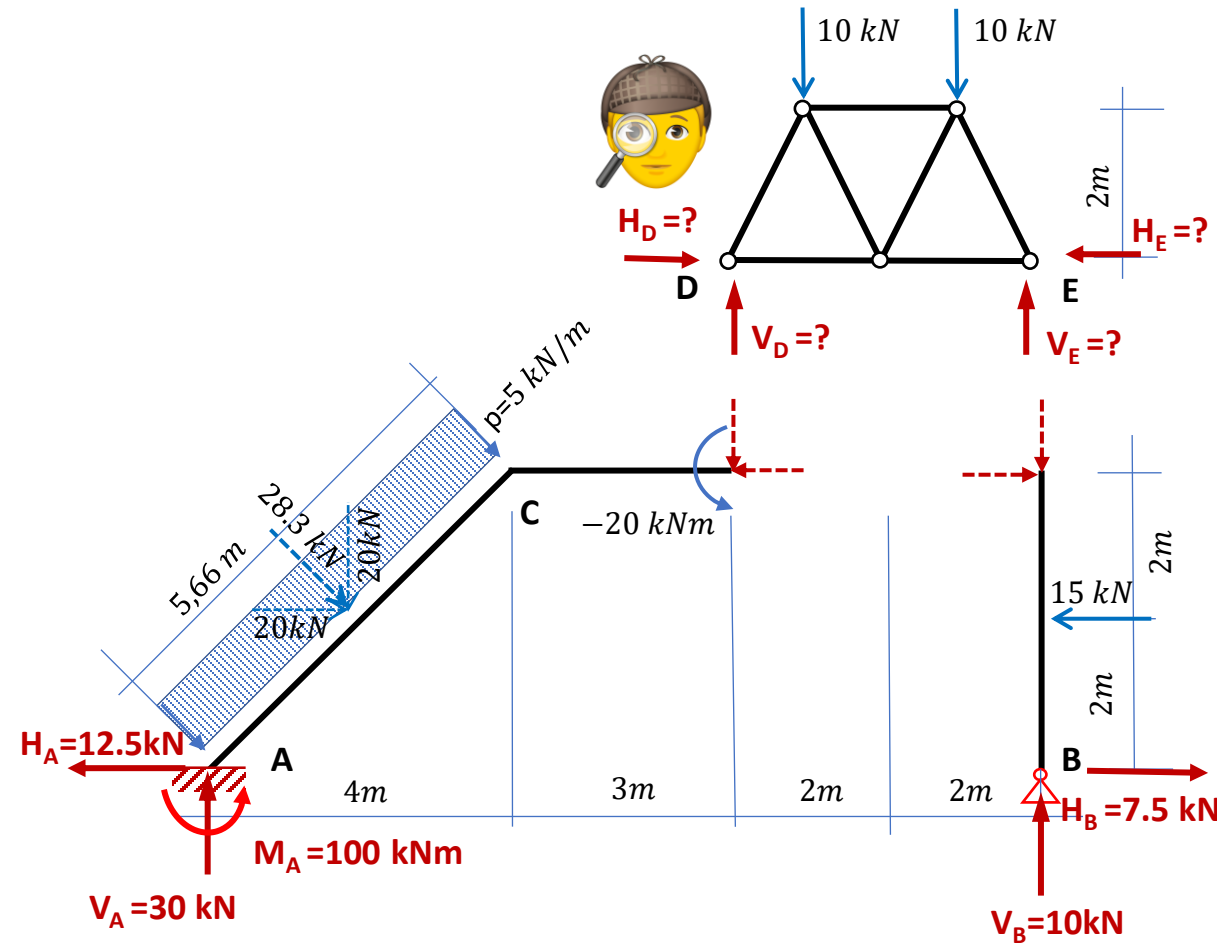
9. RESOLUCIÓN DE UNA ESTRUCTURA MIXTA: ALMA LLENA + RETICULADO - EJEMPLO.

9.3 Reacciones de vínculo interno en las articulaciones D y E para la resolución del reticulado.

EL TODO Y LAS PARTES DEBEN ESTAR EN EQUILIBRIO

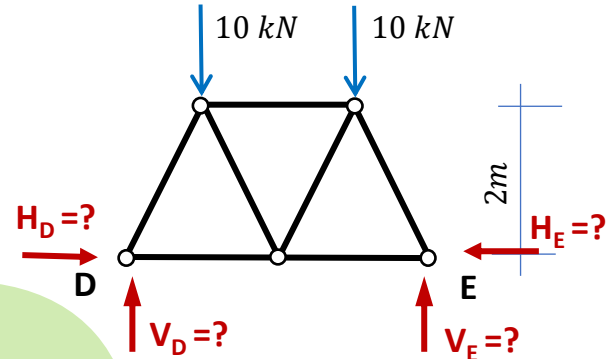


Que mantiene al reticulado en equilibrio?:
 H_D y V_D , resultante de las proyecciones de Q y N a la izquierda de la articulación D +
 H_E y V_E , resultante de las proyecciones a la derecha de E.



