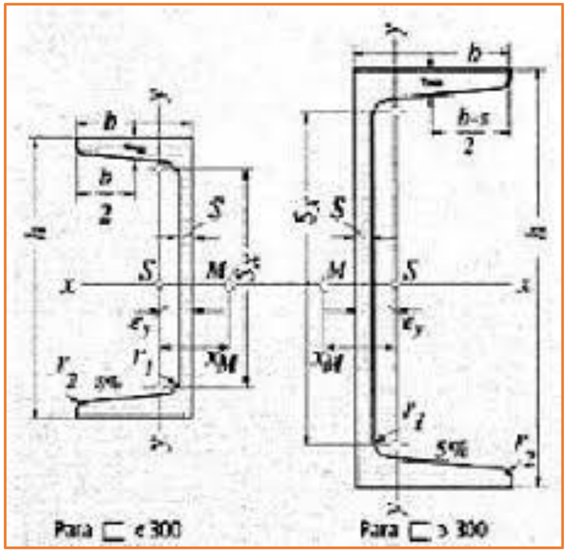
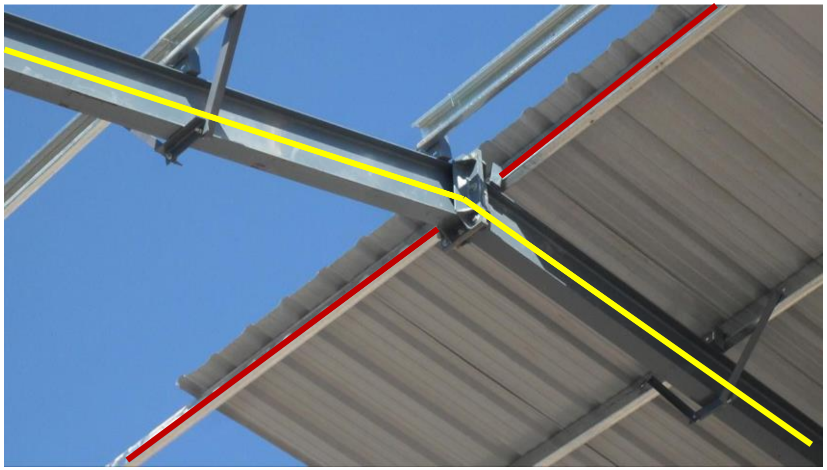
Departamento de Estabilidad

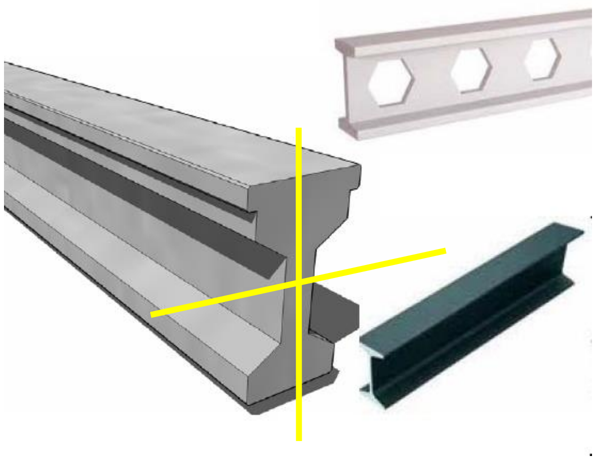
64.04 | 64.05 | 84.05
Estática y Resistencia de Materiales
Teórica
Ing. Alfredo Corral

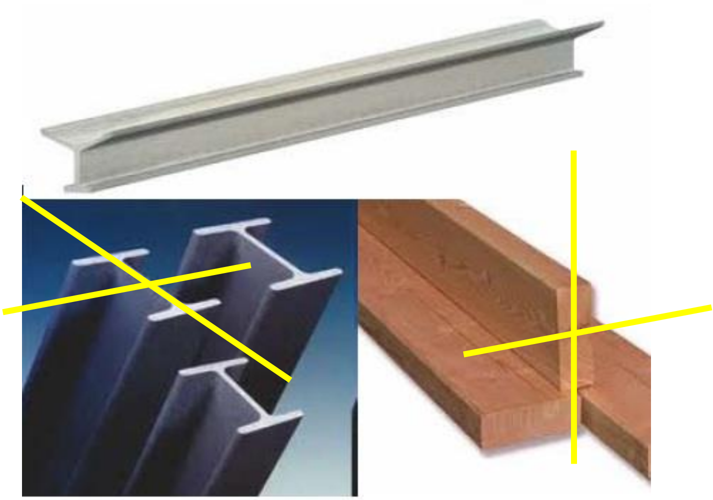
CLASE 6
GEOMETRÍA DE MASAS



INTRODUCCION







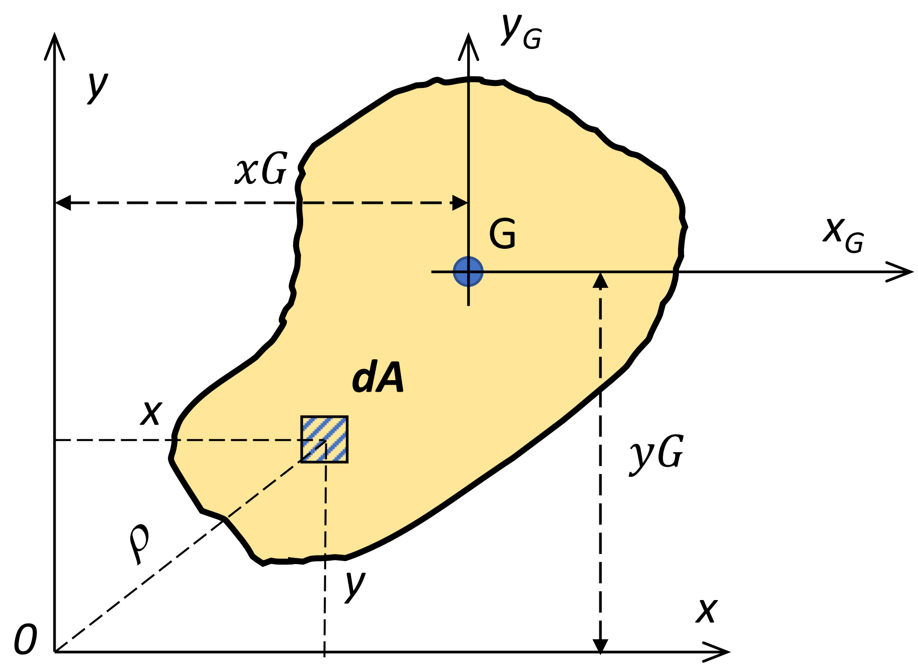
1. MOMENTOS ESTÁTICOS

1.1 Definiciones

$$S_x = \int y \cdot dA$$

$$S_y = \int x \cdot dA$$

Son momentos de primer orden, pues las distancias están elevadas a la primera potencia.



1.2 Baricentro

*Si concentraramos toda la masa (sección) de un cuerpo en un punto, de modo que el momento estático de este punto sea igual que el momento estático de toda la sección con respecto a los mismos ejes, **cuales serían las coordenadas de este punto ?***

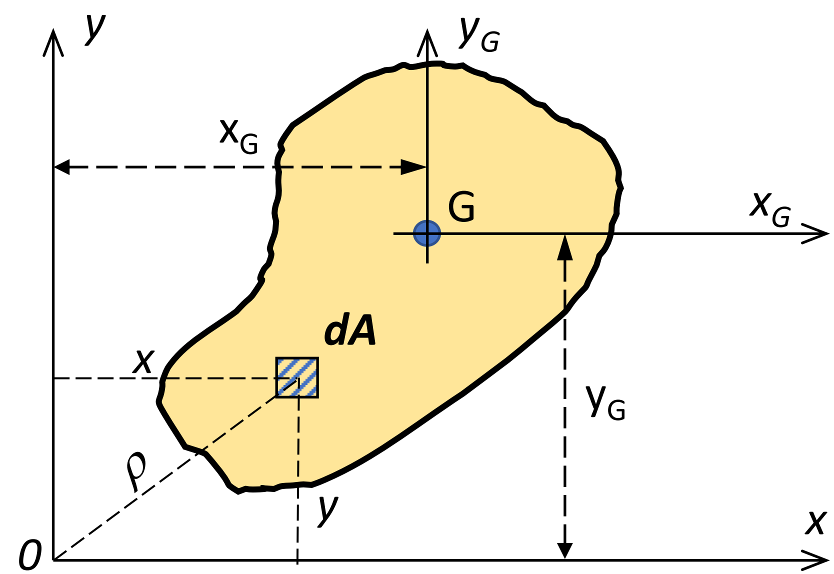
$$S_x = y_G \cdot A = \int y \cdot dA \qquad \boldsymbol{y_G = \frac{\int y \cdot dA}{\int dA}}$$

$$S_y = x_G \cdot A = \int x \cdot dA \qquad \boldsymbol{x_G = \frac{\int x \cdot dA}{\int dA}}$$

