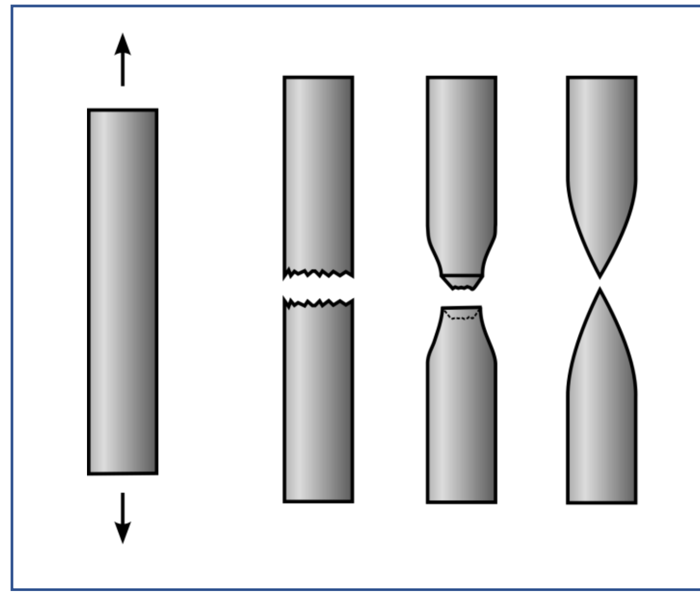
FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

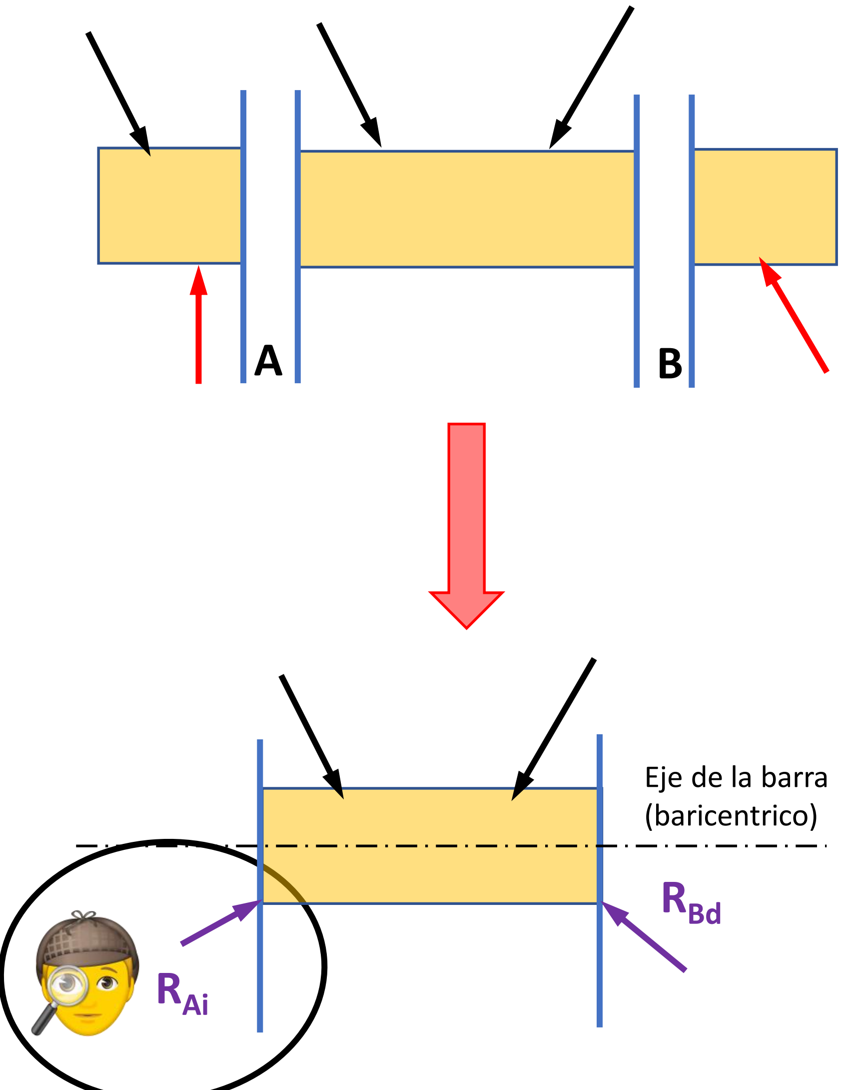
Departamento de Estabilidad

64.04 | 64.05 | 84.05
Estática y Resistencia de Materiales
Teórica
Ing. Alfredo Corral

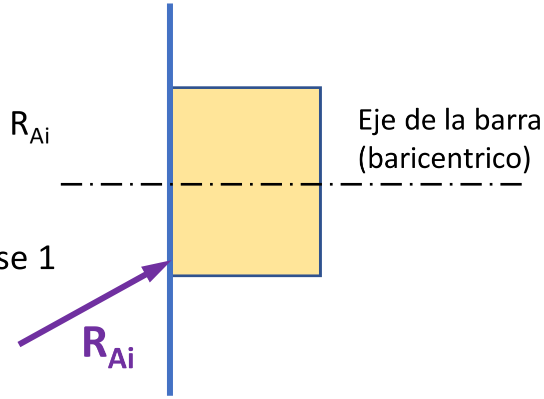
CLASE 7
INTRODUCCIÓN A LA RESISTENCIA DE MATERIALES

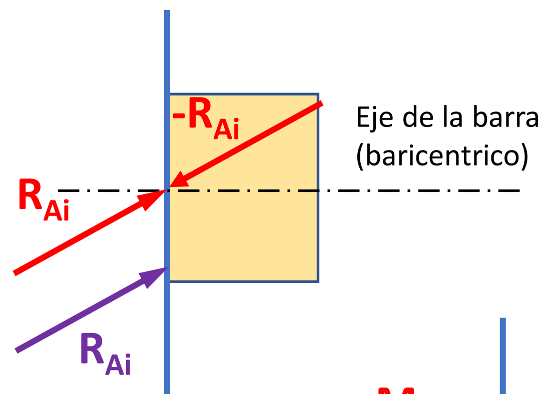


1. INTRODUCCIÓN → Recuerdan las Diapositivas 4 y 5 de la Teórica 5 ?

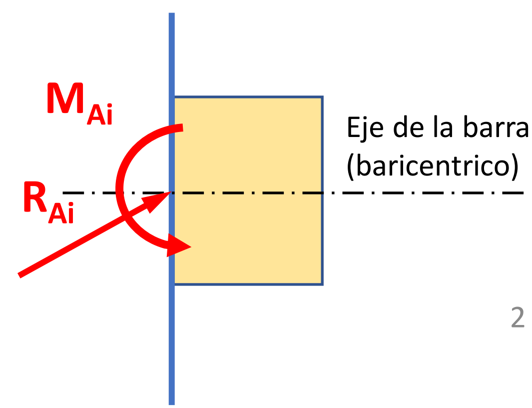


Podemos trasladar R_{Ai} al baricentro de la sección ?
Diapositiva 22. Clase 1

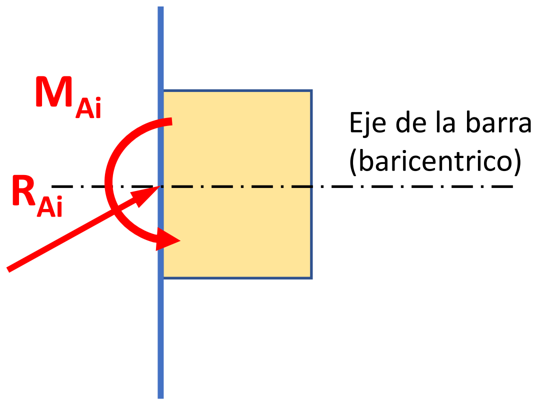




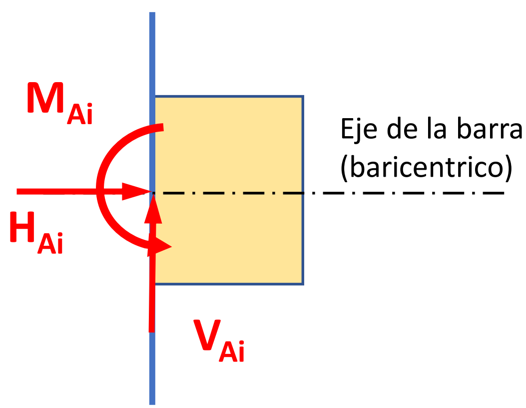
Tres sistemas equivalentes !



1. INTRODUCCIÓN → Recuerdan las Diapositivas 4 y 5 de la Clase 5 ?



Si descomponemos R_{Ai} en una fuerza horizontal y otra vertical:

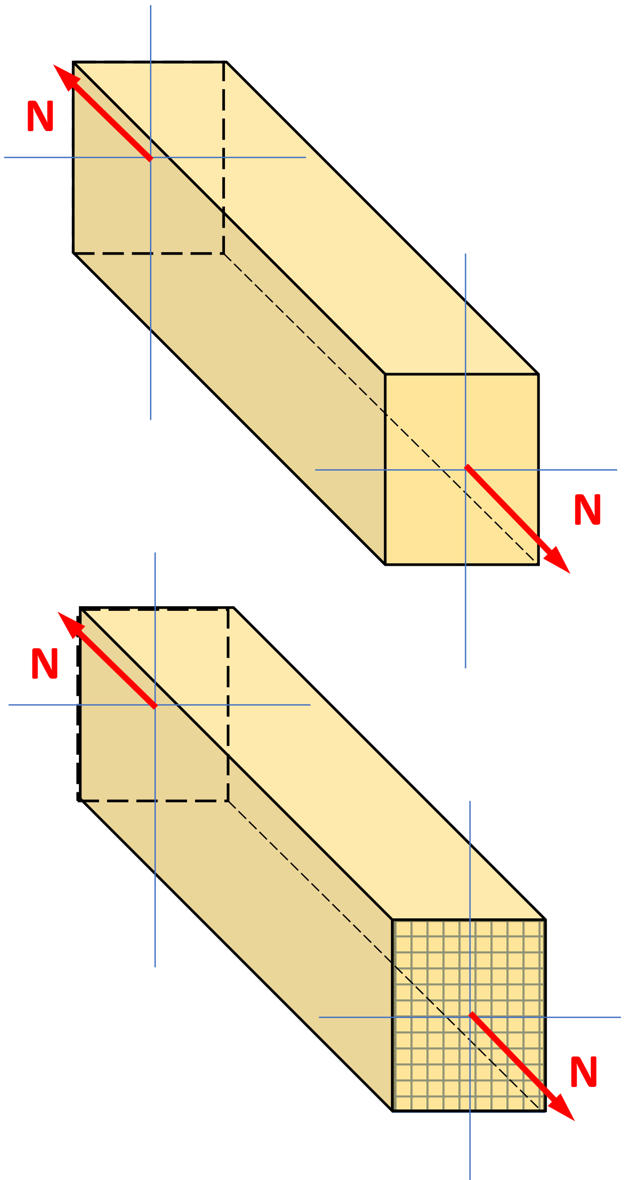


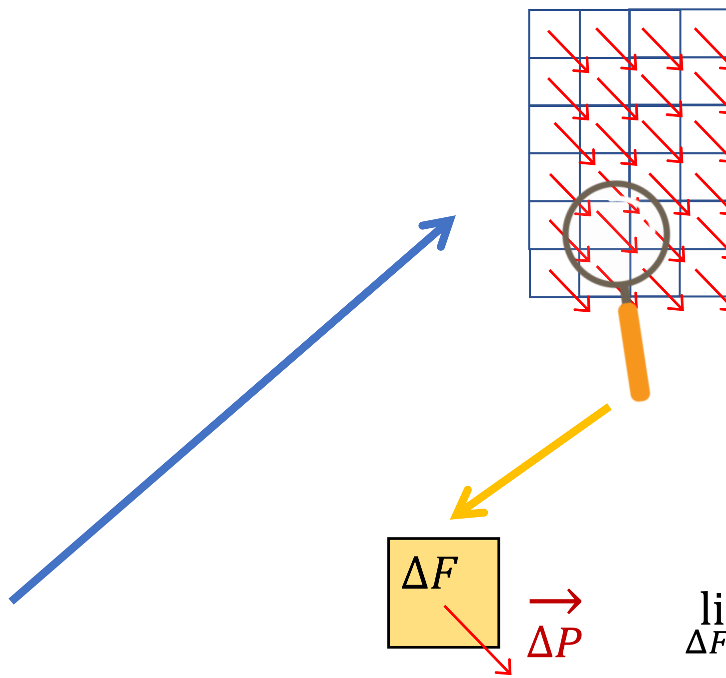
Denominaremos a M: Momento flexor
A la fuerza horizontal H, la nombramos con N: esfuerzo axil
A la fuerza vertical V, la nombramos con Q: esfuerzo de corte.
No olvidar que son dos esfuerzos iguales y opuestos uno en cada lado de la sección considerada (izquierda o derecha)

Que ocurre en la sección de la pieza cuando están actuando estos esfuerzos característicos ?

1. INTRODUCCIÓN → Hacia el concepto de tensión. Un ejemplo en solicitación axil

Supongamos un caso más simple. Que la reducción de las fuerzas en las secciones extremas de esta porción de estructura solo han arrojado un esfuerzo axil.

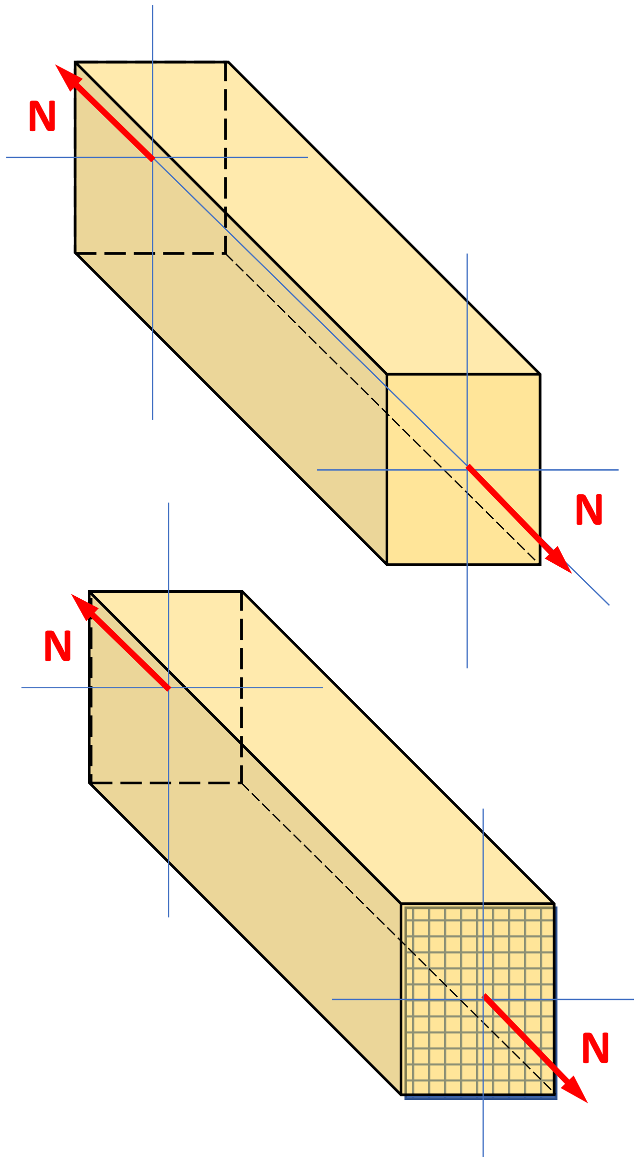


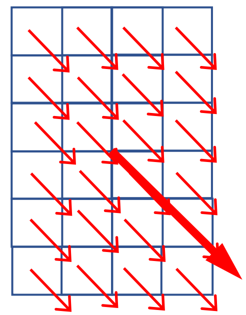


$$\lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta F} = \frac{dP}{dF} = \vec{\rho}$$

Concepto de Tensión

1. INTRODUCCIÓN → Hacia el concepto de tensión. Un ejemplo en solicitación axil





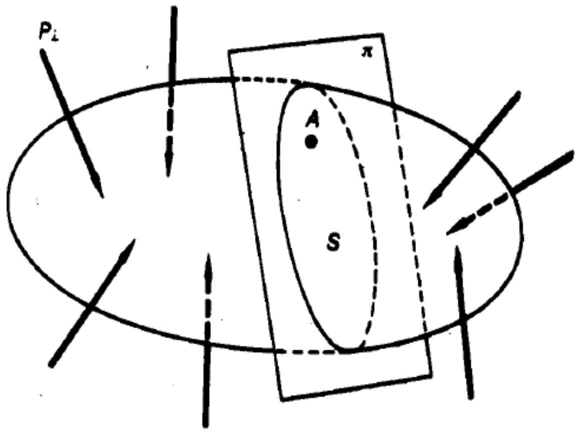
$$\sum_{1}^{n} \vec{\rho} \cdot \Delta F = \vec{N}$$

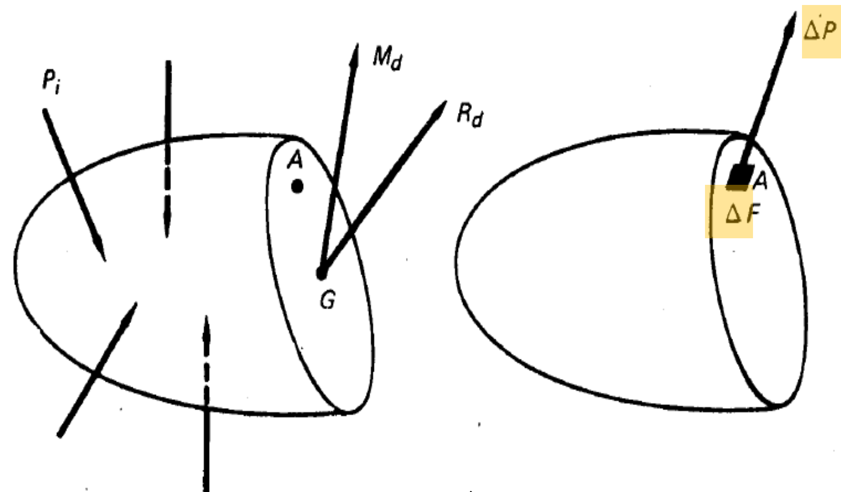
$$Si\ \Delta F \rightarrow 0$$

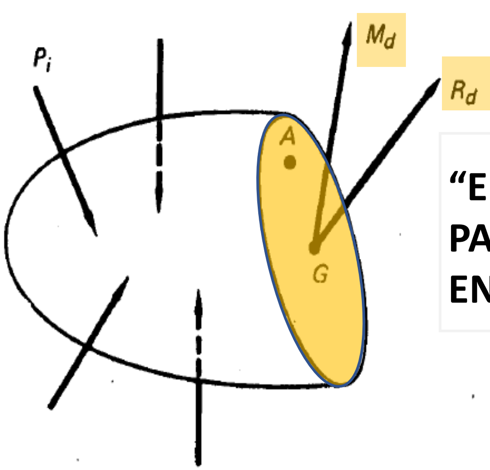
$$\int_{F} \vec{\rho} \cdot dF = \vec{N}$$

Equivalencia !!

1. INTRODUCCIÓN → CONCEPTO DE TENSIÓN







"EL TODO Y LAS PARTES DEBEN ESTAR EN EQUILIBRIO" ->

$$\lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta F} = \frac{dP}{dF} = \vec{\rho}$$

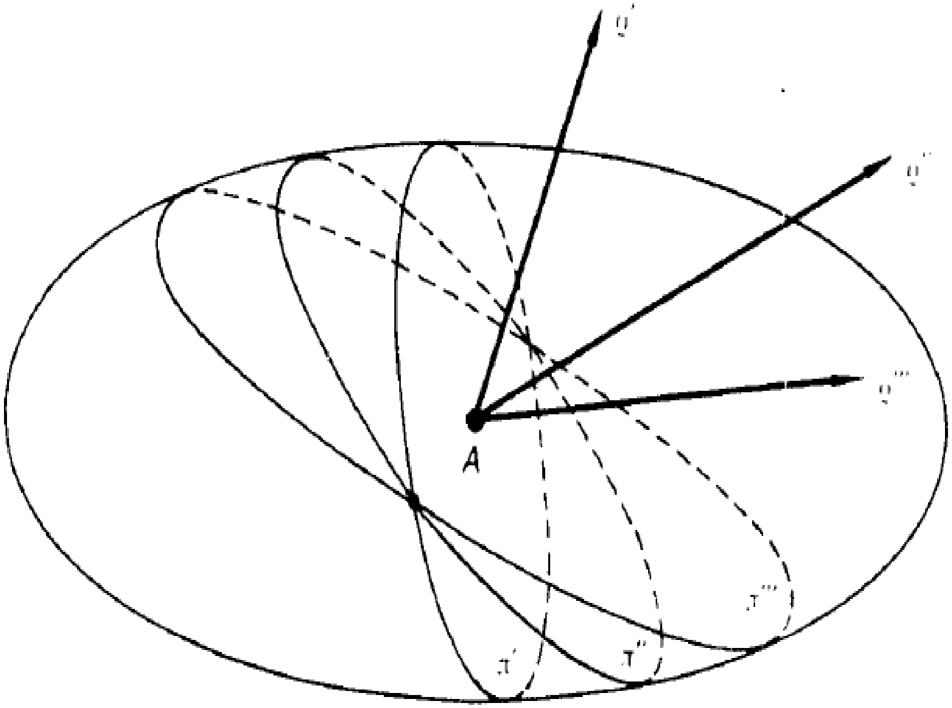
Unidades de tensión:

$$\frac{ton}{m^2}, \frac{kg}{cm^2}, \frac{kN}{m^2}, etc$$

Dado que ρ tiene intensidad, dirección y sentido, el mismo constituye una magnitud vectorial

2. RÉGIMEN DE TENSIONES EN UN PUNTO

Que sucede con el vector tensión en un punto como el A, si cortamos la sección con otro plano ?
De acuerdo a la variación de la dirección del vector tensión podemos tener tres casos:



2.1 Estado Triple, triaxial de tensión, espacial de tensión:

Al variar el plano, la tensión varía en intensidad, dirección y sentido. El vector tensión tiene cualquier orientación en el espacio.