9. RESOLUCIÓN DE UNA ESTRUCTURA MIXTA: ALMA LLENA + RETICULADO - EJEMPLO.

9.3 Reacciones de vínculo interno en las articulaciones D y E para la resolución del reticulado.

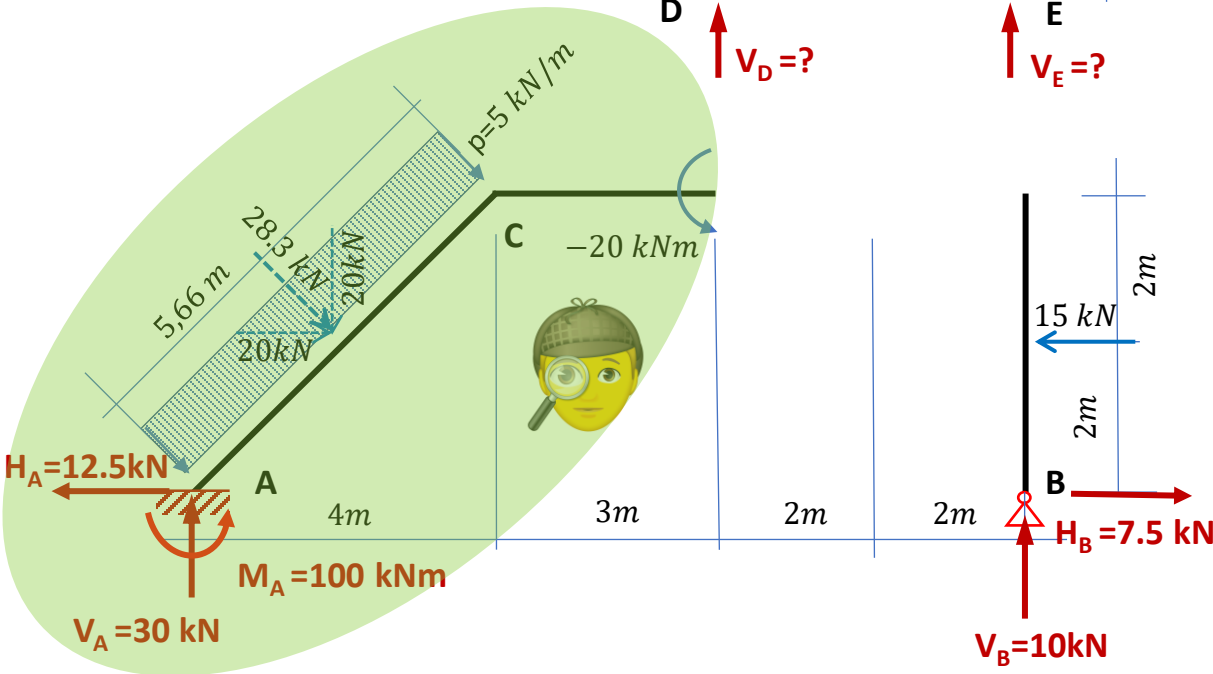


$$\sum H_{izq D} = +12.5kN - 20kN$$

$$\sum H_{izq D} = -7.5kN$$

$$\sum V_{izq D} = -30 kN + 20kN$$

$$\sum V_{izq D} = -10 kN$$



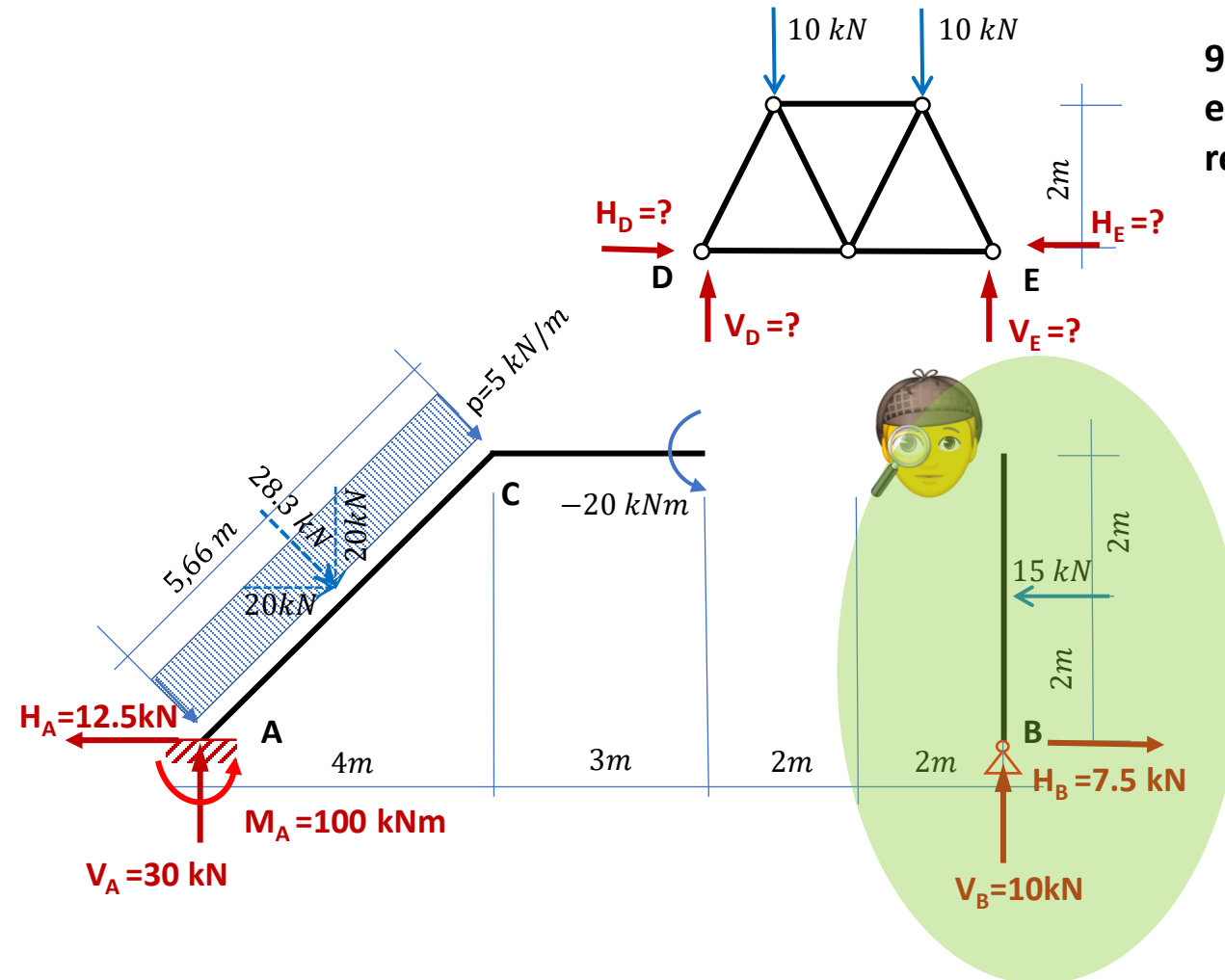
9. RESOLUCIÓN DE UNA ESTRUCTURA MIXTA: ALMA LLENA + RETICULADO - EJEMPLO.