1. MOMENTOS ESTÁTICOS

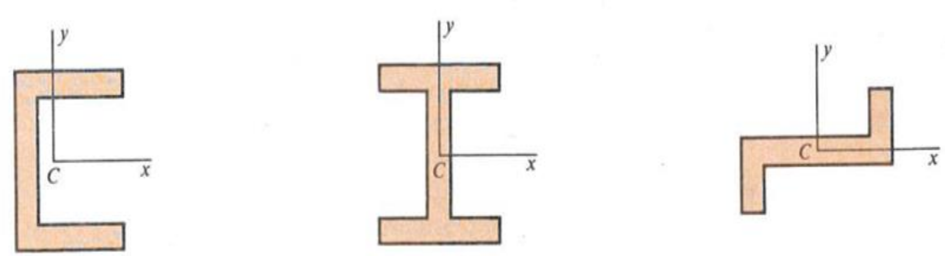
1.2 Baricentro. Cuanto vale el momento estático con respecto a ejes baricéntricos ?

$$S_{xG} = \int (y_G - y) \cdot dA = \underbrace{y_G \cdot A}_{S_x} - \underbrace{\int y \cdot dA}_{S_x} = 0$$



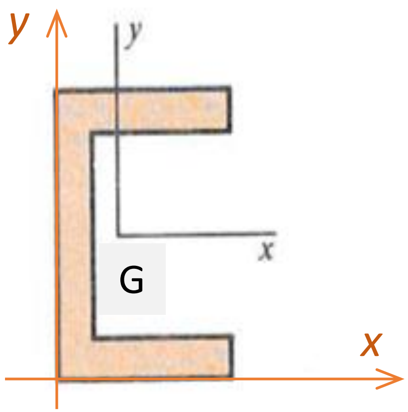
El momento estático de una superficie con respecto a un eje baricentrico es nulo.

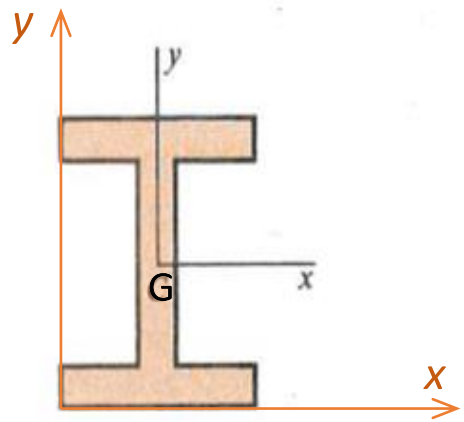
1.3 Baricentro de áreas compuestas.

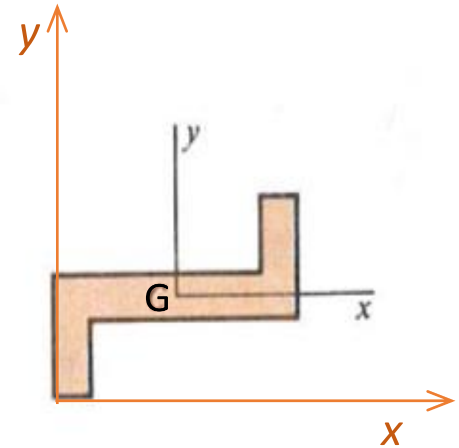


Así como la sección de áreas compuestas es la suma de las secciones de las áreas de figuras geométricas simples, los momentos estáticos del área compuesta podrán calcularse como la suma de los momentos estáticos de las figuras geométricas que componen la figura con respecto al mismo eje.

1.3 Baricentro de áreas compuestas.







$$A = \sum_{1}^{n} A_i$$

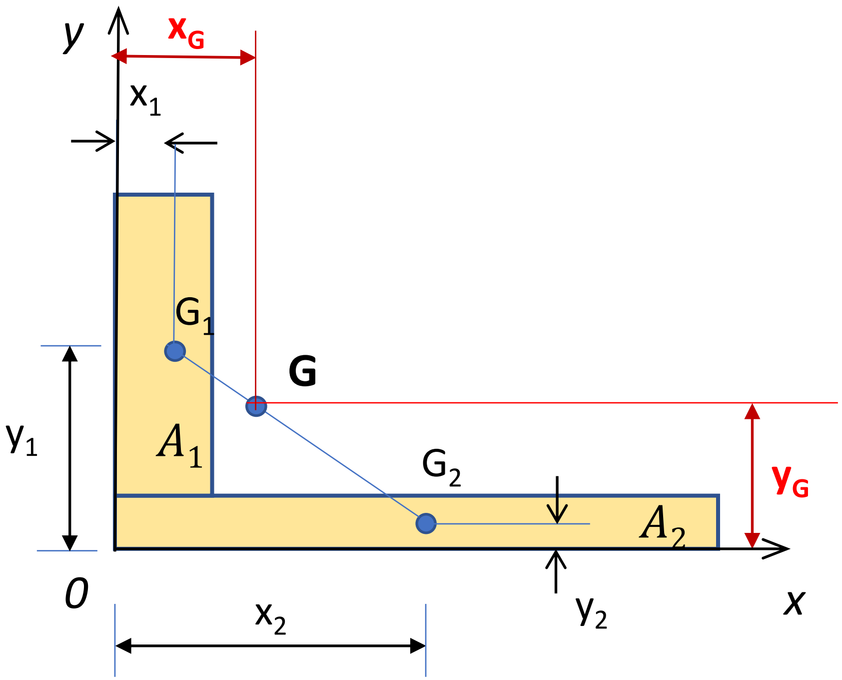
$$S_x = \sum_{1}^{n} y_i \cdot A_i$$

$$S_y = \sum_{1}^{n} x_i \cdot A_i$$

$$\boldsymbol{x_G = \frac{S_y}{A}}$$

$$\boldsymbol{y_G = \frac{S_x}{A}}$$

1.3 Baricentro de áreas compuestas - Ejemplo



$$A = \sum_{1}^{n} A_i \qquad A = A_1 + A_2$$

$$S_x = \sum_{1}^{n} y_i \cdot A_i \qquad S_x = y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2$$

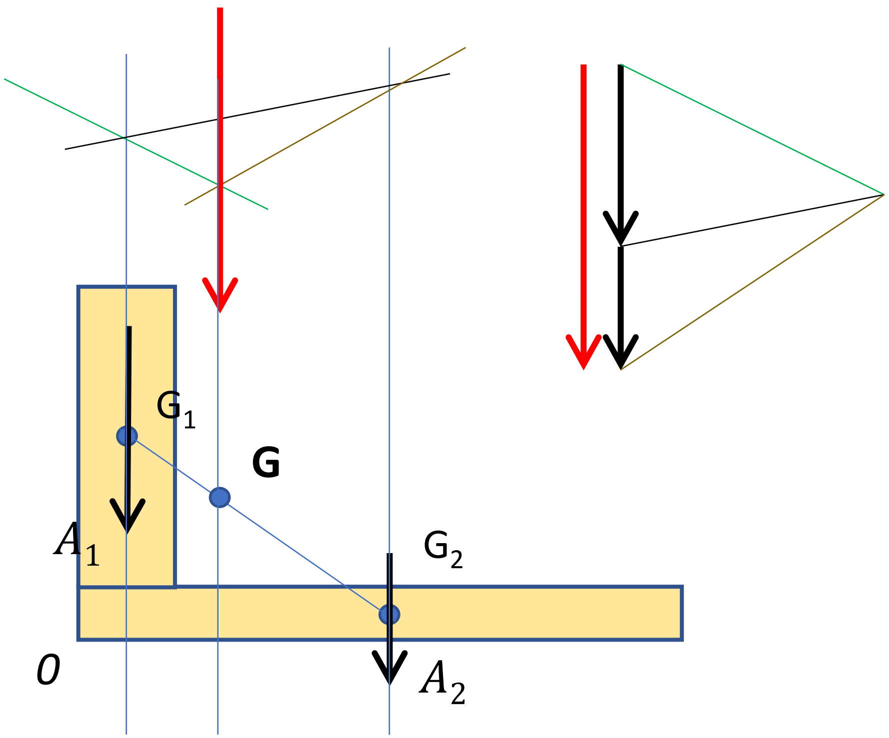
$$S_y = \sum_{1}^{n} x_i \cdot A_i \qquad S_y = x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2$$

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2}$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2}$$

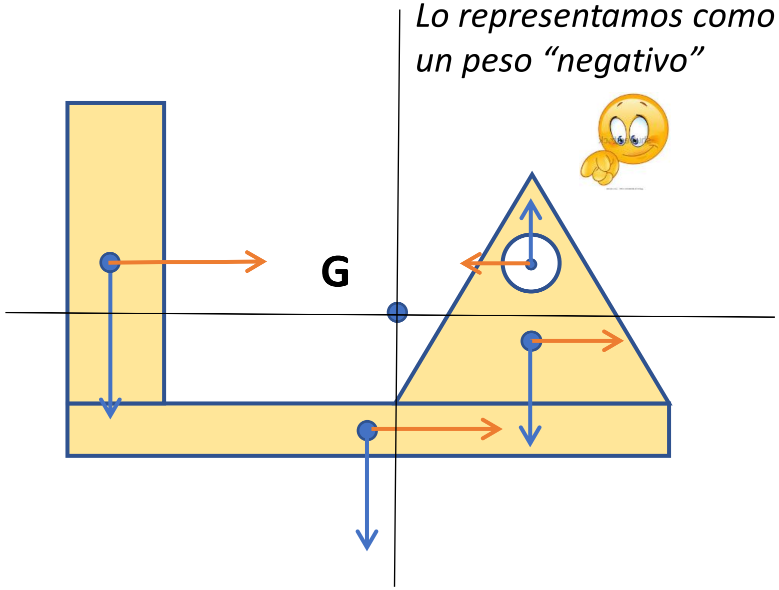
El baricentro G se aloja en la línea G1-G2 que une los baricentros de cada rectángulo

1.3 Baricentro de áreas compuestas – Determinación gráfica como un sistema de fuerzas paralelas, aplicando el polígono funicular.