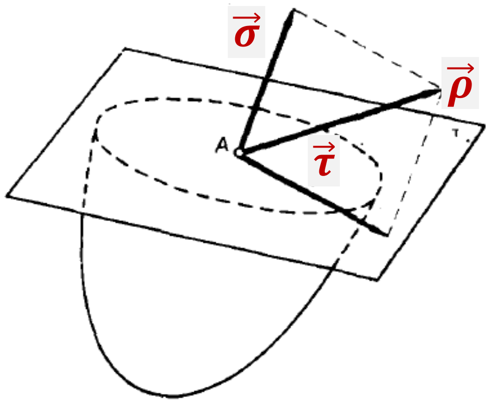
2.2 Estado Doble, plano de tensión, biaxial de tensión:

Al variar el plano, la tensión varía en intensidad, dirección y sentido pero el vector tensión siempre pertenece al mismo plano.

2.3 Estado Simple, lineal o axil de tensión:

Al variar el plano, el vector tensión es siempre paralelo a una misma dirección.

3. TENSIONES NORMALES Y TANGENCIALES

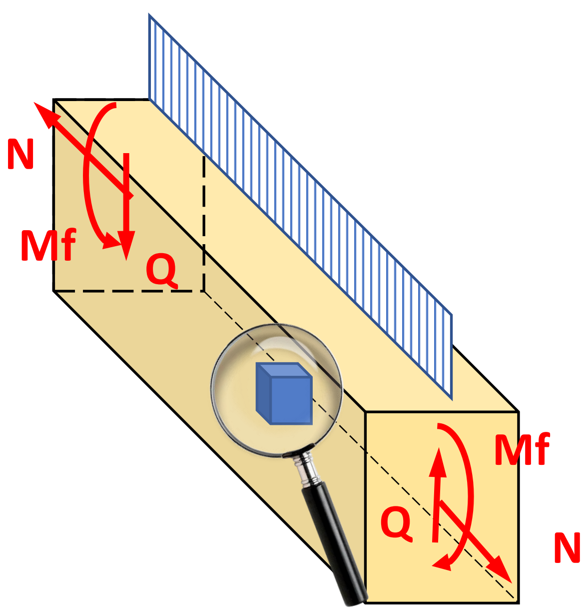


La tensión ρ en un punto A, para un plano π, siempre puede descomponerse en dos vectores tensión:

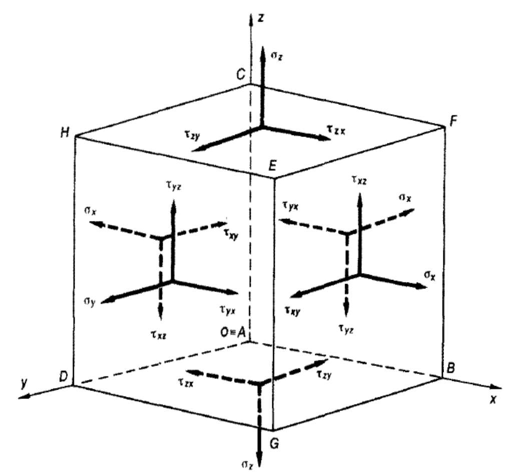
Una normal al plano, que denominamos
Tensión normal σ

y otra contenida en el plano de la sección que denominaremos como
Tensión tangencial τ

4. CONVENCIONES DE SIGNOS Y DENOMINACIONES PARA EL CUBO ELEMENTAL DE TENSIONES.

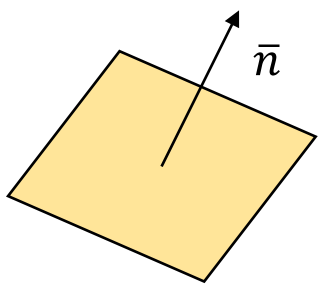


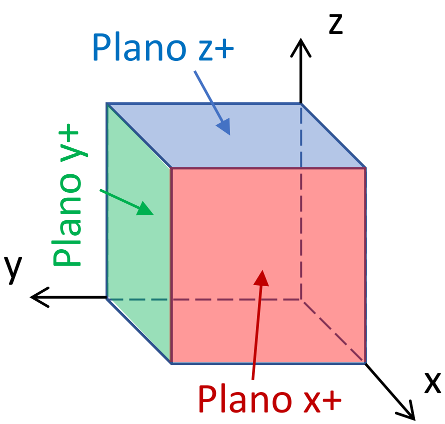
Supongamos que tomamos un pequeño cubo elemental de esta porción de barra sometida a los esfuerzos genéricos que se indican.
Las tensiones que aparecen en cada cara del cubo deberían estar en equilibrio también !!
Pero primeramente veamos como designarlas.

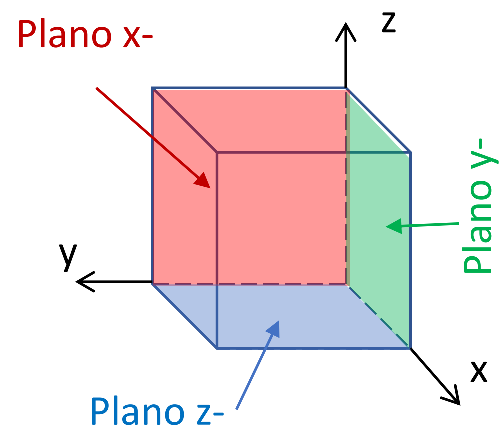


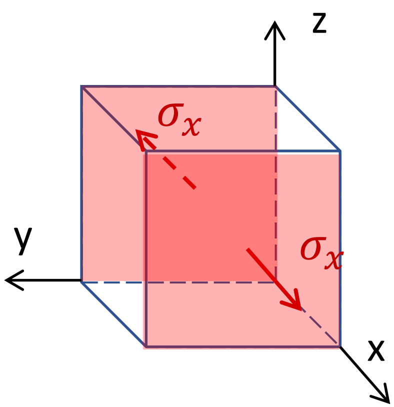
4. CONVENCIONES DE SIGNOS Y DENOMINACIONES PARA EL CUBO ELEMENTAL DE TENSIONES.

Primeramente definamos planos positivos y negativos en el cubo elemental.
Un plano se define por su “versor” o vector unitario el cual es perpendicular al plano.







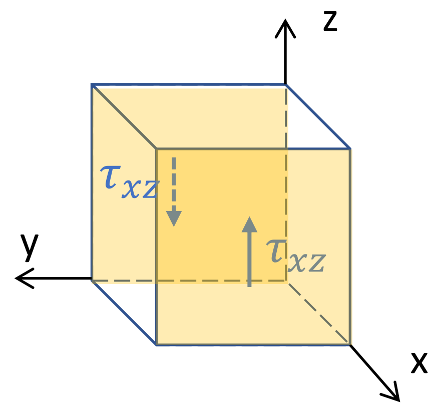


Tensiones σ positivas:

Tienen la dirección del versor del plano en el cual están aplicadas.
Si el plano es positivo σx será positiva si tiene la dirección de +x.
Si el plano es negativo σx será positiva si tiene la dirección de –x.
Las dos tensiones σx dibujadas son positivas !

El criterio es igual al considerado para la solicitación axil en reticulados. Ver diap.

Nomenclatura para las tensiones tangenciales τ:



Las tensiones τxz aquí dibujadas son positivas !

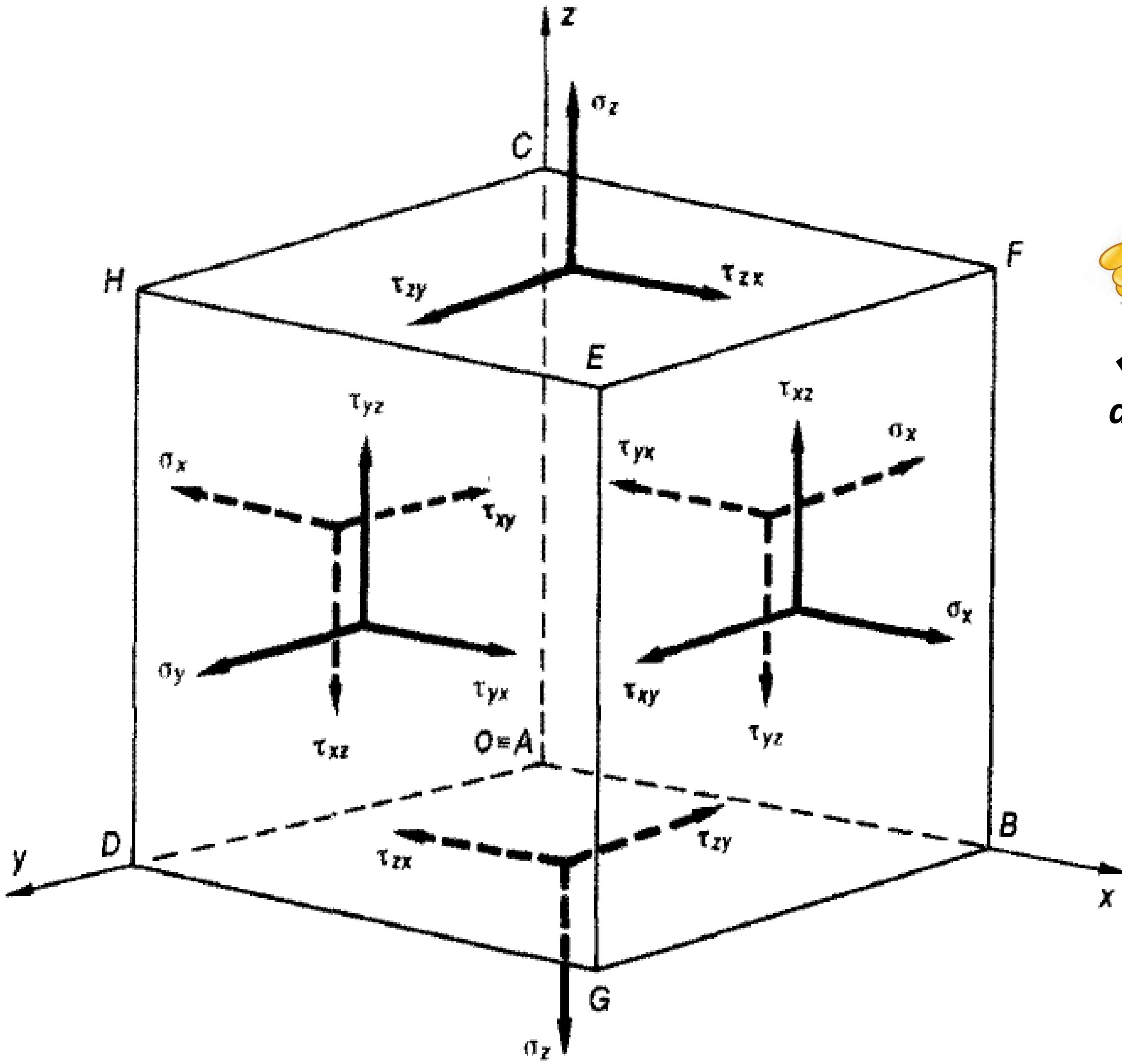
τ_{xz}

Plano | Dirección

Tensiones τx positivas:

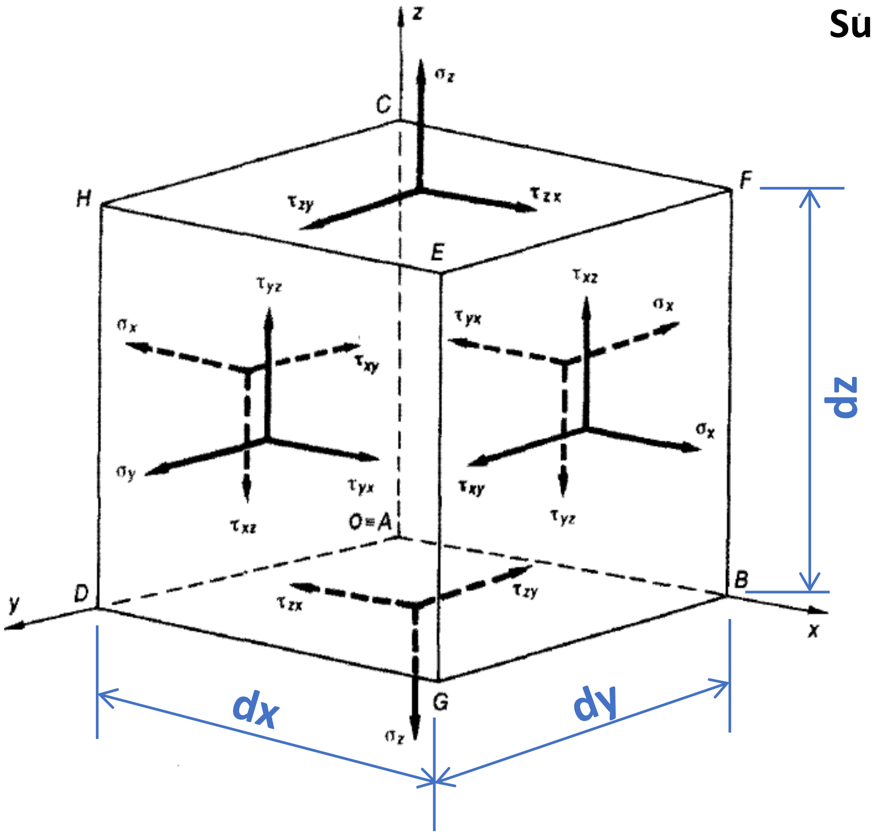
El signo del plano y la dirección de τ definen el signo.
Si t está en un plano + y tiene dirección según eje + será positiva.
Asimismo si τ está en un plano – y tiene dirección – será positiva.

4. CONVENCIONES DE SIGNOS Y DENOMINACIONES PARA EL CUBO ELEMENTAL DE TENSIONES.



← Todas las tensiones aquí dibujadas con positivas !!

5. EQUILIBRIO DEL CUBO ELEMENTAL. TEOREMA DE CAUCHY



Suponemos que los lados de este cubo son dx, dy y dz.

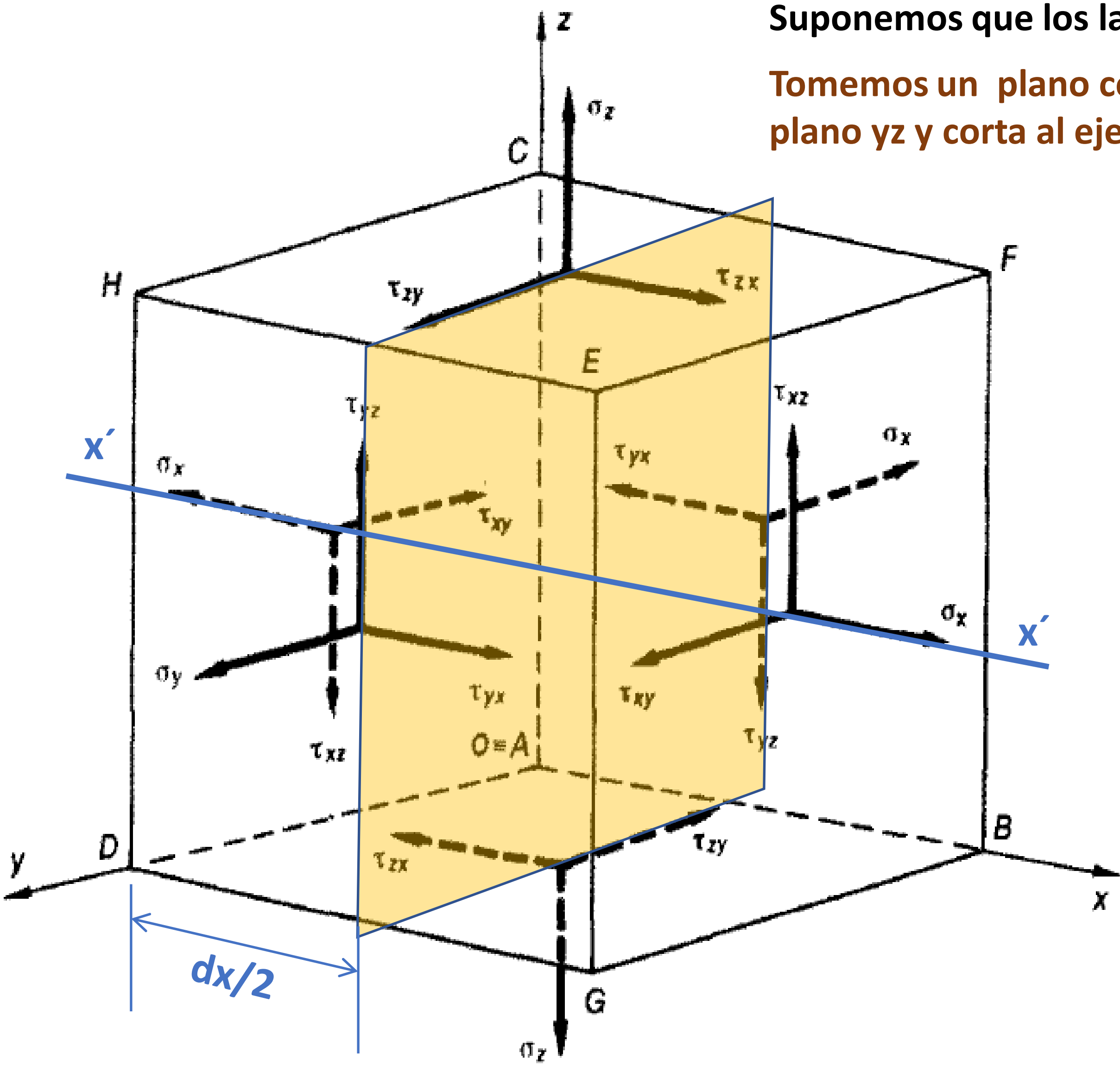
Veamos primeramente las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de un sistema de fuerzas en el espacio:

$$\sum P_{xi} = 0 \qquad \sum M_{xi} = 0$$

$$\sum P_{yi} = 0 \qquad \sum M_{yi} = 0$$

$$\sum P_{zi} = 0 \qquad \sum M_{zi} = 0$$

5. EQUILIBRIO DEL CUBO ELEMENTAL. TEOREMA DE CAUCHY



Suponemos que los lados de este cubo son dx, dy y dz.

Tomemos un plano como por ejemplo el paralelo al plano yz y corta al eje x en dx/2.

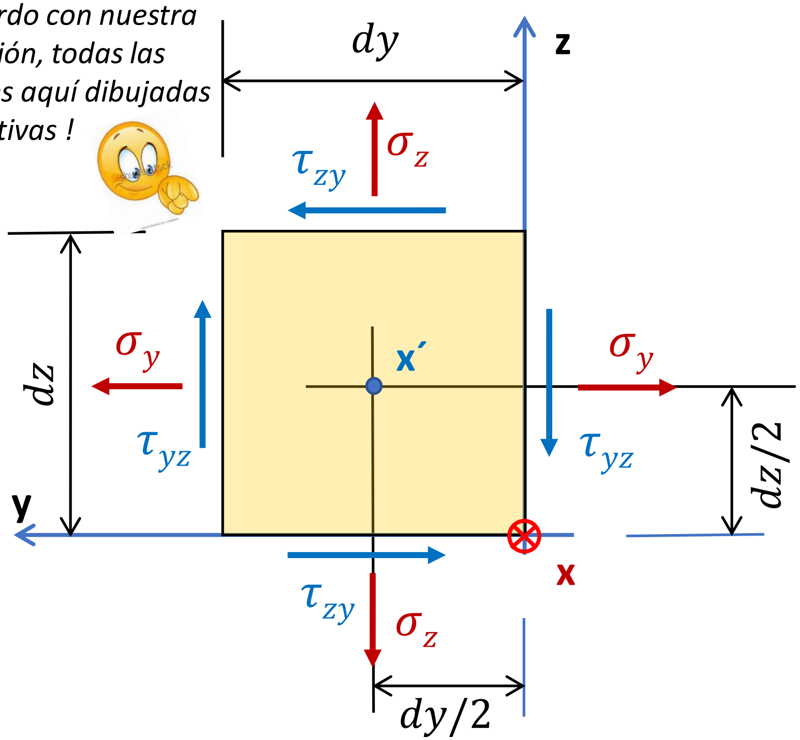
A continuación evaluemos que tensiones producen momento con respecto e un eje como el x´paralelo al eje x y a dy/2 y dz/2 el origen:

σx es coaxial con x´
σy y σz son perpendiculares a x´ y tienen brazo de momento igual a cero.
τxz y τzx pertenecen al mismo plano que el x´ por lo que no producen momento con respecto a este eje.
Lo mismo ocurre con τxy y τyx.

La únicas tensiones que producen momento con respecto al eje x´ son las tensiones τzy y τyz.

5. EQUILIBRIO DEL CUBO ELEMENTAL. TEOREMA DE CAUCHY

De acuerdo con nuestra convención, todas las tensiones aquí dibujadas son positivas !