9.3 Reacciones de vínculo interno en las articulaciones D y E para la resolución del reticulado.

$$\sum H_{derE} = +15kN - 7.5kN$$

$$\sum H_{derE} = 7.5kN$$

$$\sum V_{derE} = -10kN$$



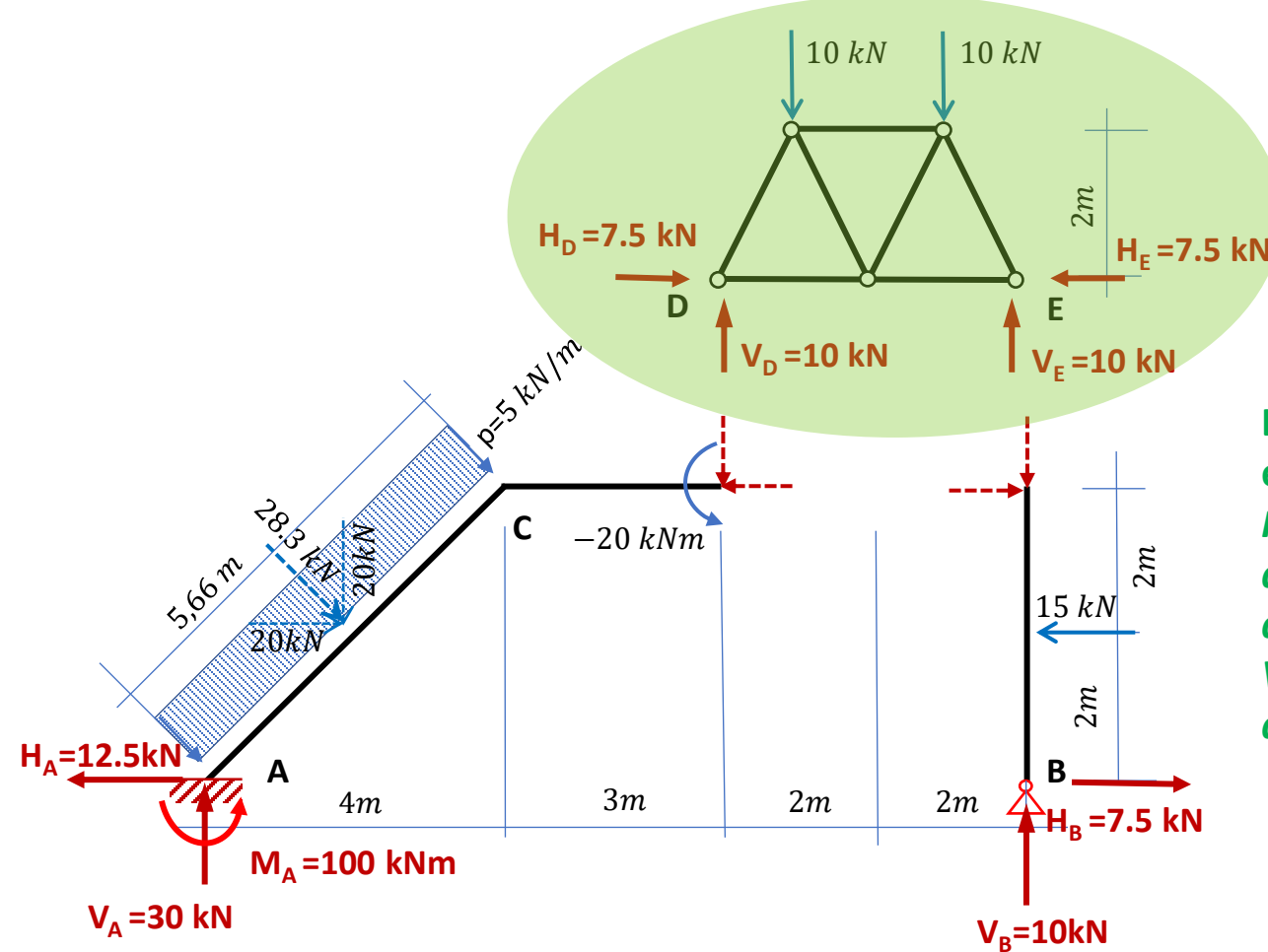
9. RESOLUCIÓN DE UNA ESTRUCTURA MIXTA: ALMA LLENA + RETICULADO - EJEMPLO.

9.3 Reacciones de vínculo interno en las articulaciones D y E para la resolución del reticulado.

La “chapa reticulada” se encuentra en equilibrio.

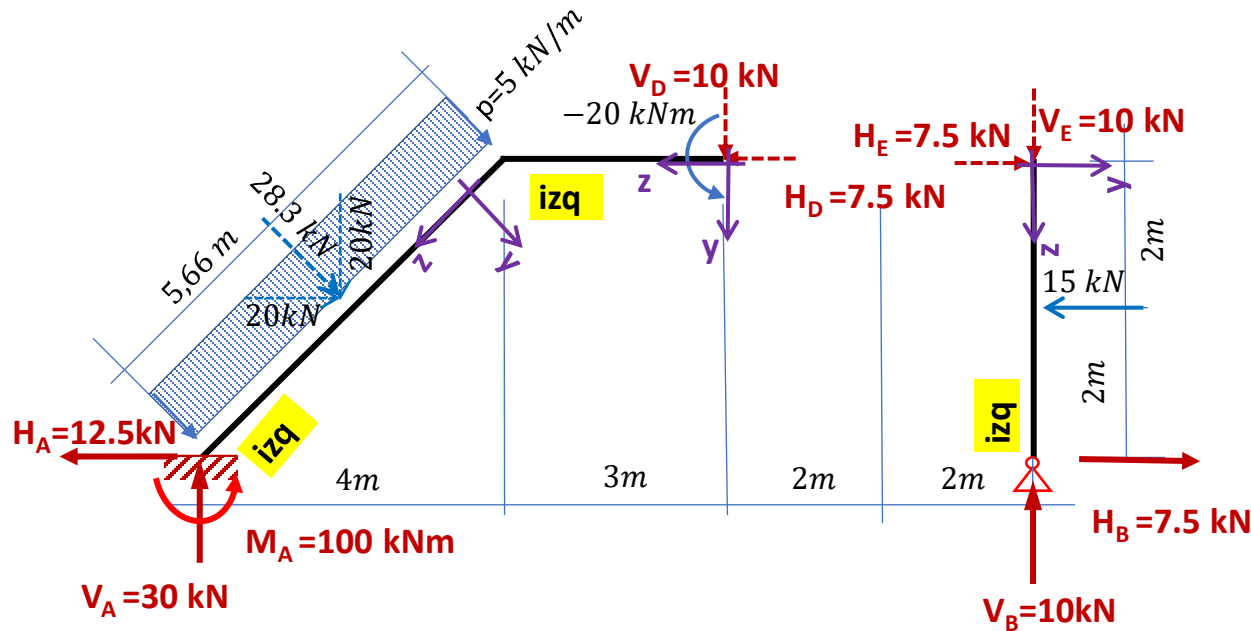
Para su resolución podemos aplicar el método de los nodos o el de las secciones.