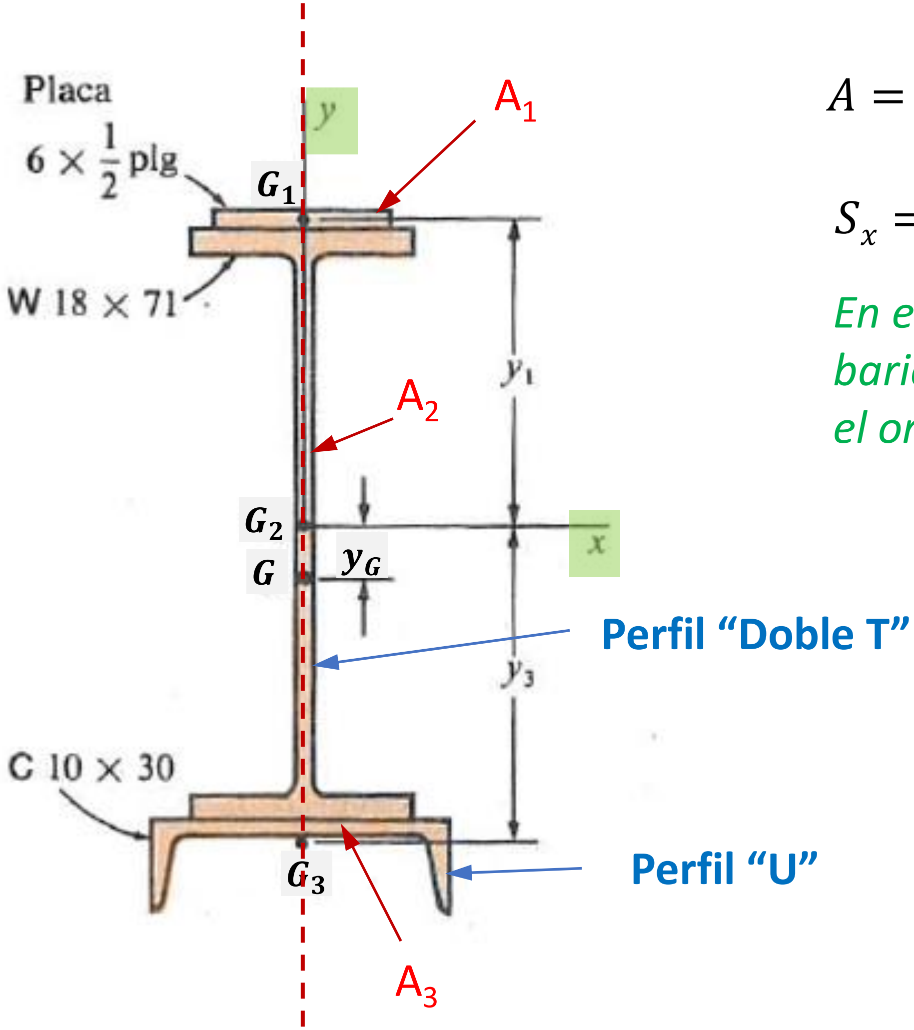


Es de utilidad cuando queremos obtener una ubicación cualitativa del baricentro en una figura compleja.

Baricentro de un "agujero"?
Lo representamos como un peso "negativo"



1.3 Baricentro de áreas compuestas – Un ejemplo "más práctico"



$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

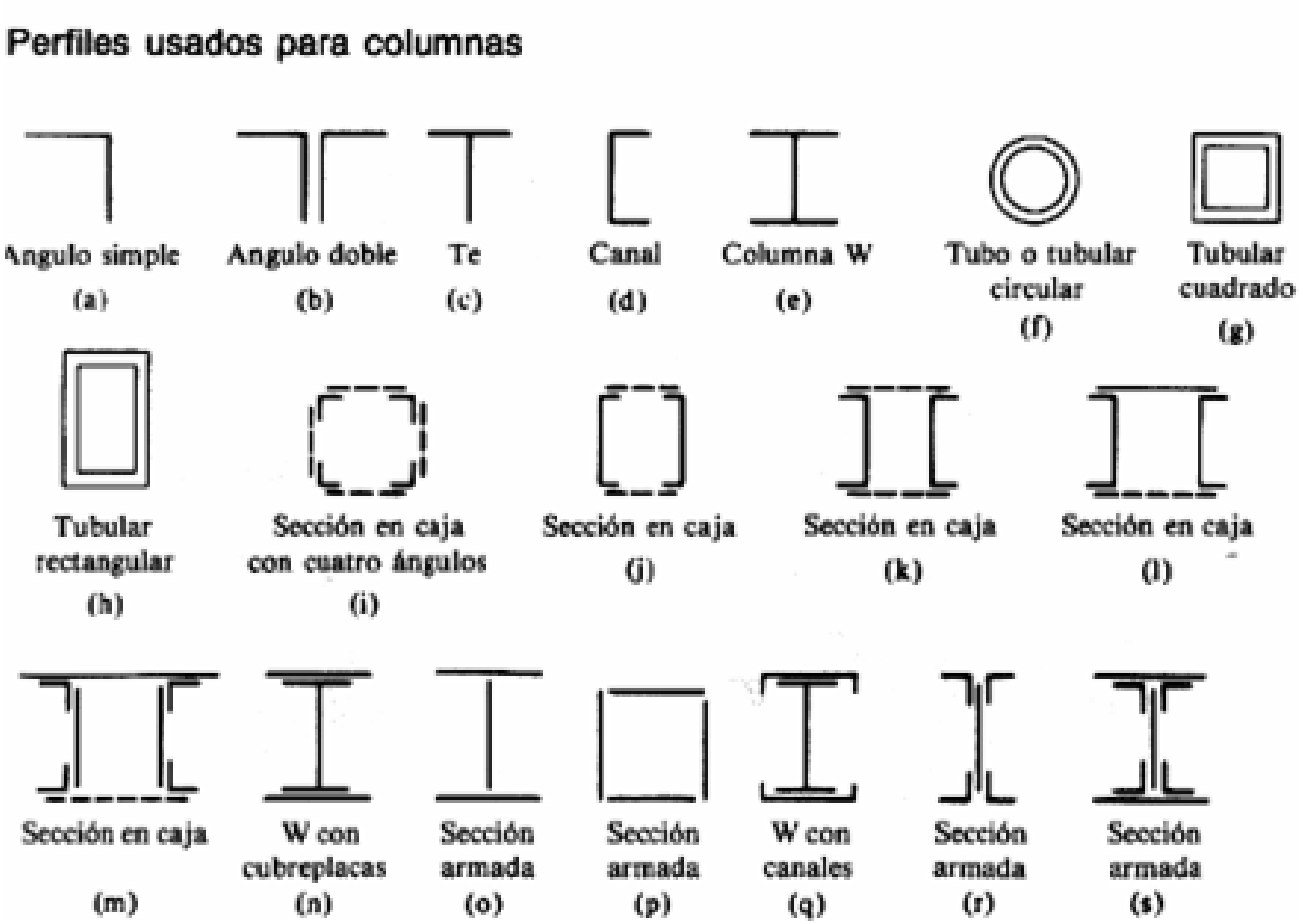
$$S_x = y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2 + y_3 \cdot A_3$$

En este caso y_2 es igual a cero, ya que el baricentro del perfil doble T coincide con el origen de coordenadas.

$$\boldsymbol{x_G = 0}$$ *Simetría de la sección*

$$\boldsymbol{y_G = \frac{S_x}{A}} = \frac{y_1 \cdot A_1 - y_3 \cdot A_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

1.3 Baricentro de áreas compuestas



Departamento de Estabilidad
64.04 | 64.05 | 84.05 Estática y Resistencia de Materiales
Teórica Ing. Alfredo Corral
FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

2. MOMENTOS DE SEGUNDO ORDEN

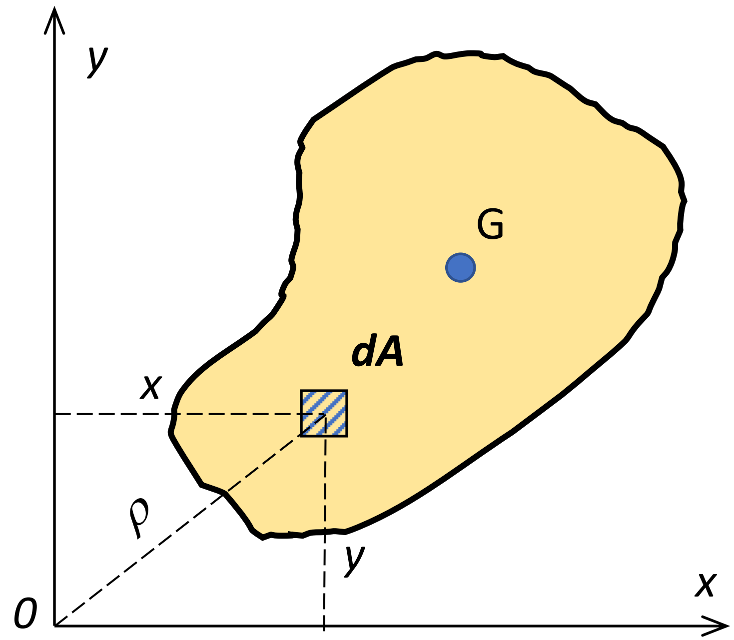
2.1 Definiciones

Momento de inercia

$$J_x = \int y^2 \cdot dA$$

$$J_y = \int x^2 \cdot dA$$

Son momentos de segundo orden, pues las distancias están elevadas al cuadrado.