Para el equilibrio la suma de momentos con respecto a x´, deberá ser nula:

σx y σy no producen momento porque su recta de acción pasa por el punto de intersección del x´ con dichas rectas (brazo nulo)

Cada tensión en una cara multiplicada por la superficie en la que actúa aporta una fuerza elemental. Por ejemplo:

$$\tau_{yz} \cdot dz \cdot dx$$

$$\sum M_{x'} = 0$$

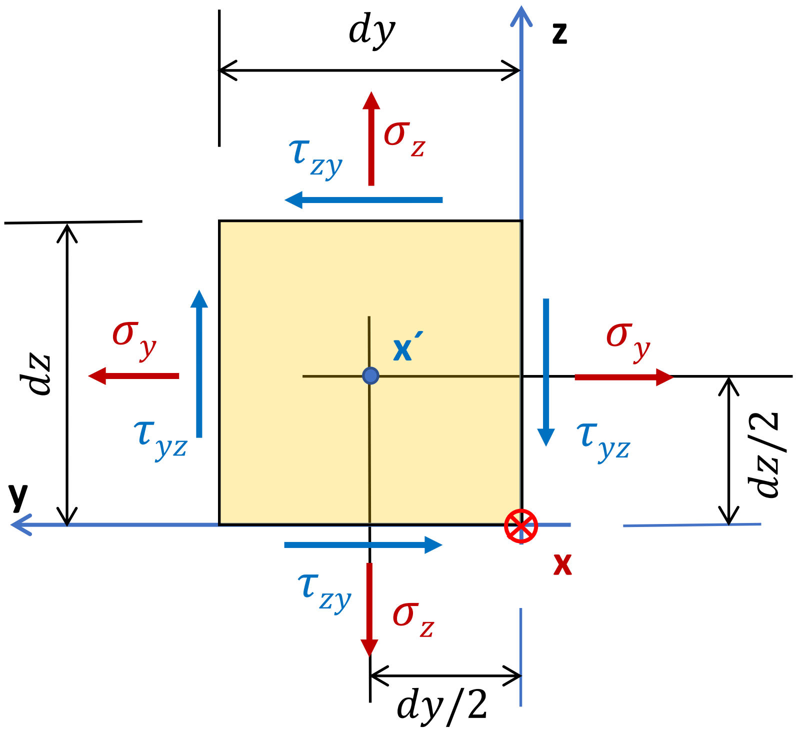
$$2 \cdot \tau_{yz} \cdot dz \cdot dx \cdot \frac{dy}{2} - 2 \cdot \tau_{zy} \cdot dx \cdot dy \frac{dz}{2} = 0$$

Fuerza elemental | Brazo

Simplificando:

$$\boldsymbol{\tau_{yz} = \tau_{zy}}$$

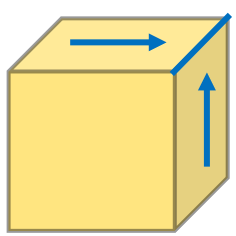
5. EQUILIBRIO DEL CUBO ELEMENTAL. TEOREMA DE CAUCHY

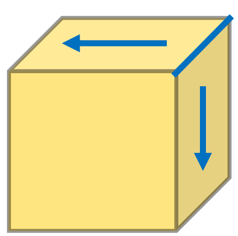


$$\boldsymbol{\tau_{yz} = \tau_{zy}}$$

Analogamente, si para el equilibrio planteamos ls suma de momentos nulos con respecto a ejes y´y z´obtendríamos:

$$\boldsymbol{\tau_{xz} = \tau_{zx}} \qquad \boldsymbol{\tau_{xy} = \tau_{yx}}$$





Esto nos lleva a enunciar el ***Teorema de Cauchy:***
"En dos planos normales cualesquiera, cuya intersección define una arista, las componentes normales a esta de las tensiones tangenciales que actúan en dichos planos, son de igual intensidad y concurren o se alejan de la arista"

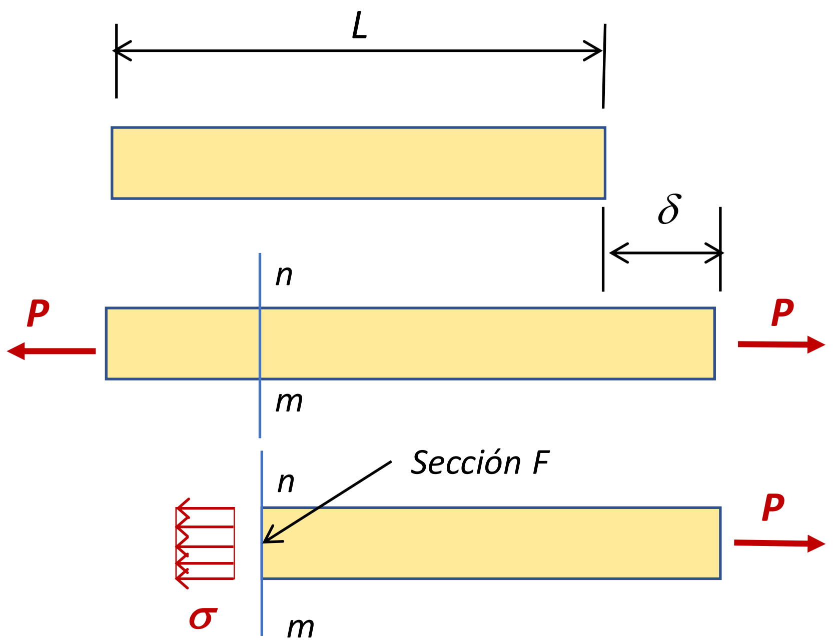
INTERVALO

Laboratorio de Materiales:
Máquina universal para ensayos.

6. ELASTICIDAD LINEAL Y LEY DE HOOKE.

6.1 Módulo de elasticidad longitudinal E y deformación lineal específica ε

Repasamos el concepto de tensión e introducimos el concepto de deformación.



La tensión normal σ, puede expresarse como:

$$\sigma = P/F$$

A su vez podemos introducir el concepto de ***"Deformación lineal específica ε":***

$$\boldsymbol{\varepsilon = \delta/L}$$

La deformación lineal específica es entonces una deformación por unidad de longitud, y no posee unidades.

Un ejemplo simple: Supongamos que la barra de acero de la figura, debido al esfuerzo de tracción P, se deformara en δ = 1.4mm, y que la longitud de la barra fuera de 2 m. Cual sería el valor de la deformación lineal específica ε ?

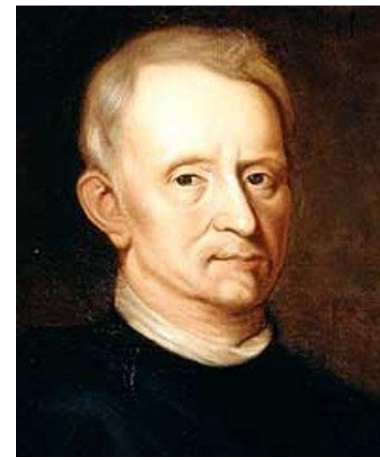
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\delta}{L} = \frac{1.4 \cdot 10^{-3}\, m}{2\, m} = \mathbf{0.0007} = 7 \cdot 10^{-4}$$

6. ELASTICIDAD LINEAL Y LEY DE HOOKE.

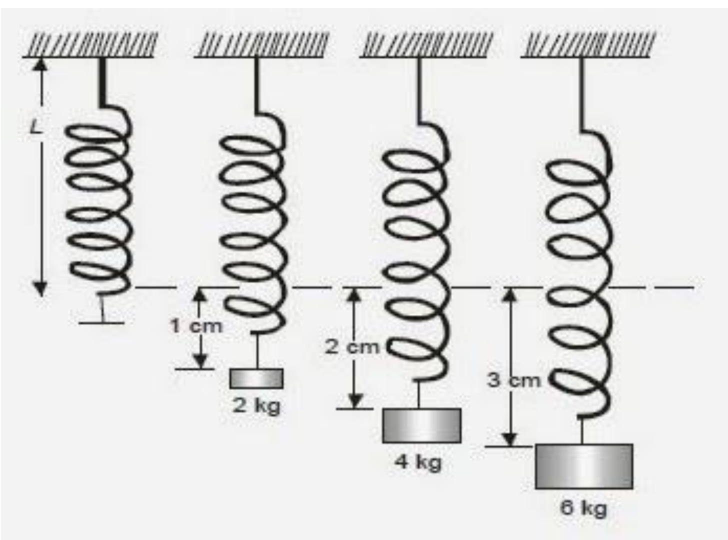
6.1 Módulo de elasticidad longitudinal E y deformación lineal específica ε

Existe alguna relación entre la tensión normal σ y la deformación lineal específica ε?

Robert Hooke (1635 – 1703)



Hooke, ensayo con materiales tan diversos como metales, madera, piedra, huesos y tendones, y determinó que para el caso del alargamiento de alambres de longitud apreciable que soportaban pesos.



Observó que el cambio de longitud en estos alambres (o resortes):
“siempre mantienen las mismas proporciones, uno a otro, al igual que los pesos que los ocasionan”

Hooke estableció una ley lineal entre la carga aplicada y el alargamiento resultante.

6. ELASTICIDAD LINEAL Y LEY DE HOOKE.

6.1 Módulo de elasticidad longitudinal E y deformación lineal específica ε

La expresión de la Ley de Hooke se resume con esta ecuación:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Donde E recibe el nombre de: ***MÓDULO DE ELASTICIDAD LONGITUDINAL****, y también es conocido como el* ***MÓDULO DE YOUNG.***

Que unidades tiene E ?

Unidades de Tensión !

1 Pa= 1 N/m² = 0,1 kg/m², PASCAL

1KPa = 1.000 N/m² = 100 kg/m²

1 MPa = 100.000 Kg/m² = 10 kg/cm²

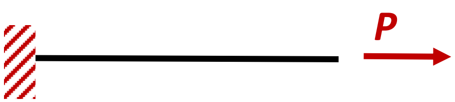
Material	E (Pa) (N/m²)	E (kg/cm²)
Aluminio	**7×10^{10}**	**700000**
Acero	**21×10^{10}**	**2100000**
Ladrillo	2×10^{10}	200000
Vidrio	7×10^{10}	700000
Hueso (a lo largo de su eje)		
Tracción	1.6×10^{10}	16000
Compresión	0.9×10^{10}	9000
Madera dura	**1×10^{10}**	**100000**
Tendón	2x1010	200000

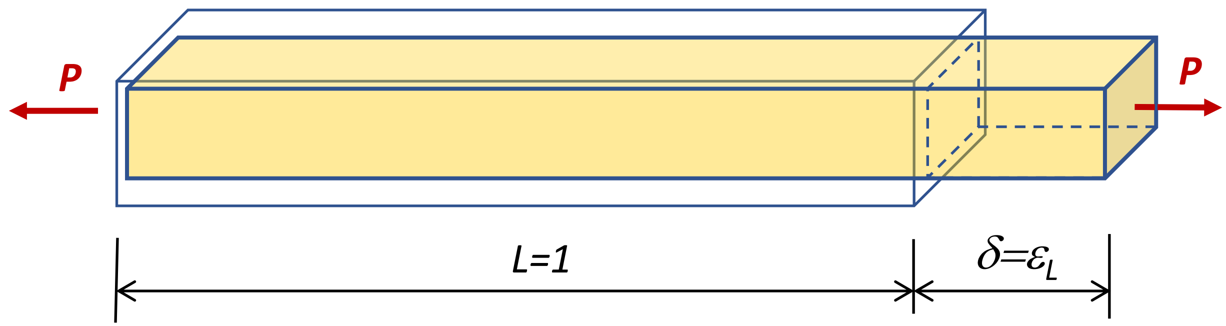
$$\varepsilon = \sigma / E$$

6. ELASTICIDAD LINEAL Y LEY DE HOOKE.

6.2 Relación de Poisson

Cuando una barra prismática se carga a tensión, el alargamiento axial va a compañado de una contracción lateral (perpendicular a la dirección de la carga aplicada).