Ver ejemplo en diapositivas 12 en adelante, de la Teórica 4.

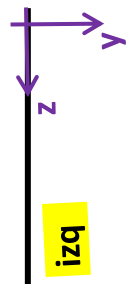
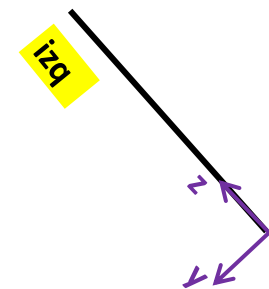
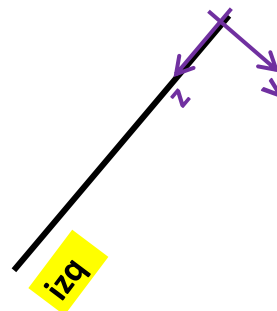


9. RESOLUCIÓN DE UNA ESTRUCTURA MIXTA: ALMA LLENA + RETICULADO - EJEMPLO.

9.4 Ubicación de ternas.

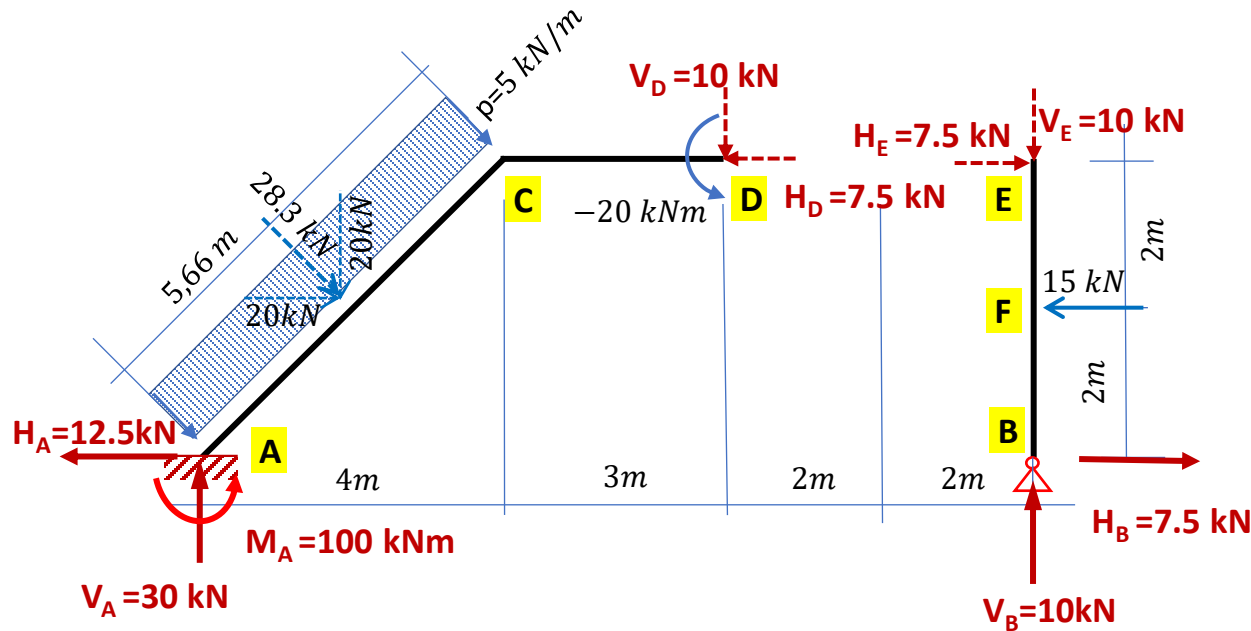


Recorremos las barras de izquierda a derecha. Para esto debemos definir nuestra "izquierda"



Ver Diap. 14

9. RESOLUCIÓN DE UNA ESTRUCTURA MIXTA: ALMA LLENA + RETICULADO - EJEMPLO.



9.5 Diagrama de Corte

Determinamos los puntos donde debemos calcular el valor de corte Q.

En A: proyección de las reacciones de Vínculo en A sobre un plano normal al eje AC.

Antes de C: proyección de fuerzas normales al eje de la barra AC, a la izquierda de C

Después de C: proyección de fuerzas normales al eje de la barra CD, a la izquierda de C.