Momento de inercia "polar"

$$J_\rho = \int \rho^2 \cdot dA \qquad \rho^2 = x^2 + y^2$$

$$\boldsymbol{J_\rho} = \int (x^2 + y^2) \cdot dA = \int x^2 \cdot dA + \int y^2 \cdot dA = \boldsymbol{J_x} + \boldsymbol{J_y}$$

El momento de inercia polar con respecto a un punto O, origen de coordenadas es igual a la suma de los momentos de inercia de los dos ejes x e y ortogonales que concurren a O.

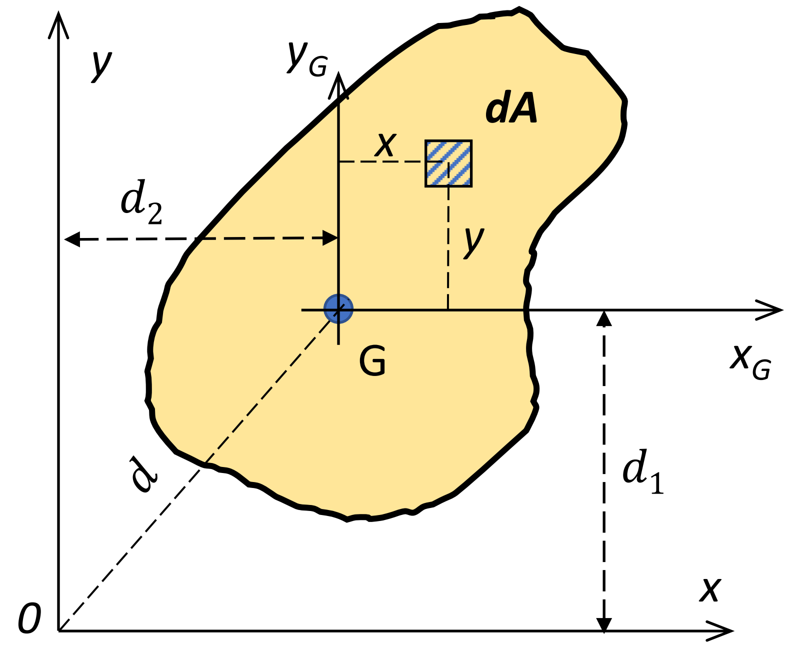
Momento de inercia "centrífugo"

$$J_{xy} = \int x \cdot y \cdot dA$$

2. MOMENTOS DE SEGUNDO ORDEN
2.2 Teorema de Steiner

$$J_x = \int (y + d_1)^2 \cdot dA$$

$$J_x = \underbrace{\int y^2 \, dA}_{J_{x_G}} + 2d_1 \underbrace{\int y \, dA}_{\substack{\text{Momento estático} \\ \text{baricéntrico.} \\ S_x = 0}} + \underbrace{d_1{}^2 \int dA}_{d_1^2 \cdot A}$$



$$\boxed{\boldsymbol{J_x = J_{xG} + A \cdot d_1{}^2}}$$

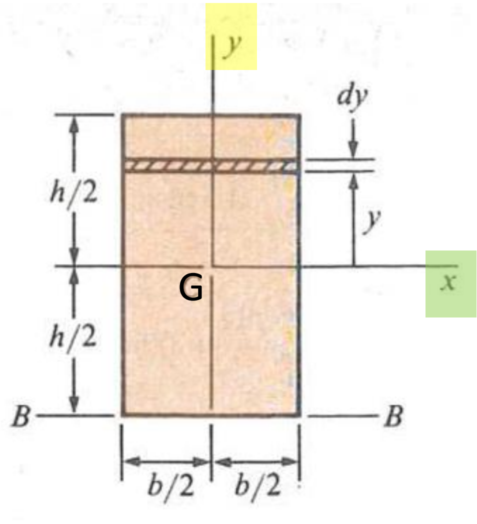
El momento de inercia con respecto a un eje paralelo a un eje baricentrico puede calcularse como el momento de inercia baricéntrico más el producto del área de la sección por el cuadrado de la distancia que separa a a ambos ejes.

$$\boldsymbol{J_y = J_{yG} + A \cdot d_2{}^2}$$

$$\boldsymbol{J_{xy} = J_{xGyG} + A \cdot d_1 \cdot d_2}$$

$$d^2 = d_1^2 + d_2^2 \rightarrow \quad \boldsymbol{J_\rho = J_{\rho G} + A \cdot d^2}$$

2.3 Momento de inercia de un rectángulo



El elemento diferencial de superficie en este caso:

$$dA = b \cdot dy$$

$$\boldsymbol{J_x} = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \cdot b \cdot dy = \frac{b \cdot y^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{\boldsymbol{b \cdot h^3}}{\mathbf{12}}$$

$$\boldsymbol{J_y} = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 \cdot h \cdot dx = \frac{h \cdot x^3}{3} \Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{\boldsymbol{h \cdot b^3}}{\mathbf{12}}$$

Observar que la dimensión que va elevada al cubo es la que es cortada por el eje en el cual estamos calculando el momento de inercia. Para Jx es h, para Jy será b.

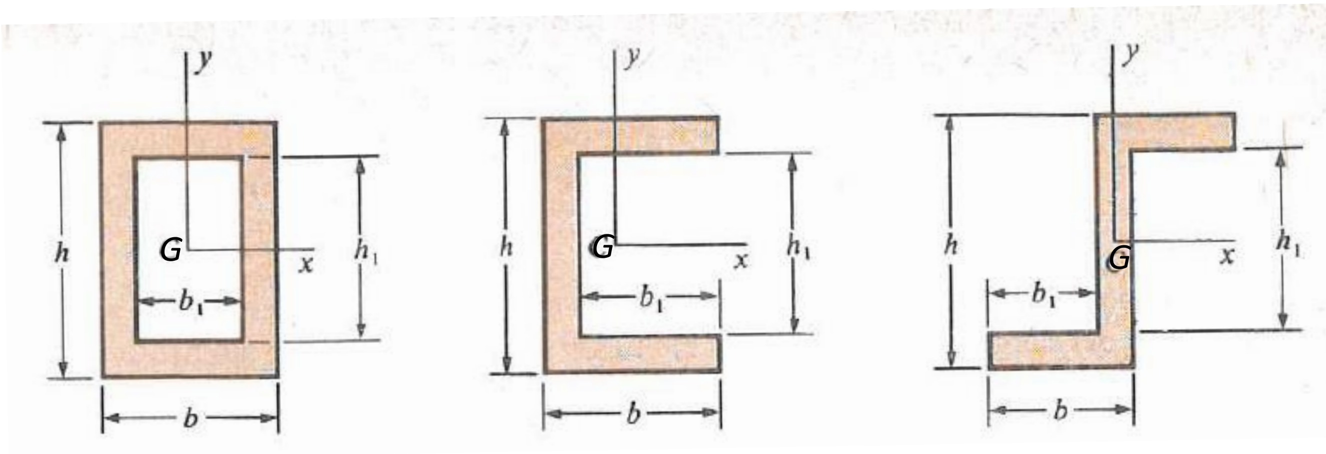
Calculamos ahora J_B, de dos formas: aplicando la definición y por el Teorema de Steiner.

$$\boldsymbol{J}_B = \int_0^h y^2 \cdot b \cdot dy = \frac{b \cdot y^3}{3} \Big|_0^h = \frac{\boldsymbol{b \cdot h^3}}{\mathbf{3}}$$

Y por Steiner:

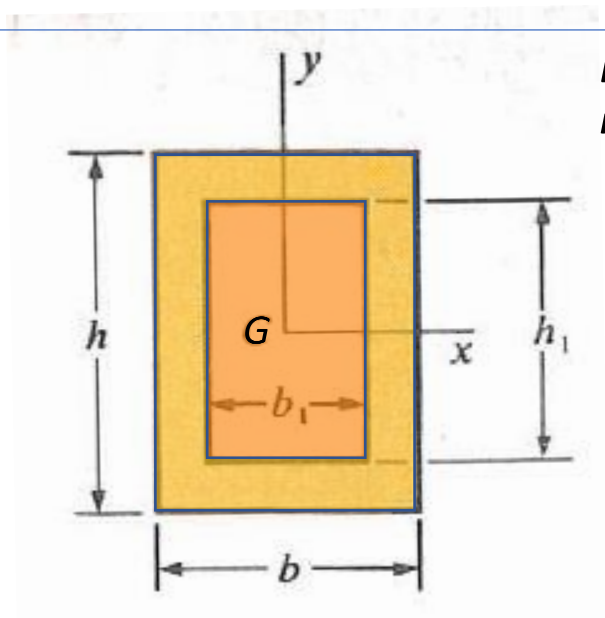
$$\boldsymbol{J}_B = J_x + A \cdot d^2 = \frac{b \cdot h^3}{12} + b \cdot h \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{\boldsymbol{b \cdot h^3}}{\mathbf{3}}$$

