

Departamento de Estabilidad

64.04 | 64.05 | 84.05

Estática y Resistencia de Materiales

Teórica

Ing. Alfredo Corral

CLASE 8

**PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS MATERIALES
SOLICITACIÓN AXIL**



1. PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS MATERIALES → El diagrama Tensión – Deformación.

1.1 Ensayo de Tracción.

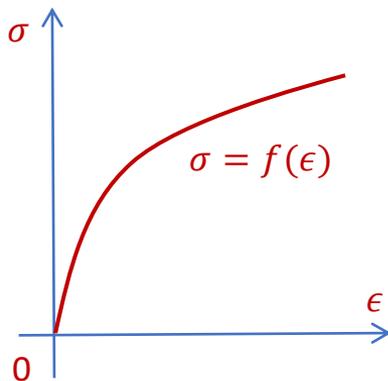
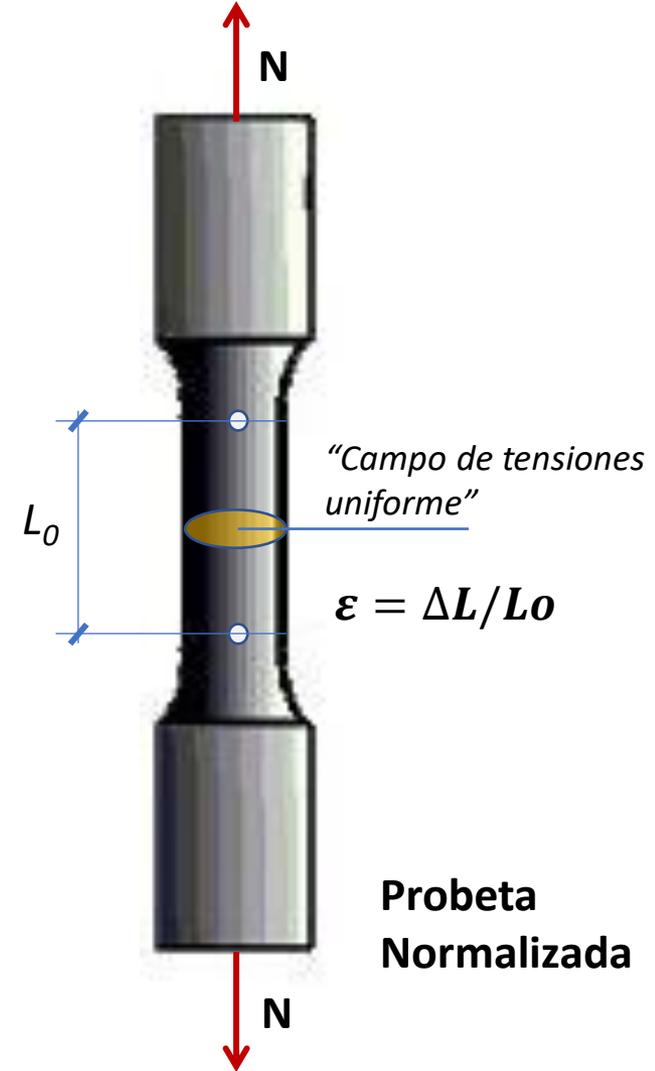
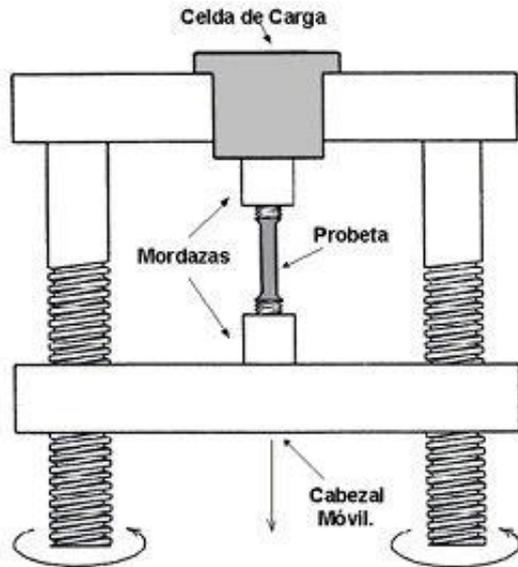
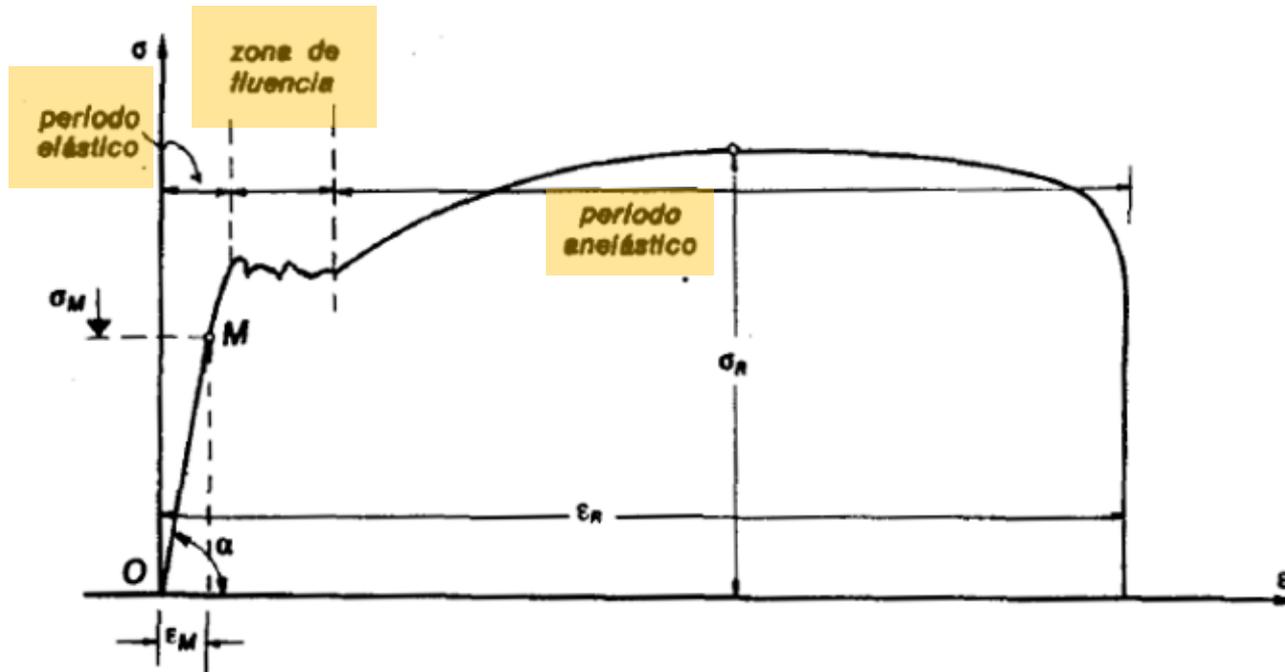