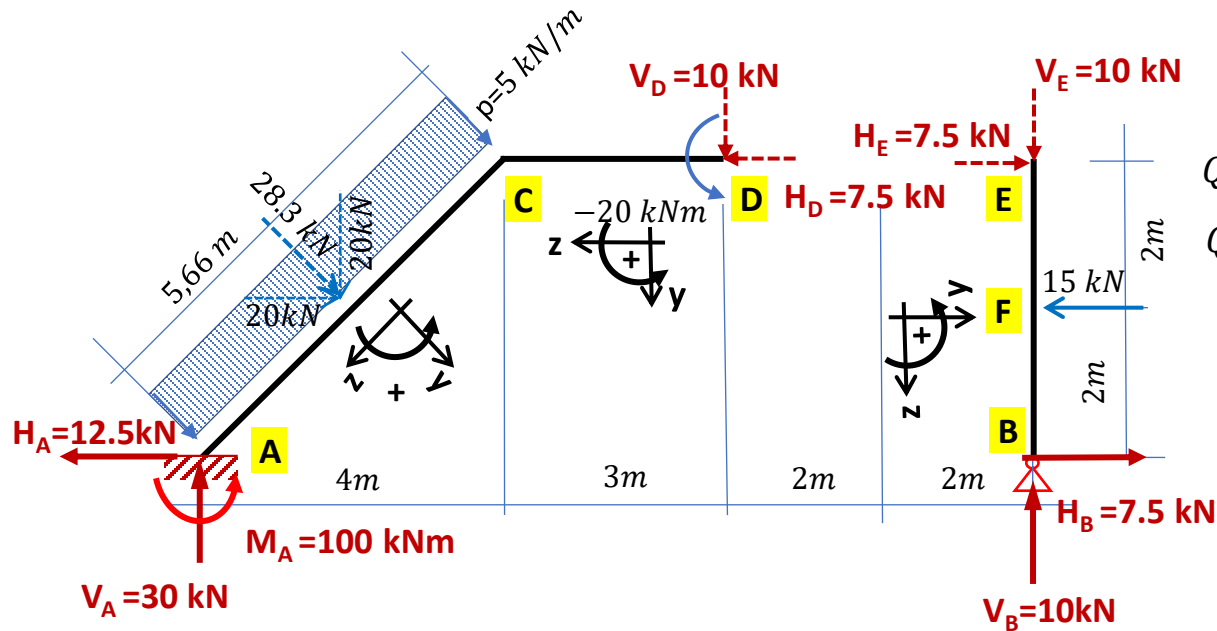
Antes de la articulación D: proyección de fuerzas normales al eje de la barra CD, a la izquierda de D

En B: Proyección de las Reacciones de vínculo en B, sobre un plano normal al eje BE. En este caso coincide con H_B .

Antes de la carga de 15 kN. Proyección de las fuerzas normales al eje de la barra BE, a la izquierda del punto F.

Después de la carga de 15 kN. Proyección de las fuerzas normales al eje de la barra BE, a la izquierda del punto F.

9. RESOLUCIÓN DE UNA ESTRUCTURA MIXTA: ALMA LLENA + RETICULADO - EJEMPLO.



9.5 Diagrama de Corte

$$Q_A = -12.5 \text{ kN} \cdot \cos 45^\circ - 30 \text{ kN} \cdot \text{sen } 45^\circ$$

$$Q_A = -30 \text{ kN}$$

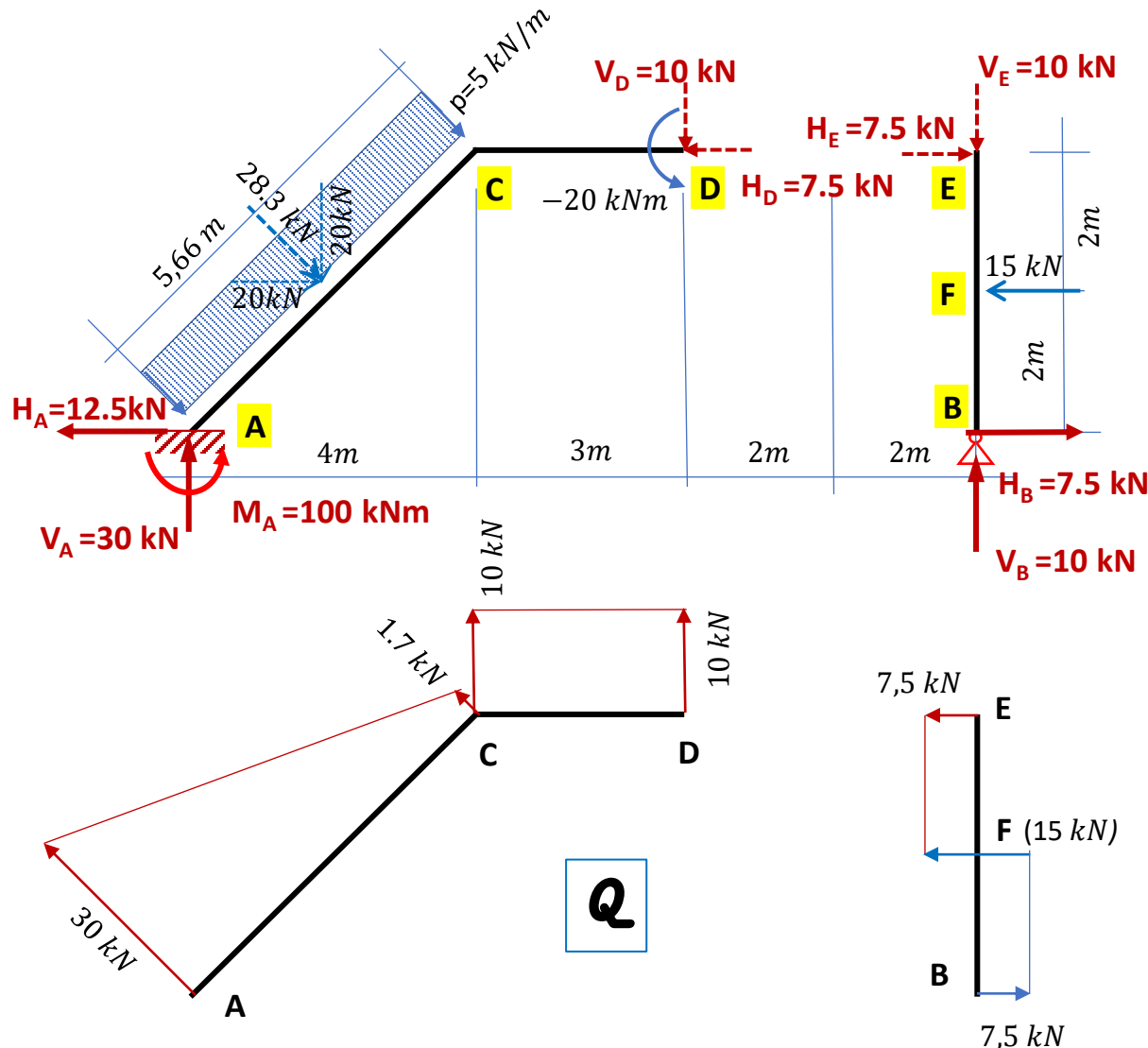
$$Q_{\text{antes de } C} = -12.5 \text{ kN} \cdot \cos 45^\circ - 30 \text{ kN} \cdot \text{sen } 45^\circ + 28.3 \text{ kN} = -1.7 \text{ kN}$$