$$\mu \text{ ó } \nu = -\frac{deformación\ específica\ lateral\ (transversal)}{deformación\ específica\ axial\ (longitudinal)} = -\frac{\boldsymbol{\varepsilon_T}}{\boldsymbol{\varepsilon_L}}$$

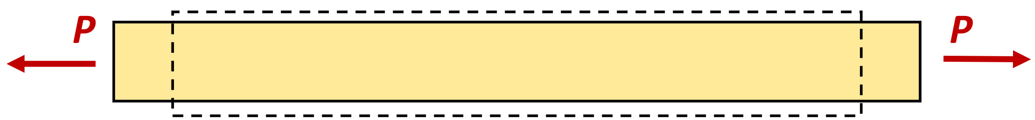
Material	
Corcho (límite inferior de ν)	Casi cero
Metales	0,25 a 0,35
Concreto	0,1 a 0,2
Material isótropo ideal	1/3

$$\nu = -\frac{\boldsymbol{\varepsilon_T}}{\boldsymbol{\varepsilon_L}}$$

6. ELASTICIDAD LINEAL Y LEY DE HOOKE.

6.2 Relación de Poisson → Ejercicio de ejemplo

Una barra prismática de sección transversal circular se carga con fuerzas de tracción P=8500 kg. La barra tiene una longitud L=3m y un diámetro d=30 mm. Está hecha de aluminio con un módulo de elasticidad E=700000 kg/cm² y un módulo de Poisson ν= 1/3. Calcular el alargamiento δ, y la disminución del diámetro Δd.



$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{P}{A} = \frac{8500\ kg}{\frac{\pi \cdot (3\mathrm{cm})^2}{4}} = \mathbf{1203\ kg/cm2}$$

Por Hooke, sabemos que:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \ \rightarrow \ \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\sigma}{E} = \frac{1203\,\frac{kg}{cm^2}}{700000\,\frac{kg}{cm^2}} = \mathbf{0.00171}$$

$$\delta = \varepsilon \cdot L = 0.00171 \cdot 300\ cm = \mathbf{0.514\ cm}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon_T} = -\nu \cdot \varepsilon_L = -\,{}^{1}\!/_{3}\ \cdot 0.00171 = \mathbf{-0{,}000570}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon_T} = \ \Delta D/D$$

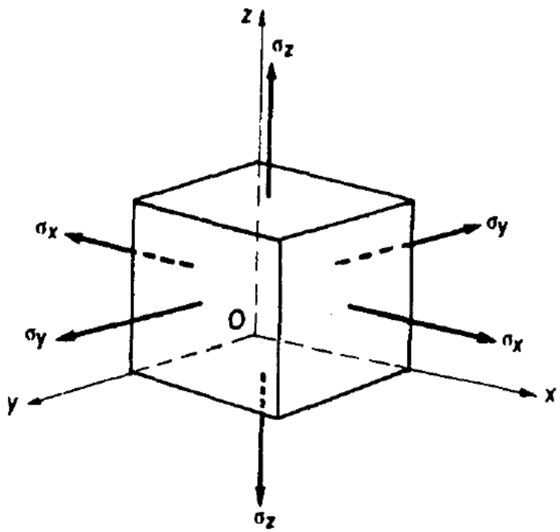
La reducción del diámetro se mide con la expresión:

$$\Delta\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\varepsilon_T} \cdot D = -0.000570\ \cdot 30\ mm = \mathbf{-0.0171}\ mm$$

6. ELASTICIDAD LINEAL Y LEY DE HOOKE.

6.3 Generalización de la Ley de Hooke

Que sucede si un cubo elemental en lugar de estar sometido solo a tensiones σ_x, está a su vez sometido a a tensiones σ_y y σ_z ? Cuanto valen las deformaciones lineales específicas totales ε_x, ε_y y ε_z ?



"Anatomía" de la deformación específica según x:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x{}' \underbrace{- \nu \cdot \varepsilon_y} \underbrace{- \nu \cdot \varepsilon_z}$$

Deformación total en x

Deformación en x debido a que hay σx

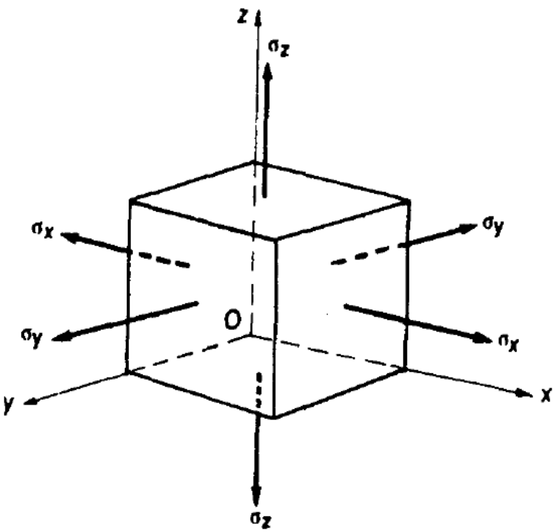
Deformación en x debido a que hay σy

Deformación en x debido a que hay σz

6. ELASTICIDAD LINEAL Y LEY DE HOOKE.

6.3 Generalización de la Ley de Hooke

Que sucede si un cubo elemental en lugar de estar sometido solo a tensiones σ_x, está a su vez sometido a a tensiones σ_y y σ_z ? Cuanto valen las deformaciones lineales específicas totales ε_x, ε_y y ε_z ?



$$\varepsilon_x = \varepsilon_x' - \nu \cdot \varepsilon_y - \nu \cdot \varepsilon_z \quad (1)$$

Por Hooke, sabemos que:

$$\varepsilon_x' = \frac{\sigma_x}{E}, \ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}, \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \quad (2)$$

Si reemplazamos (2) en (1):

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_y - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_z$$

$$\boldsymbol{\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_y + \sigma_z)}$$

Analogamente:

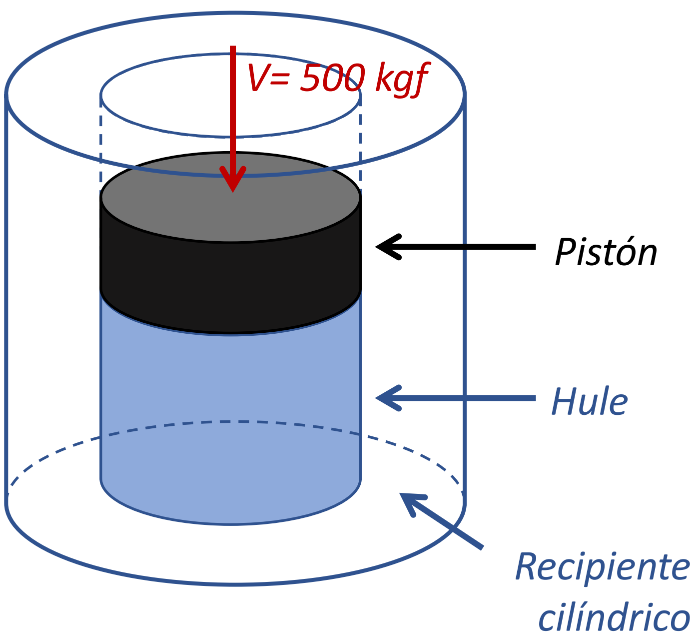
$$\boldsymbol{\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_z)}$$

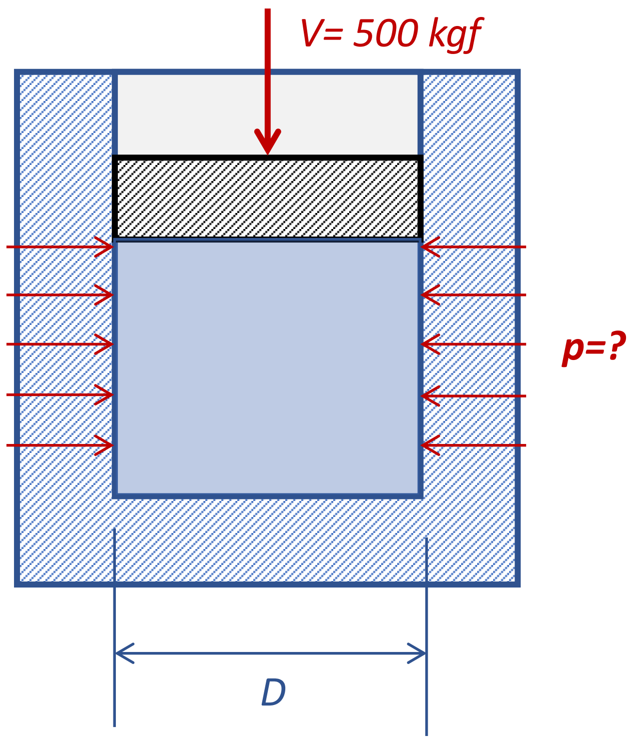
$$\boldsymbol{\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y)}$$

6. ELASTICIDAD LINEAL Y LEY DE HOOKE.

6.3 Generalización de la Ley de Hooke → Ejemplo de aplicación.

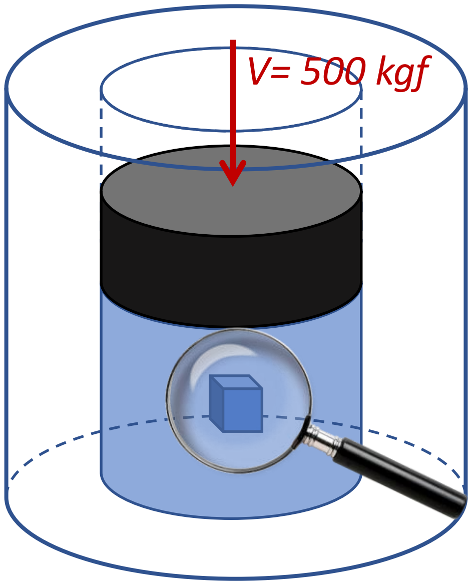
Un recipiente cilíndrico infinitamente rígido de diámetro D= 10 cm, aloja “hule” en su interior. A través de un pistón también infinitamente rígido es sometido a una carga V=500 kgf, de compresión a través del mismo. Sabiendo que el coeficiente de Poisson del hule es 0.45: Cual es la expresión que calcula la presión contra las paredes laterales del pistón y su valor ?