Cálculo de momentos de inercia aplicando Steiner como suma de secciones rectangulares



$$J_x = \sum_{1}^{n} J_{xi}$$

$$J_y = \sum_{1}^{n} J_{yi}$$

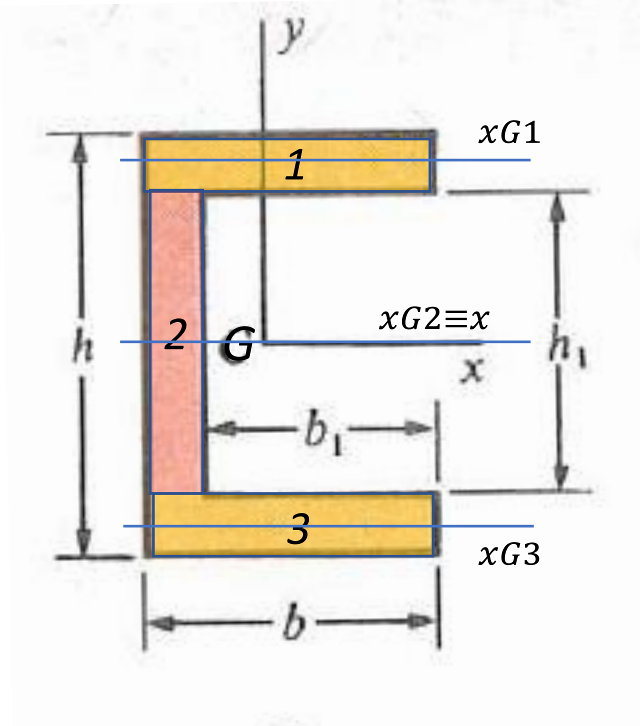


En este caso podemos calcularlo como el momento de inercia del rectángulo "exterior" menos el del rectángulo "interior."

$$J_x^{re} = \frac{bh^3}{12} \qquad J_x^{ri} = \frac{b_1 {h_1}^3}{12}$$

$$J_x = J_x^{re} - J_x^{ri} = \frac{bh^3}{12} - \frac{b_1 {h_1}^3}{12}$$

Cálculo de momentos de inercia aplicando Steiner como suma de secciones rectangulares



Geometría de los rectángulos 1 y 3

$$ancho = b \qquad altura = \frac{h-h_1}{2}$$

$$J_{xG1}^{r1} = \frac{b\cdot(\frac{h-h_1}{2})^3}{12}$$

Por Steiner

$$J_x^{r1} = J_{xG1}^{r1} + \left(\frac{h+h1}{4}\right)^2 \cdot A_1 = \frac{b\cdot\left(\frac{h-h_1}{2}\right)^3}{12} + \left(\frac{h+h1}{4}\right)^2 \cdot b\cdot\left(\frac{h-h_1}{2}\right)$$

Geometría del rectángulo 2

$$ancho = b - b_1 \qquad altura = h_1$$

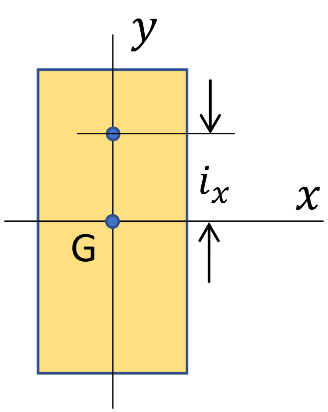
$$J_{xG2}^{r2} = J_x^{r2} = \frac{(b-b_1)\cdot {h_1}^3}{12}$$

$$J_x = J_x^{r1} + J_x^{r2} + J_x^{r3}$$

2.4 Radio de giro

La siguiente fórmula lo define:

$$\boldsymbol{i_x} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{J_x}}{\boldsymbol{A}}} \rightarrow \quad J_x = i_x^2 \cdot A \qquad\qquad \boldsymbol{i_y} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{J_y}}{\boldsymbol{A}}} \rightarrow \quad J_y = i_y^2 \cdot A$$



En el caso de un rectángulo:

$$A = b \cdot h \qquad J_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$\boldsymbol{i_x} = \sqrt{\frac{\frac{b \cdot h^3}{12}}{b \cdot h}} = \boldsymbol{h/\sqrt{12}}$$

El radio de giro de una sección con respecto a un eje, puede interpretarse como una distancia tal, que si concentráramos toda la sección en ese punto, el momento de inercia de este punto de "masa A", sería equivalente al de la sección con respecto al mismo eje.

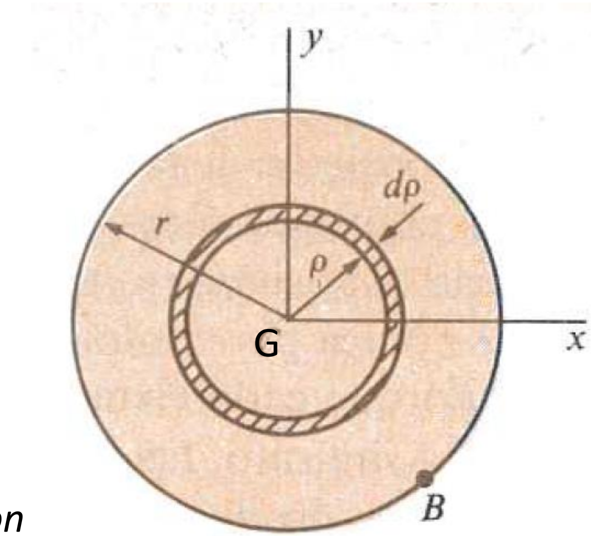
$$J_x = \boldsymbol{i_x^2} \cdot A$$

2.5 Momento de inercia polar de un círculo.

$$J_{p_G} = \int \rho^2 \cdot dA\,, \quad dA = 2\pi \cdot \rho \cdot d\rho$$

$$J_{p_G} = \int_0^r 2\pi \cdot \rho^3 \cdot d\rho, \quad r = D/2$$

$$\boldsymbol{J_{p_G}} = \left.\frac{2\pi\rho^4}{4}\right|_0^{D/2} = \boldsymbol{\frac{\pi \cdot D^4}{32}} = \boldsymbol{\frac{\pi \cdot r^4}{2}}$$



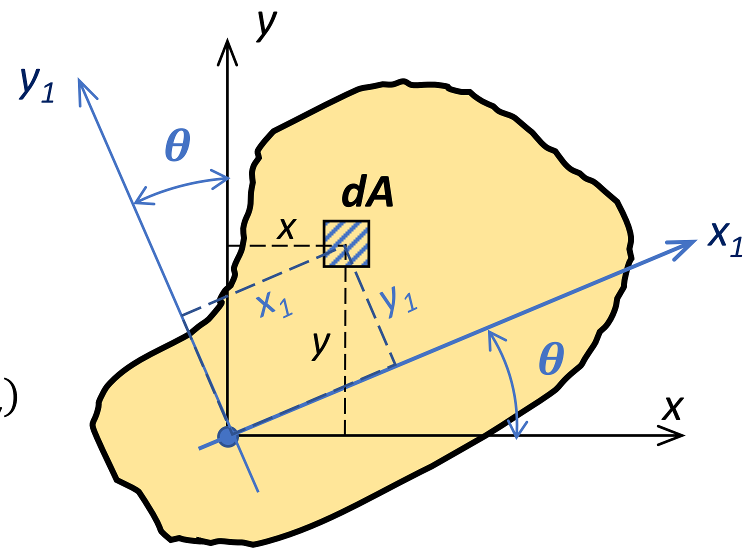
Si ahora queremos calcular el momento de inercia polar con respecto a un punto B en el perímetro del círculo, podemos aplicar Steiner.

$$\boldsymbol{J_{p_B}} = J_{pG} + \mathrm{A} \cdot r^2 = \frac{\pi \cdot r^4}{2} + \pi \cdot r^2 \cdot r^2 = \boldsymbol{\frac{3 \cdot \pi \cdot r^4}{2}}$$

Si quisiéramos calcular Jxg y Jyg, por razones de simetría en este caso, sabemos que Jxg=Jyg. Además sabemos que Jpg= Jxg+Jyg (ver diap. 10)

$$\boldsymbol{J_{xG}} = \boldsymbol{J_{yG}} = J_{p_G}/2 = \boldsymbol{\frac{\pi \cdot r^4}{4}}$$

2.6 Rotación de ejes.



Datos:

$$J_x = \int y^2 \cdot dA \qquad J_y = \int x^2 \cdot dA \qquad J_{xy} = \int x \cdot y \cdot dA$$

Que buscamos ? 