$$Q_{\text{después de } C} = -30 \text{ kN} + 20 \text{ kN} = -10 \text{ kN} \quad Q_D = -10 \text{ kN} \quad Q_B = +7.5 \text{ kN}$$

$$Q_{\text{antes de } F} = +7.5 \text{ kN} \quad Q_{\text{después de } F} = +7.5 \text{ kN} - 15 \text{ kN} = -7.5 \text{ kN}$$

$$Q_E = -7.5 \text{ kN}$$

9. RESOLUCIÓN DE UNA ESTRUCTURA MIXTA: ALMA LLENA + RETICULADO - EJEMPLO.

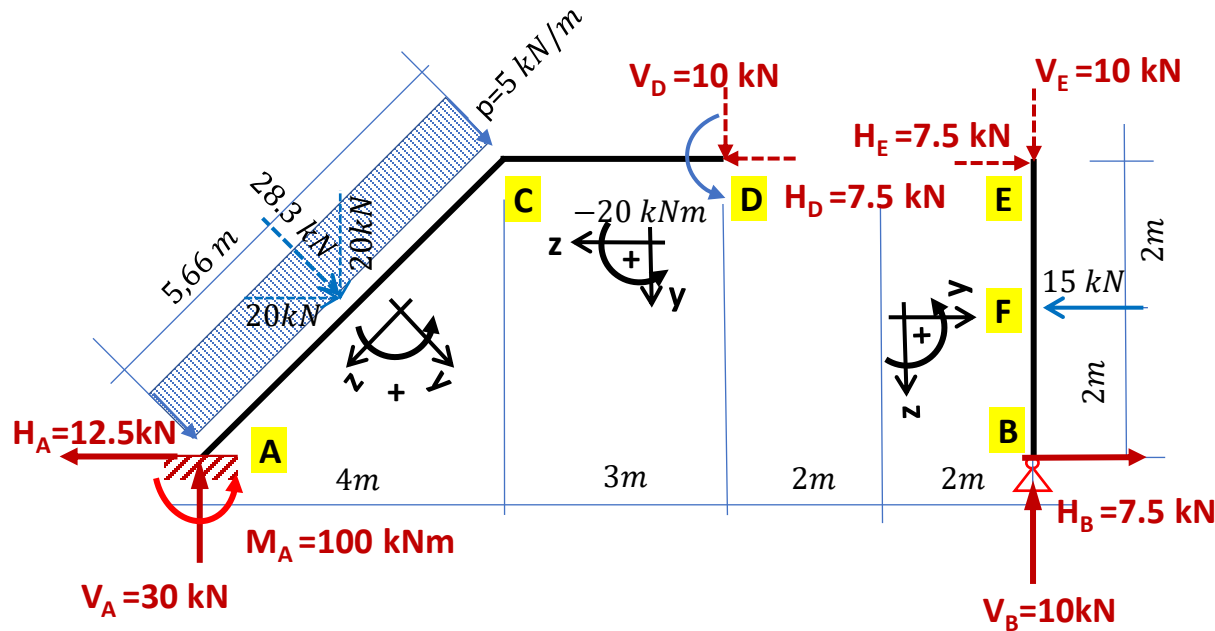


9.5 Diagrama de Corte

Observar que con el mismo criterio que para el momento flexor sobre el concepto de fibra traccionada, aquí representando el vector Q en cada sección podemos graficar el diagrama de corte "sin signo".

El diagrama de corte así dibujado coincide en un todo con el signo de la terna izquierda adoptada.

9. RESOLUCIÓN DE UNA ESTRUCTURA MIXTA: ALMA LLENA + RETICULADO - EJEMPLO.



9.5 Diagrama de Momentos

$$M_A = -100 \text{ kNm}$$

$$M_C = -100 \text{ kNm} + 12.5 \text{ kN} \cdot 4\text{m} + 30 \text{ kN} \cdot 4\text{m} - 28.3 \text{ kN} \cdot \frac{5.66\text{m}}{2}$$

$$M_C = -10.1 \text{ kNm}$$

$$M_D = -100 \text{ kNm} + 30 \text{ kN} \cdot 7\text{m} + 12.5 \text{ kN} \cdot 4\text{m} - 20 \text{ kN} \cdot 5\text{m} - 20 \text{ kN} \cdot 2\text{m}$$