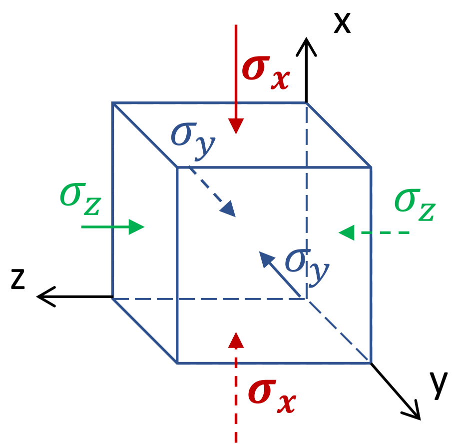




6. ELASTICIDAD LINEAL Y LEY DE HOOKE.

6.3 Generalización de la Ley de Hooke → Ejemplo de aplicación.





$$Sección\ A = \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$\sigma_x = \frac{V}{A} = \frac{V}{\frac{\pi \cdot D^2}{4}}$$

La fórmula generalizada de la Ley de Hooke nos dice que:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_z), \quad (1)$$

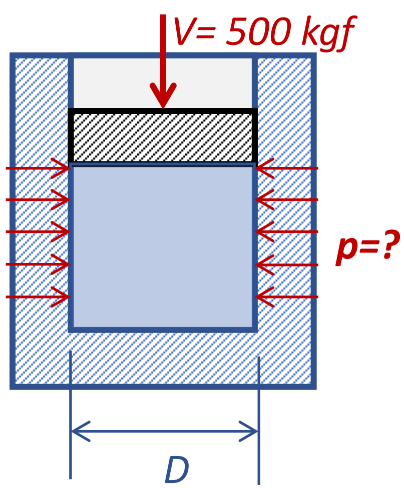
Por razones de simetría la presión lateral $p = \sigma_y = \sigma_z$

Dado que el cilindro es infinitamente rígido: $\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$

La (1) puede reescribirse como:

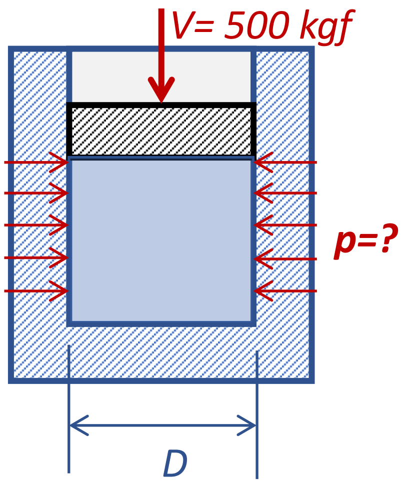
$$0 = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_x - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_y$$

$$\sigma_y \cdot (1 - \nu) - \nu \cdot \sigma_x = 0 \rightarrow \boldsymbol{\sigma_y = \frac{\nu \cdot \sigma_x}{(1 - \nu)}}$$



6. ELASTICIDAD LINEAL Y LEY DE HOOKE.

6.3 Generalización de la Ley de Hooke → Ejemplo de aplicación.



$$\boldsymbol{\sigma_y = \frac{\nu \cdot \sigma_x}{(1-\nu)}} \qquad \sigma_x = \frac{V}{A} = \frac{V}{\frac{\pi \cdot D^2}{4}}$$

$$p = \boldsymbol{\sigma_y} = \frac{\nu \cdot \sigma_x}{(1-\nu)} = \boldsymbol{\frac{4 \cdot \nu \cdot V}{(1-\nu) \cdot \pi \cdot D^2}}$$

Hule → ν=0.45, V=-500 kgf, D=10cm

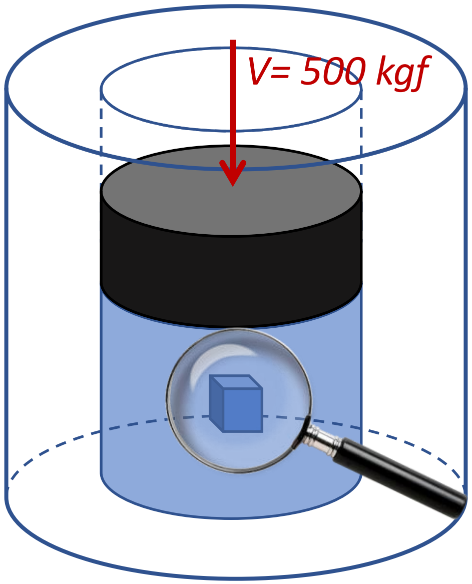
$$p = \frac{4 \cdot \nu \cdot V}{(1-\nu) \cdot \pi \cdot D^2} = -\frac{4 \cdot 0.45 \cdot 500\ kg}{0.55 \cdot \pi \cdot 10^2} = \boldsymbol{-5{,}2\ kgf/cm^2}$$

$$\sigma_x = -\frac{500\ kgf}{\frac{\pi \cdot 10^2}{4}} = -6{,}36\ kgf/cm^2$$

Tensiones bastante parecidas !!
Analicemos un poco más.

6. ELASTICIDAD LINEAL Y LEY DE HOOKE.

6.3 Generalización de la Ley de Hooke → Ejemplo de aplicación.

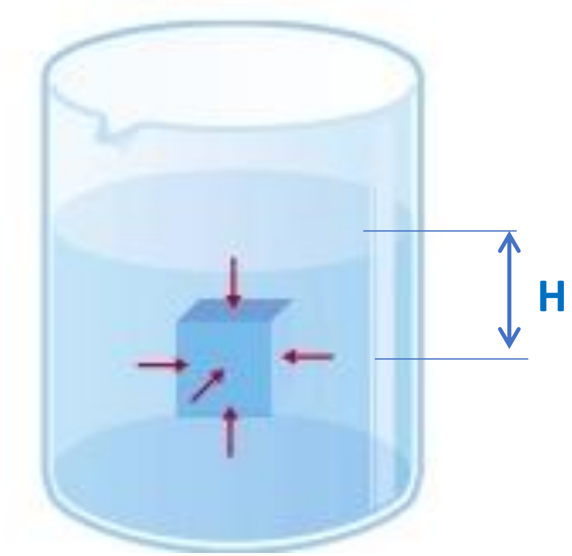


$$\sigma_y = \frac{\nu \cdot \sigma_x}{(1-\nu)}$$

Que sucede si $\nu \to 0{,}5$?

$$\sigma_y = \sigma_x$$

Estado hidrostático

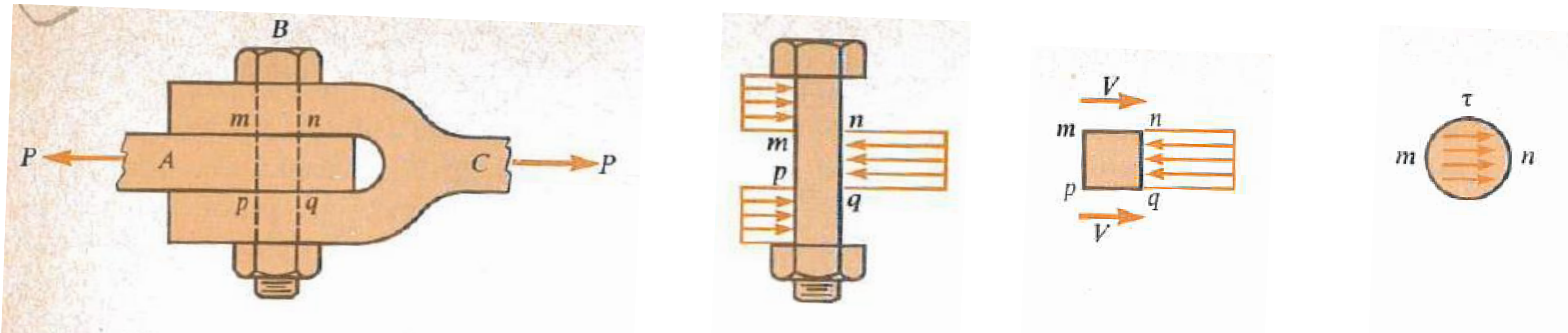


Que sucede si $\nu \to 0$?

$$\sigma_y = 0$$

Corcho, $\nu \to 0$

7. TENSIÓN TANGENCIAL, DEFORMACIÓN ANGULAR Y LEY DE HOOKE.

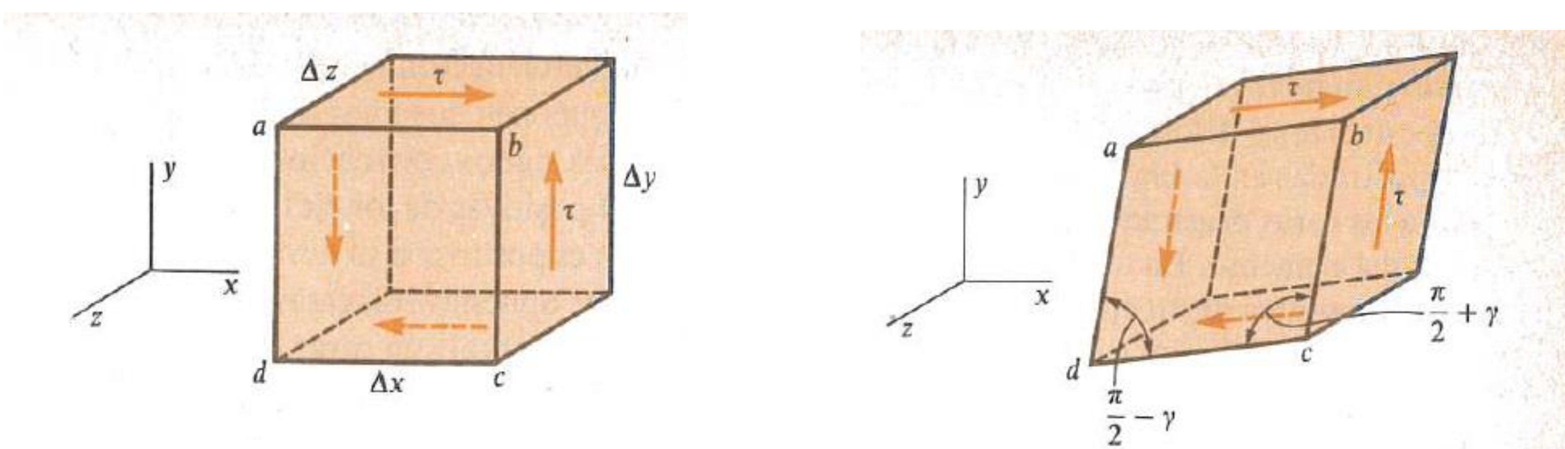


(a) (b) (c) (d)