$$\boldsymbol{J_{x1}} = f(J_x, J_y, J_{xy}), \quad \boldsymbol{J_{y1}} = g(J_x, J_y, J_{xy}), \quad \boldsymbol{J_{x1y1}} = h(J_x, J_y, J_{xy})$$

Fórmulas de transformación de coordenadas

$$x_1 = x \cdot \cos\theta + y \cdot \operatorname{sen}\theta$$

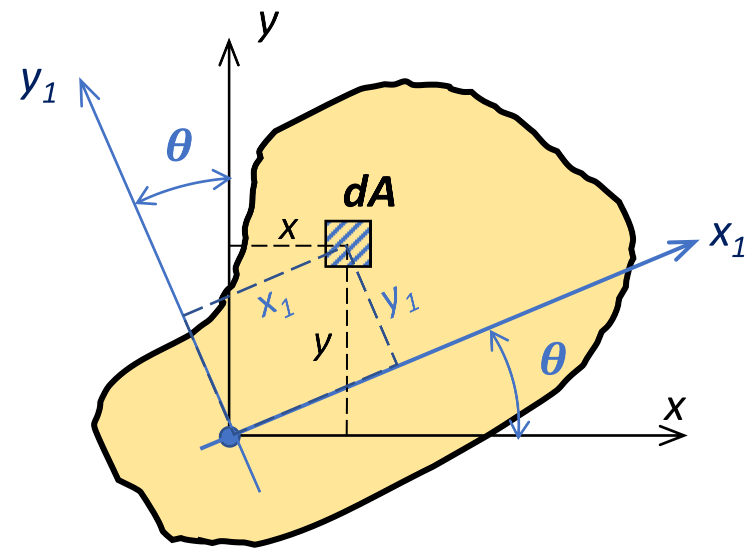
$$y_1 = y \cdot \cos\theta - x \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$J_{x1} = \int {y_1}^2 \cdot dA = \int (y \cdot \cos\theta - x \cdot \operatorname{sen}\theta)^2 \cdot dA$$

$$J_{x1} = \cos^2\theta \cdot \int y^2 \cdot dA + \operatorname{sen}^2\theta \cdot \int x^2 \cdot dA - 2 \cdot \cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \int xy \cdot dA$$

$$J_{x1} = J_x \cos^2\theta + J_y \cdot \operatorname{sen}^2\theta - 2J_{xy} \cdot cos\theta \cdot sen\theta$$

2.6 Rotación de ejes.



$$J_{x1} = J_x \cdot \cos^2\theta + J_y \cdot \mathrm{sen}^2\theta - 2J_{xy} \cdot cos\theta \cdot sen\theta \quad (1)$$

Introducimos las siguientes identidades trigonométricas:

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta), \qquad sen^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

$$2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta = \mathrm{sen}\,2\theta$$

Si las reemplazamos en (1) obtenemos:

$$\boldsymbol{J_{x1} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \cos 2\theta - J_{xy} \cdot sen\,2\theta}$$

Del mismo modo para J_{x1y1}:

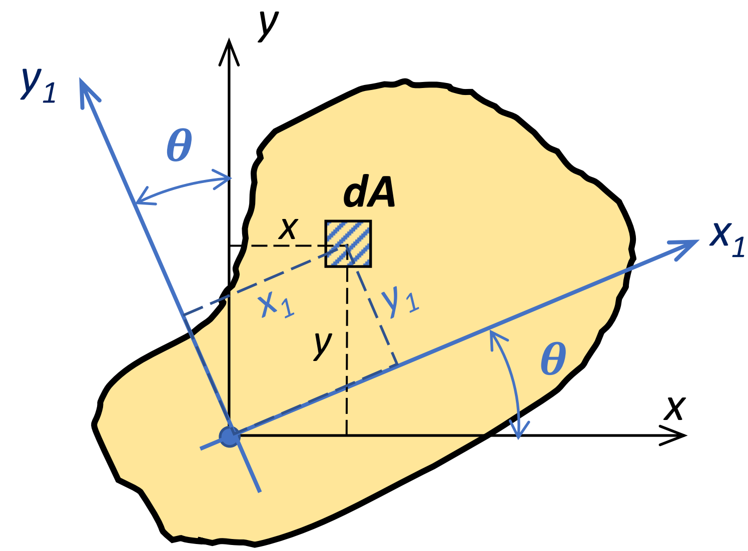
$$J_{x1y1} = \int x_1 \cdot y_1 \cdot dA = \int (xcos\theta + ysen\theta) \cdot (ycos\theta - xsen\theta) \cdot dA$$

$$J_{x1y1} = (J_x - J_y) \cdot sen\theta cos\theta + J_{xy} \cdot (\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta)$$

Usando las mismas identidades trigonométricas.

$$\boldsymbol{J_{x1y1} = \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \mathrm{sen}\,2\theta + J_{xy} \cdot cos\,2\theta}$$

2.6 Rotación de ejes.



$$J_{y1} = \int {x_1}^2 \cdot dA = \int (x \cdot \cos\theta + y \cdot \operatorname{sen}\theta)^2 \cdot dA$$

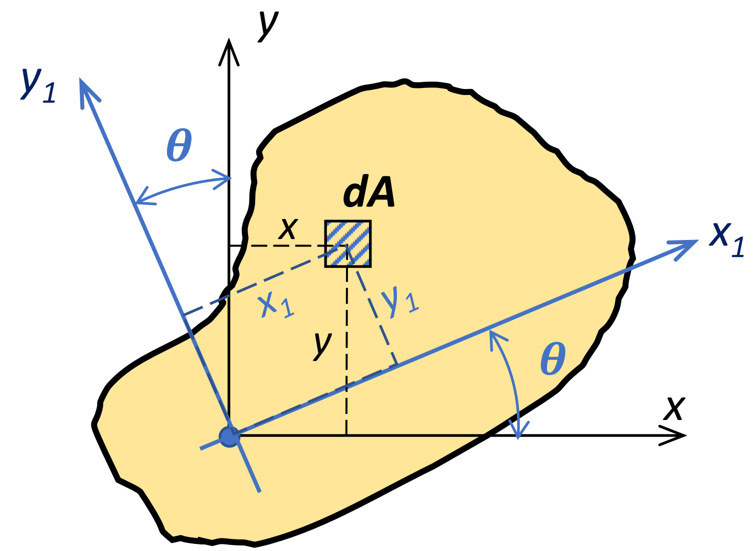
$$J_{y1} = \cos^2\theta \cdot \int x^2 \cdot dA + \operatorname{sen}^2\theta \cdot \int y^2 \cdot dA + 2 \cdot \cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \int xy \cdot dA$$

$$J_{y1} = J_x \operatorname{sen}^2\theta + J_y \cos^2\theta + 2J_{xy} \cdot sen\theta \cdot \cos\theta$$

Nuevamente usando las mismas identidades trigonométricas.

$$J_{y1} = \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \cos 2\theta + J_{xy} \cdot sen\, 2\theta$$

2.6 Rotación de ejes.
Resumen



$$J_{x1} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \cos 2\theta - J_{xy} \cdot sen\, 2\theta$$

$$J_{y1} = \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \cos 2\theta + J_{xy} \cdot sen\, 2\theta$$

$$J_{x1y1} = \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \mathrm{sen}\, 2\theta + J_{xy} \cdot cos\, 2\theta$$

Si sumamos $J_{x1} + J_{y1}$

$$J_{x1} + J_{y1} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \cos 2\theta - J_{xy} \cdot sen\, 2\theta + \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \cos 2\theta + J_{xy} \cdot sen\, 2\theta$$

$$J_{x1} + J_{y1} = J_x + J_y = J_p$$

INVARIANTE: La suma de los momentos de inercia con respecto a un par de Ejes permanece constante según se giran los ejes respecto al origen.
Esta suma es el momento polar de inercia del área con respecto al origen.

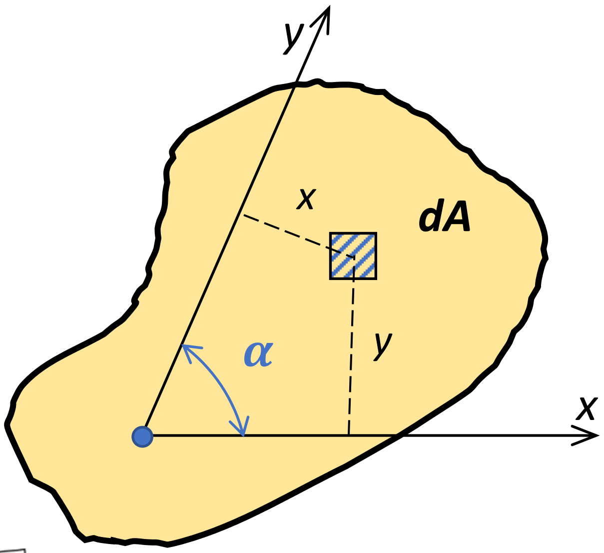
Momento de inercia centrífugo respecto de dos ejes no ortogonales.