$$M_D = 20 \text{ kNm}$$



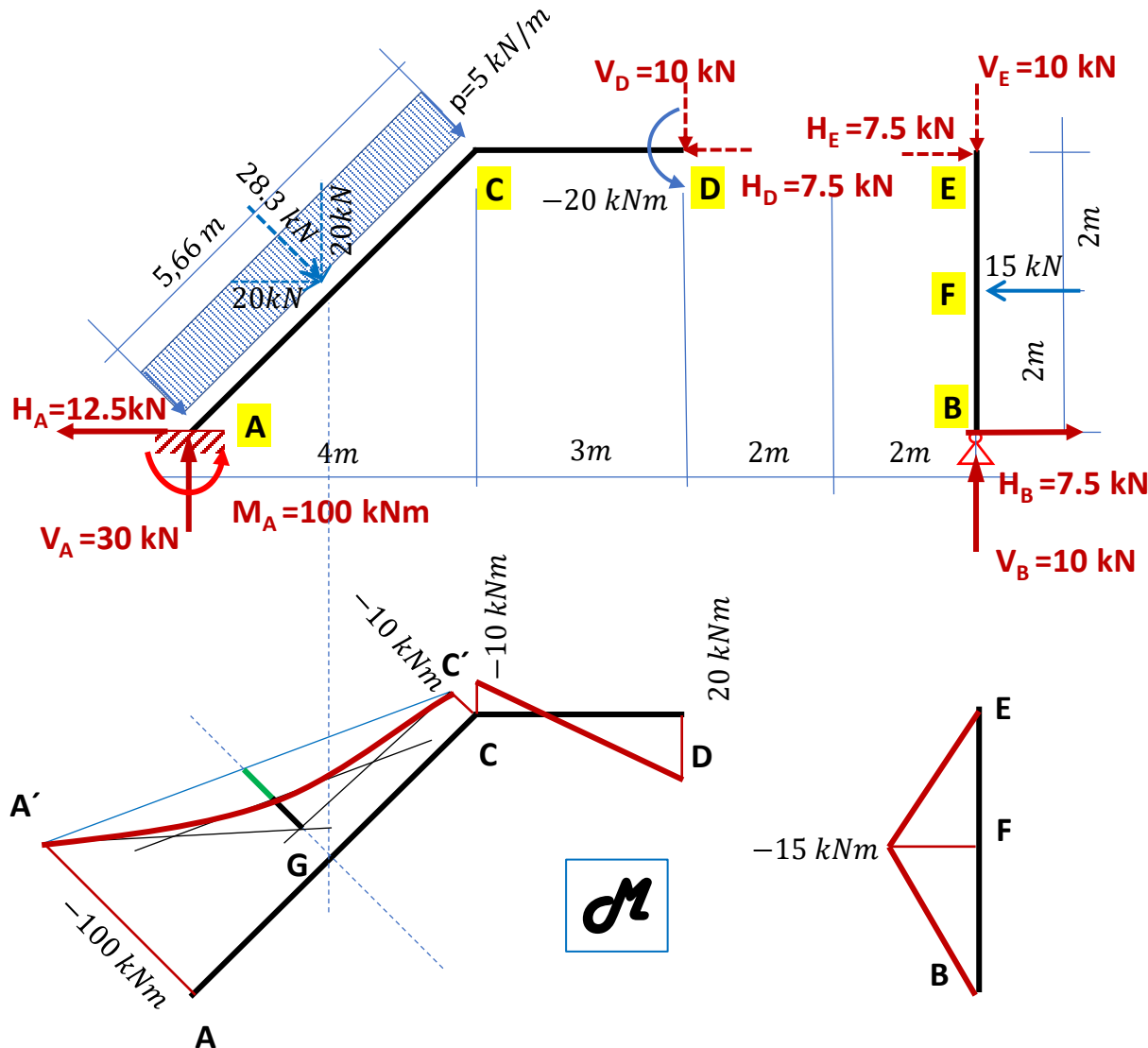
Como ..? No era que una articulación no era capaz de transferir esfuerzos de momento flexor entre ambas chapas? El M_f aquí debería ser cero. Y lo es !! El diagrama se cierra con el momento de -20 kNm aplicado a la izquierda de D.

$$M_B = 0$$

$$M_F = -7.5 \text{ kN} \cdot 2\text{m} = -15 \text{ kNm}$$

$$M_E = -7.5 \text{ kN} \cdot 4\text{m} + 15 \text{ kN} \cdot 4\text{m} = 0$$

9. RESOLUCIÓN DE UNA ESTRUCTURA MIXTA: ALMA LLENA + RETICULADO - EJEMPLO.



9.5 Diagrama de Momentos flexores.

Calculamos la flecha de la carga distribuida.

Ver diapositiva 15

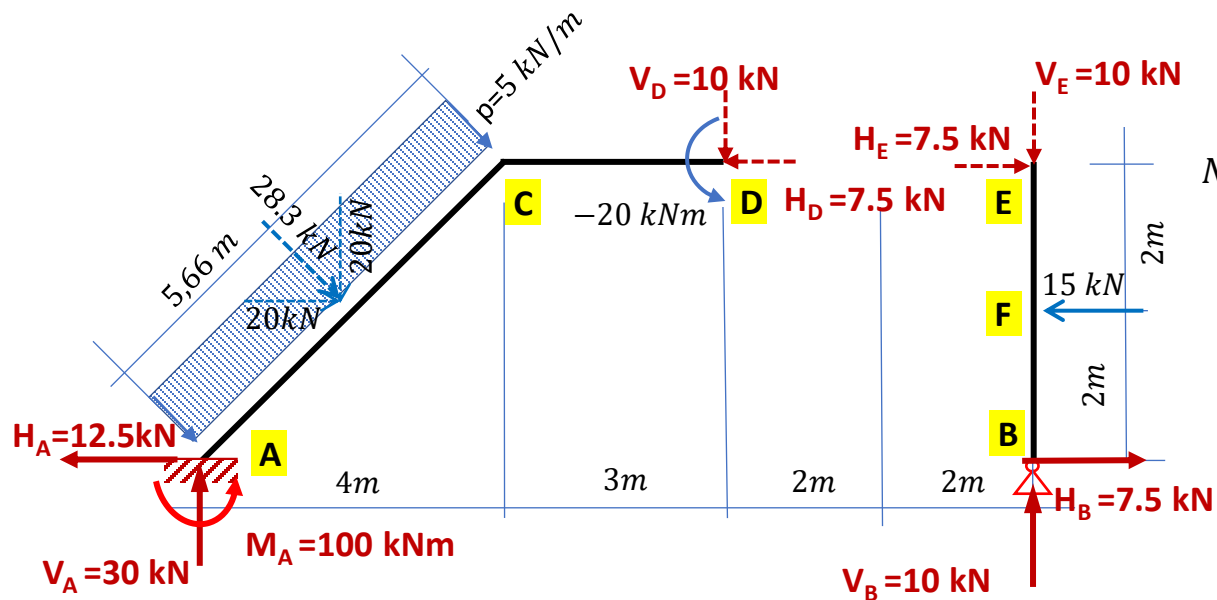
$$p \cdot \frac{l^2}{8} = \frac{5 \text{ kN}}{\text{m}} \cdot \frac{(5.66)^2 \text{ m}^2}{8} = 20 \text{ kNm}$$

Colgamos del centro de la línea de cierre $A'C'$ dos veces el valor de la flecha de la parábola $p \cdot l^2 / 8$.

Las tangentes extremas se encuentran uniendo A' con G y C' con G .

La tangente intermedia es una paralela a la línea de cierre $A'C'$ que divide a los segmentos $A'G$ y $C'G$ en partes iguales.