$$\tau_{med} = \frac{V}{A}$$

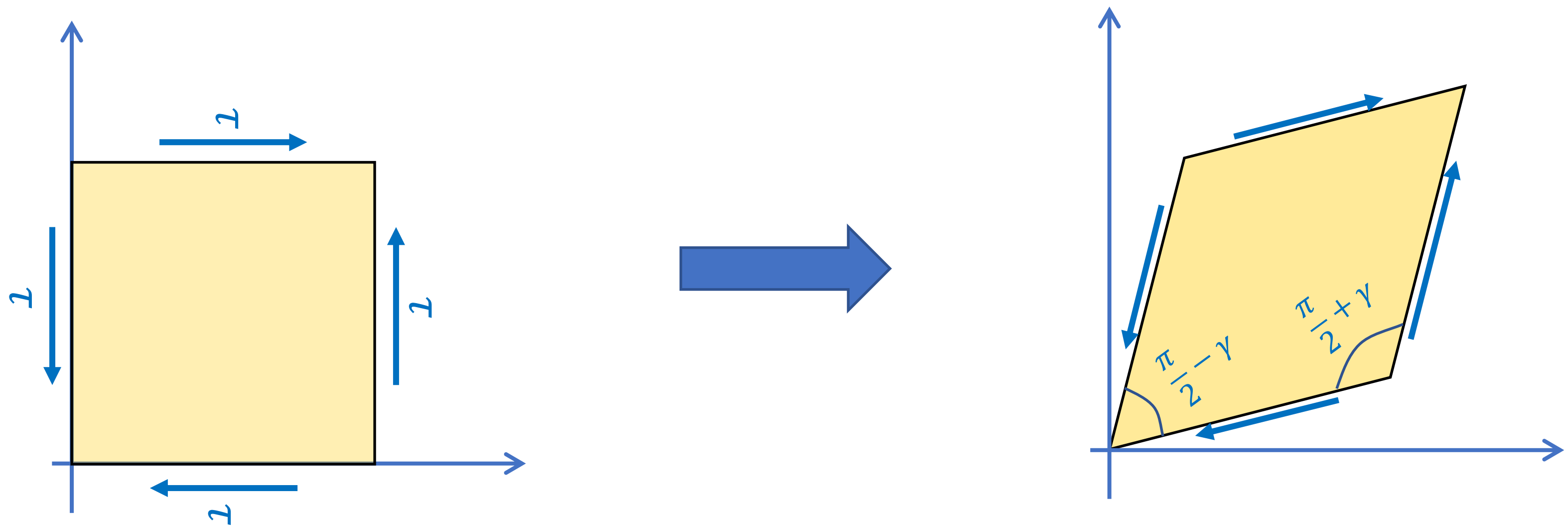
Corte puro

Como se deforma un cubo elemental sometido a tensiones tangenciales τ ?



7. TENSIÓN TANGENCIAL, DEFORMACIÓN ANGULAR Y LEY DE HOOKE.

Como se expresa la Ley de Hooke para tensiones tangenciales y deformación angular o distorsión.



$$\tau = G \cdot \gamma$$

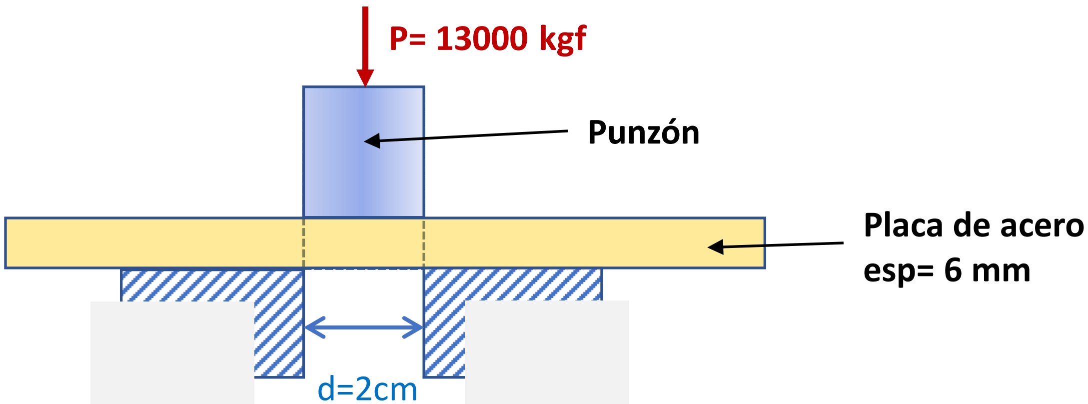
G se denomina "Módulo de Elasticidad transversal". Sus unidades son de tensión.

γ recibe del nombre de deformación angular o distorsión y se mide en radianes.

7. TENSIÓN TANGENCIAL, DEFORMACIÓN ANGULAR Y LEY DE HOOKE.

Ejemplo 1:

Un punzón con un diámetro de 2 cm se usa para troquelar un agujero en una placa de acero de 6 mm de espesor. Para ello, se requiere una fuerza P= 13000 kgf. ¿ Cuál es el esfuerzo cortante medio en la placa y cual es el esfuerzo de compresión medio en el punzón ?



Area que corta el punzón:

$$As = \pi \cdot d \cdot esp = \pi \cdot 2cm \cdot 0.6\ cm = 3.768\ cm^2$$

Tensión media de corte en la placa:

$$\tau_{med} = \frac{P}{As} = \frac{13000\ kgf}{3.768\ cm^2} = 3450\ kgf/cm^2$$

Sección del punzón:

$$Ap = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 2^{\ 2}}{4} = 3.14\ cm^2$$

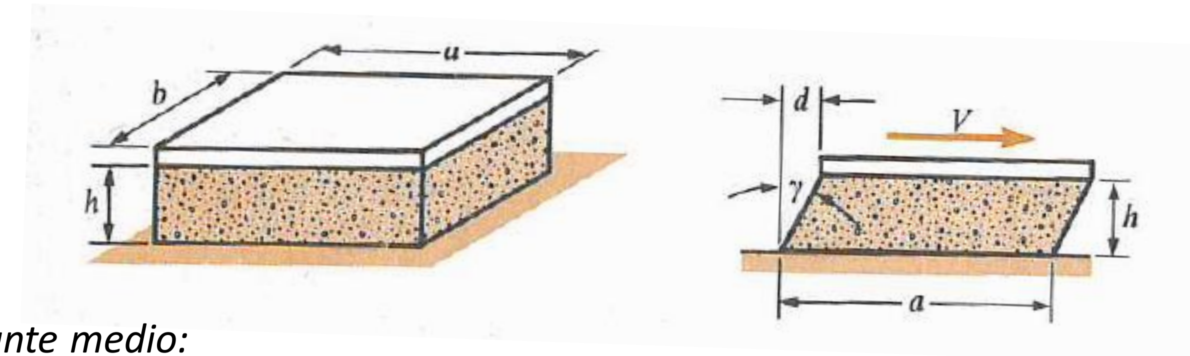
Tensión media de compresión en el punzón:

$$\sigma_{med} = \frac{P}{Ap} = \frac{13000\ kgf}{3.14\ cm^2} = 4140\ kg/cm2$$

7. TENSIÓN TANGENCIAL, DEFORMACIÓN ANGULAR Y LEY DE HOOKE.

Ejemplo 2:

Una almohadilla de apoyo consiste en un material flexible de espesor **h** cubierto por una delgada placa de acero de dimensiones **a x b** y está sometida a una fuerza cortante horizontal **V**. Determinar el esfuerzo cortante medio y la deformación respectiva en la almohadilla, y el desplazamiento horizontal d de la placa.



El esfuerzo cortante medio:

$$\tau_{\text{med}} = \frac{V}{a \cdot b}$$

La deformación angular (distorsión):

Linealidad cinemática !! γ es muy pequeño.

$$\gamma_{med} = \frac{\tau_{med}}{G} = \frac{V}{a \cdot b \cdot G}$$

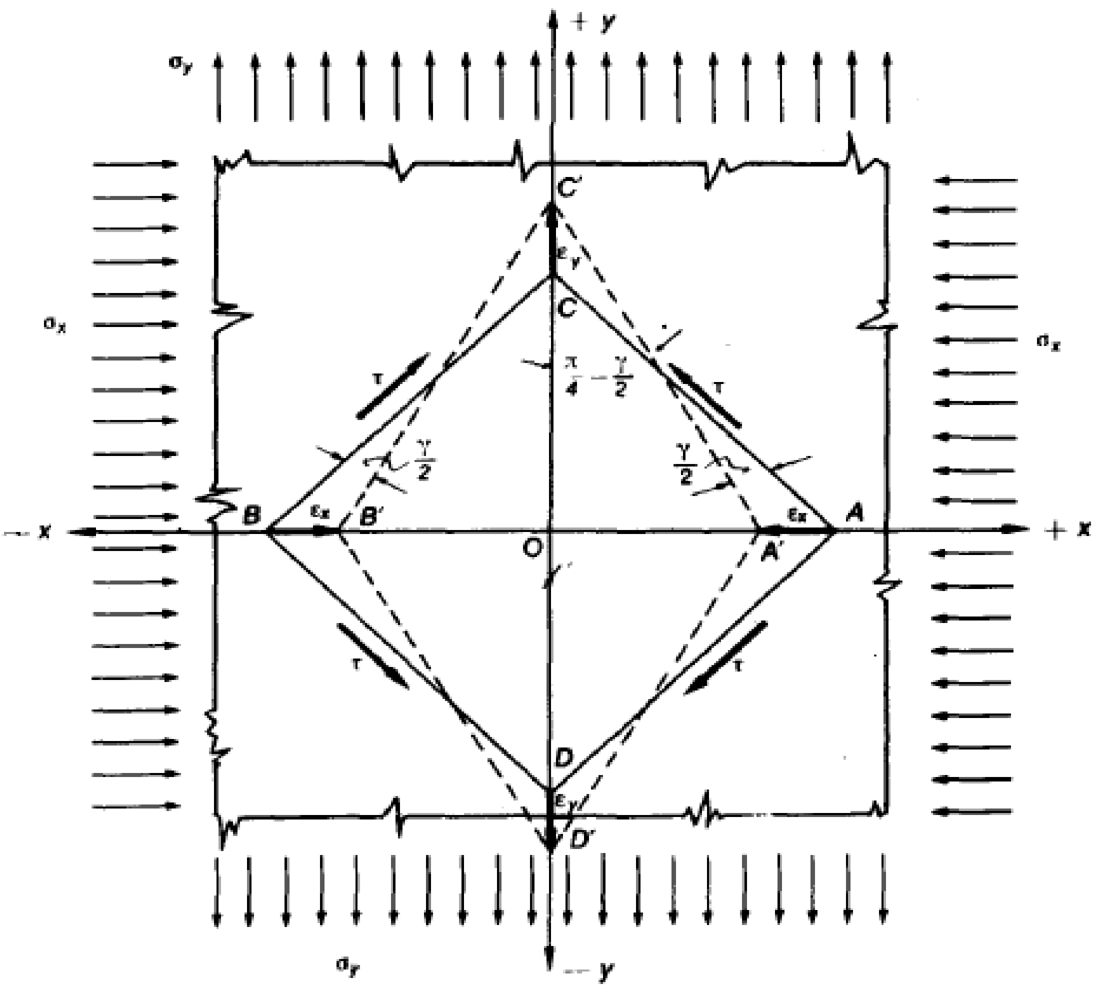
El desplazamiento $d = h \cdot \tan\gamma \cong h \cdot \gamma$

$$\boldsymbol{d} = h \cdot \gamma = \frac{\boldsymbol{h \cdot V}}{\boldsymbol{a \cdot b \cdot G}}$$

Teórica 3 Diap 5
Apoyo de neopreno bajo viga metálica de un puente.

8. RELACIÓN ENTRE LAS CONSTANTES E, G y ν (μ)

Supongamos $\sigma_x < 0$ y $\sigma_y > 0$.



Ver Fliess. Estabilidad II – Art. 6.5

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$$

E: Módulo de elasticidad longitudinal

G: Módulo de elasticidad transversal

μ (ν) : Relación de Poisson.

FIN