$$dJ_{xy} = x \cdot y \cdot dA$$

$$J_{xy} = \int x \cdot y \cdot dA$$

$$J_x = \int y^2 \cdot dA$$

$$J_y = \int x^2 \cdot dA$$

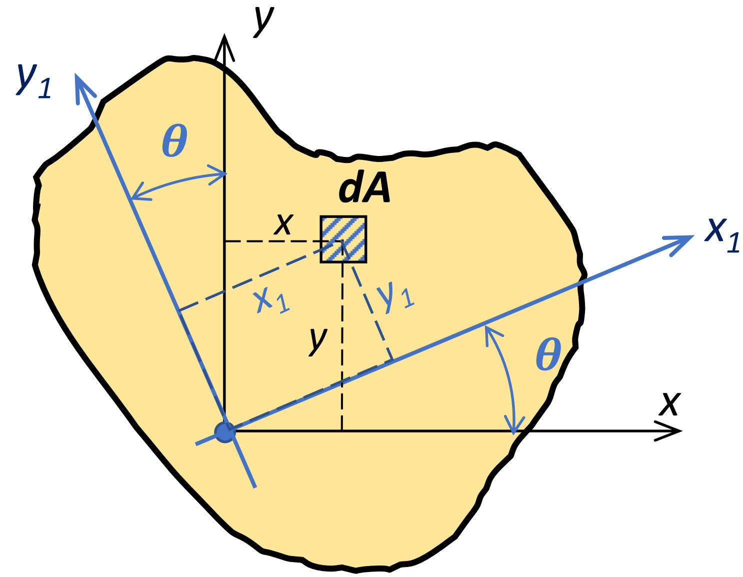


DEFINICIÓN DE EJES CONJUGADOS DE INERCIA:
Dos ejes son conjugados de inercia cuando el momento de inercia centrífugo del área con respecto a ellos es igual a cero.

2.7 Ejes Principales de Inercia.

$\boldsymbol{Cual\ es\ el\ valor\ de\ \theta\ que\ hace\ Jx_1\ máximo}$?

$$J_{x1} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \cos 2\theta - J_{xy} \cdot sen\, 2\theta$$



$$\frac{\partial J_{x_1}}{\partial \theta} = 0$$

$$(J_x - Jy) \cdot sen\, 2\theta + 2J_{xy} \cdot cos\, 2\theta = 0$$

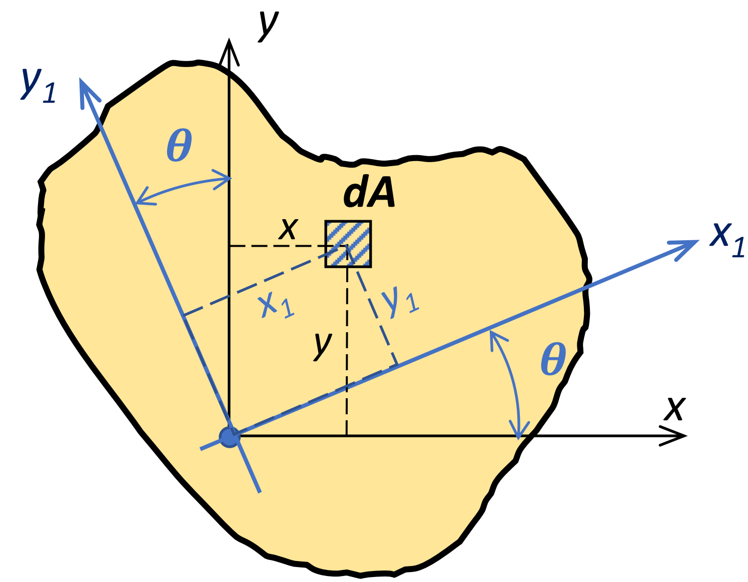
$Si\ dividimos\ por\ \cos 2\theta$

$$(J_x - Jy) \cdot tan\, 2\theta + 2J_{xy} = 0$$

$$tan\, 2\theta_p = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}$$

$dos\ valores\ de\ \theta\ satisfacen\ esta\ ecuación \rightarrow \begin{cases} \theta_1 \\ \theta_2 = \theta_1 + 90° \end{cases}$

2.7 Ejes Principales de Inercia.



Cual es el valor de θ que hace $\boldsymbol{Jx_{1y1}}$ ***cero*** ?

$$\boxed{J_{x1y1} = \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \mathrm{sen}\, 2\theta + J_{xy} \cdot \cos 2\theta}$$

$$\frac{J_x - J_y}{2} \cdot \mathrm{sen}\, 2\theta + J_{xy} \cdot \cos 2\theta = 0$$

Si dividimos por $\cos 2\theta$

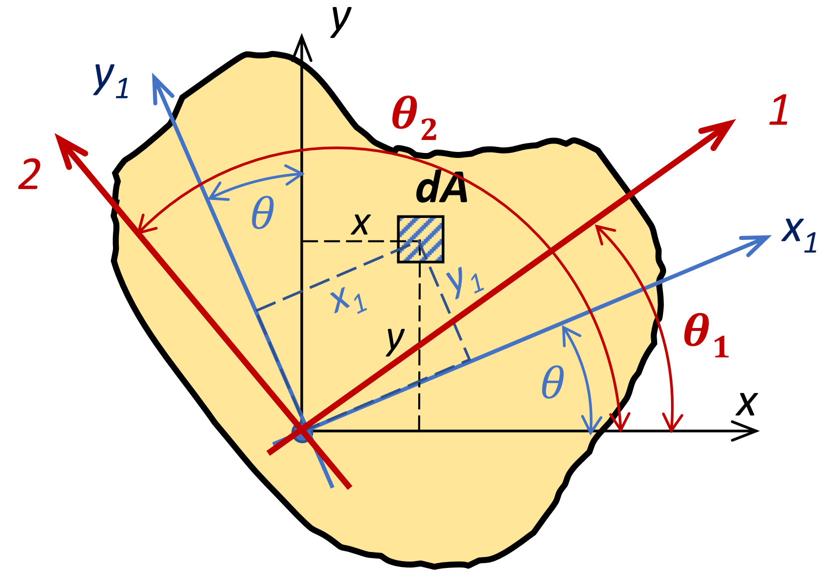
$$\frac{J_x - J_y}{2} \cdot \tan 2\theta + J_{xy} = 0$$

$$\boxed{\tan 2\theta_p = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}}$$

dos valores de θ *satisfacen esta ecuación* $\rightarrow \begin{cases} \theta_1 \\ \theta_2 = \theta_1 + 90° \end{cases}$

2.7 Ejes Principales de Inercia.

Resumen de lo actuado:



$Cual\ es\ el\ valor\ de\ \theta\ que\ hace\ Jx_1\ máximo$?

$$\tan 2\theta_p = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}$$

$Cual\ es\ el\ valor\ de\ \theta\ que\ hace\ Jx_{1y1}\ cero$?

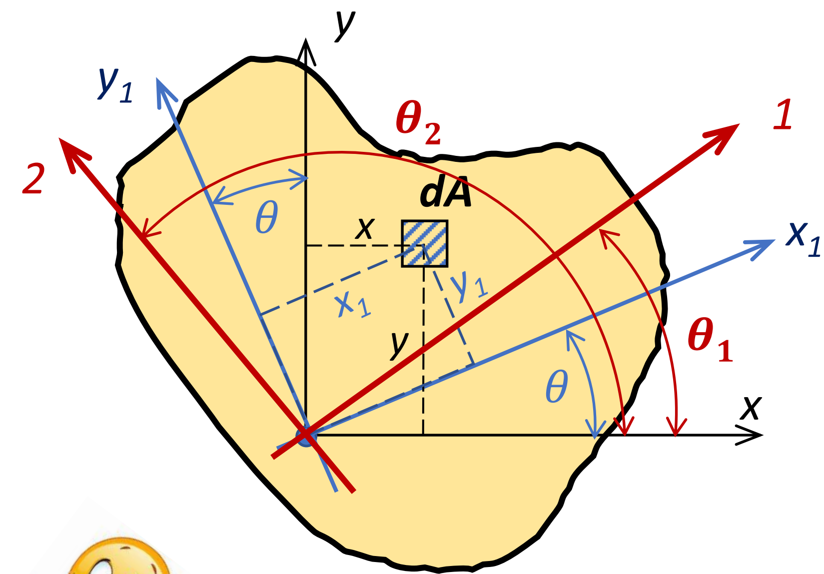
$$\tan 2\theta_p = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}$$

CONCLUSIÓN:
Dado que la ecuación que nos muestra los valores de θ que hacen Jx, Jy máximos y mínimos, es la misma que hace que Jxy sea cero, concluimos que LOS EJES PRINCIPALES DE INERCIA SON A SU VEZ CONJUGADOS DE INERCIA.

$$dos\ valores\ de\ \theta\ satisfacen\ esta\ ecuación\ \rightarrow \begin{cases} \theta_1 \\ \theta_2 = \theta_1 + 90° \end{cases}$$

2.8 Valor de los Momentos Principales de Inercia.

Los valores que nos dan J_1 y J_2 son:



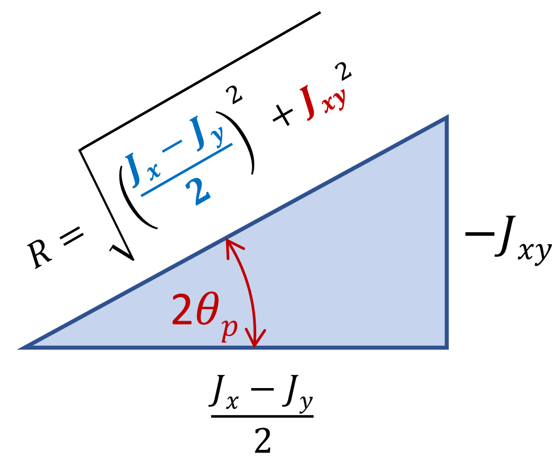
$$\tan 2\theta_p = -\frac{2J_{xy}}{J_x - Jy}$$