9. RESOLUCIÓN DE UNA ESTRUCTURA MIXTA: ALMA LLENA + RETICULADO - EJEMPLO.



9.5 Diagrama de Esfuerzos Normales

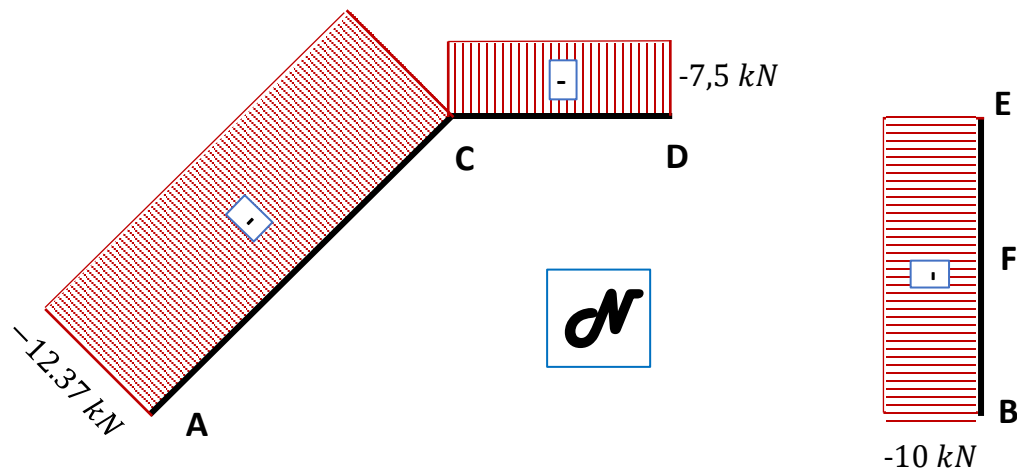
$$N_{AC} = -30 \text{ kN} \cdot \cos 45^\circ + 12.5 \text{ kN} \cdot \sin 45^\circ$$

$$N_{AC} = -12.37 \text{ kN}$$

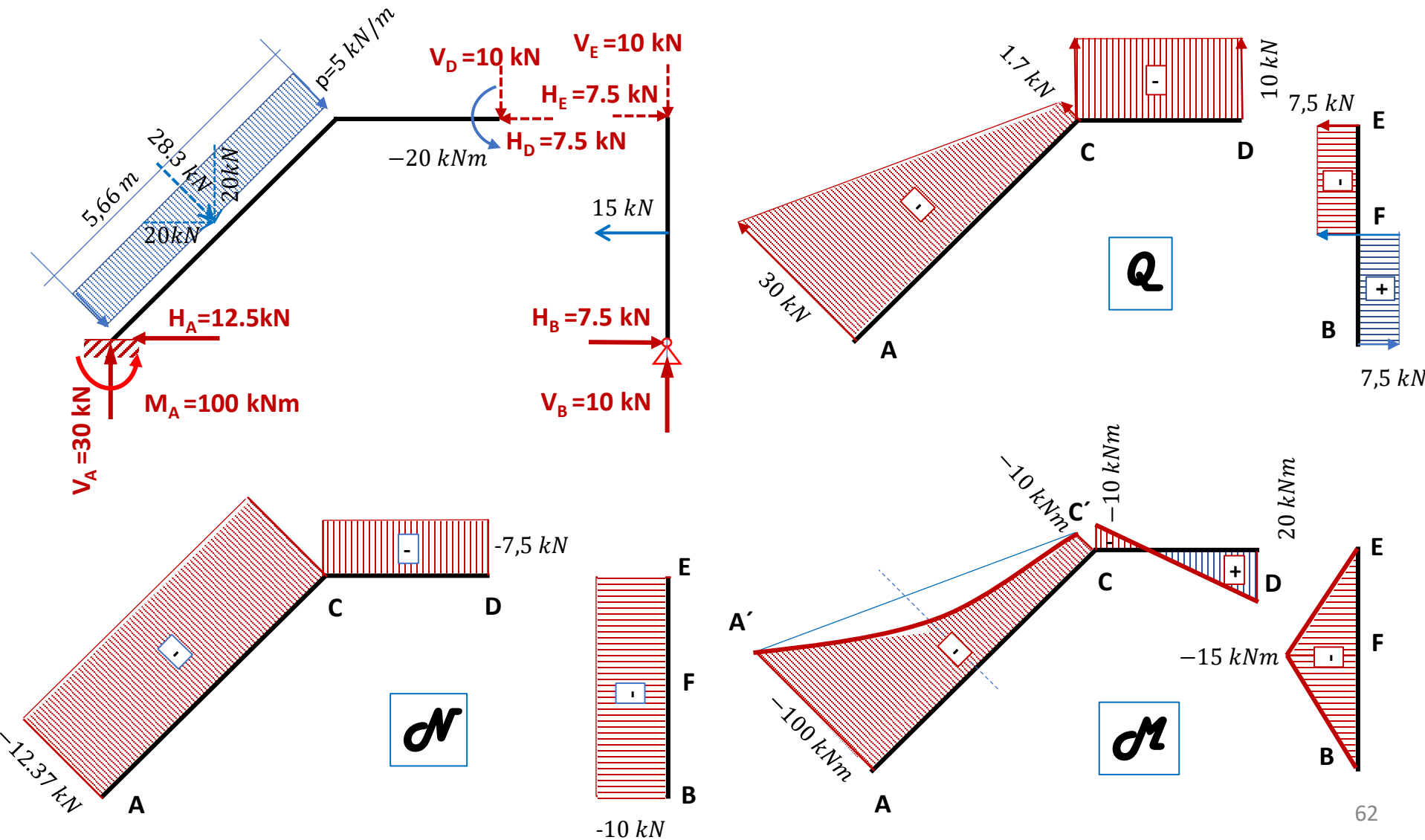
$$N_{CD} = -12.5 \text{ kN} + 20 \text{ kN} = -7.5 \text{ kN}$$

$$N_{CD} = -7.5 \text{ kN}$$

$$N_{BE} = -10 \text{ kN}$$



9. RESOLUCIÓN DE UNA ESTRUCTURA MIXTA: ALMA LLENA + RETICULADO - EJEMPLO.





FIN