Que también puede expresarse como:

$$\tan 2\theta_p = -\frac{J_{xy}}{\frac{J_x - J_y}{2}}$$

$$\tan 2\theta_p = -\frac{J_{xy}}{\frac{J_x - J_y}{2}} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

La hipotenusa del triángulo para un ángulo de $2\theta_p$ será:



$$R = \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + {J_{xy}}^2}$$

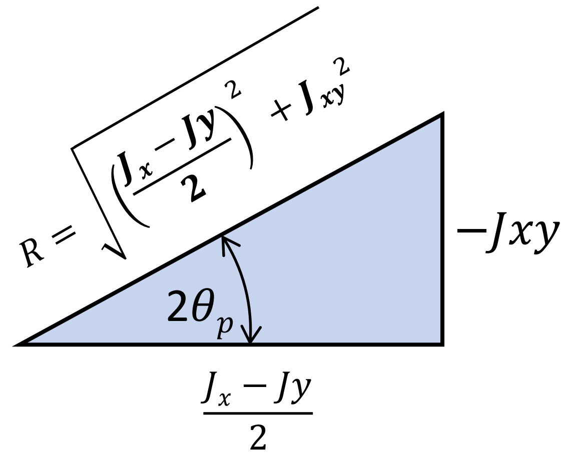
$$\cos 2\theta_p = \frac{J_x - J_y}{2R}, \qquad \operatorname{sen} 2\theta_p = \frac{-J_{xy}}{R}$$

Cuando evaluamos R, siempre tomamos la raíz cuadrada positiva.

2.8 Valor de los Momentos Principales de Inercia.

$$R = \sqrt{\left(\frac{J_x - Jy}{2}\right)^2 + {J_{xy}}^2}$$

$$\cos 2\theta_p = \frac{J_x - J_y}{2R}, \qquad \text{sen}\, 2\theta_p = \frac{-J_{xy}}{R}$$



Reemplazamos estos valores de cos y sen, en la ecuación para Jx_1 que obtuvimos en la diapositiva 20

$$\boldsymbol{J_{x1} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \cos 2\theta - J_{xy} \cdot sen\, 2\theta}$$

$$J_1 = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \frac{J_x - J_y}{2R} + \frac{{J_{xy}}^2}{R}$$

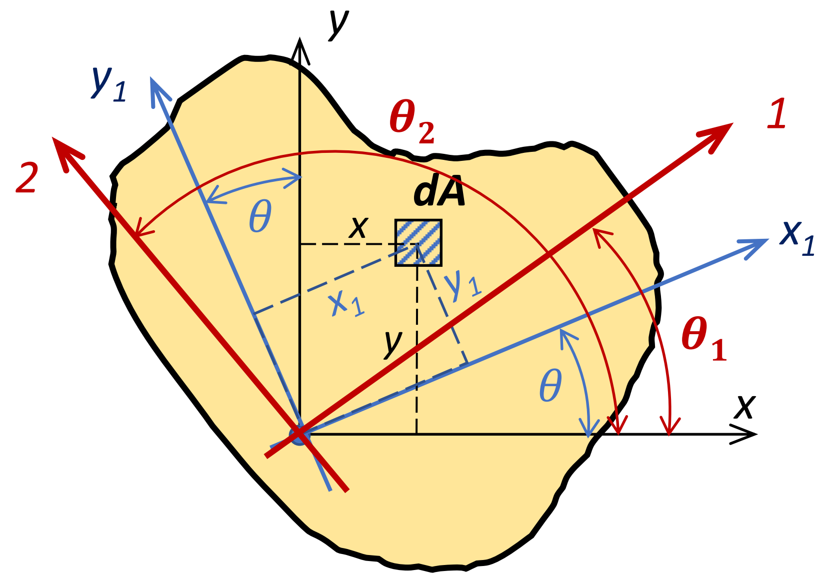
Es R^2 !!

$$J_1 = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{(J_x - J_y)^2}{4R} + \frac{{J_{xy}}^2}{R} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + {J_{xy}}^2}{R}$$

$$\boldsymbol{J_1} = \frac{J_x + J_y}{2} + R = \frac{\boldsymbol{J_x + J_y}}{\boldsymbol{2}} + \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{J_x - J_y}}{\boldsymbol{2}}\right)^2 + \boldsymbol{{J_{xy}}^2}}$$

2.8 Valor de los Momentos Principales de Inercia.

$$J_1 = \frac{J_x + Jy}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_x - Jy}{2}\right)^2 + {J_{xy}}^2}$$



Si tenemos en cuenta el invariante (ver diap.20):

$$J_x + J_y = J_1 + J_2 = J_p$$

Podemos obtener la fórmula que relacióna J_2 con los valores conocidos de J_x, J_y y J_{xy}.

$$J_2 = J_x + J_y - J_1 = J_x + J_y - \left(\frac{J_x + J_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + {J_{xy}}^2}\right)$$

$$J_2 = \frac{J_x + J_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + {J_{xy}}^2}$$

2.9 Resumen de fórmulas.

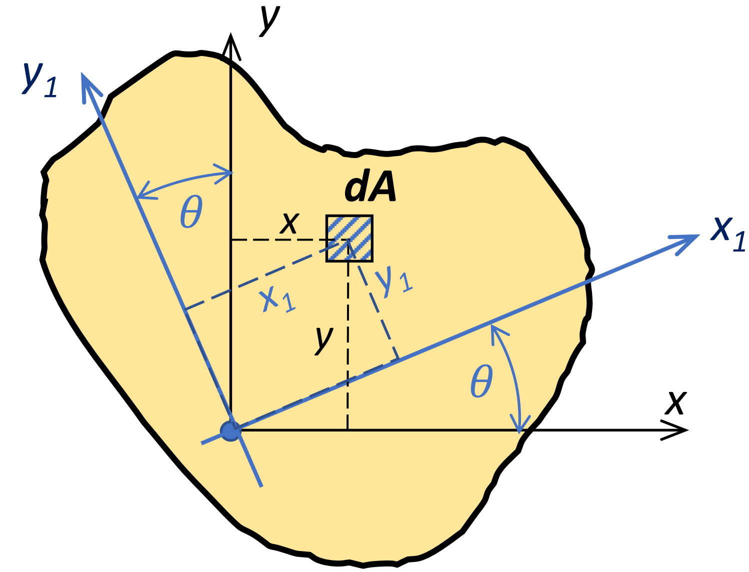
ROTACIÓN DE EJES

$$J_{x1} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \cos 2\theta - J_{xy} \cdot sen\, 2\theta$$

$$J_{y1} = \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \cos 2\theta + Jxy \cdot sen\, 2\theta$$

$$J_{x1y1} = \frac{J_x - J_y}{2} \cdot sen\, 2\theta + J_{xy} \cdot cos\, 2\theta$$

$$J_{x1} + J_{y1} = J_x + J_y = J_{\mathrm{p}}$$

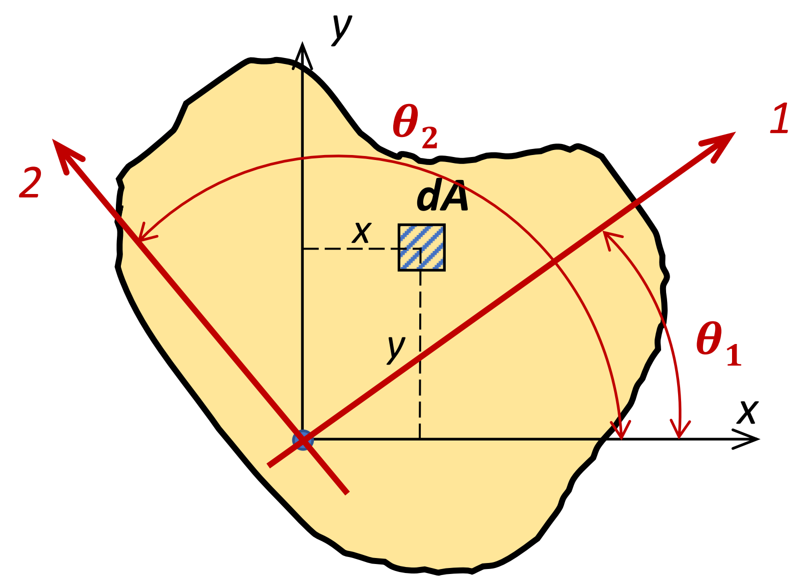


EJES PRINCIPALES DE INERCIA

$$tan\, 2\theta_{12} = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y} \quad \left[\begin{array}{l} \theta_1 \\ \theta_2 = \theta_1 + 90° \end{array}\right.$$

$$J_1 = \frac{J_x + J_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + {J_{xy}}^2}$$

$$J_2 = \frac{J_x + J_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + {J_{xy}}^2}$$



FIN