Diagrama “Tensión Deformación”

1. PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS MATERIALES → El diagrama Tensión – Deformación.

1.2 El Diagrama “Tensión-Deformación” para un material “dúctil”



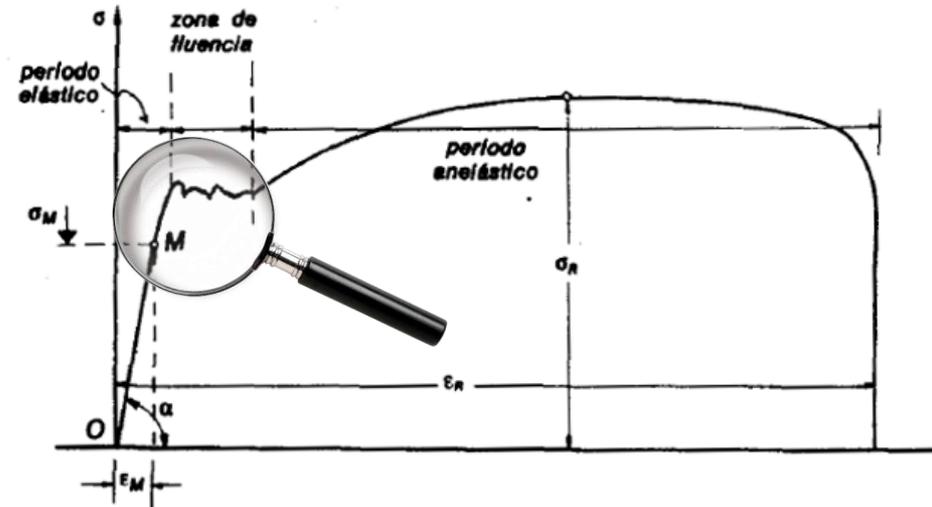
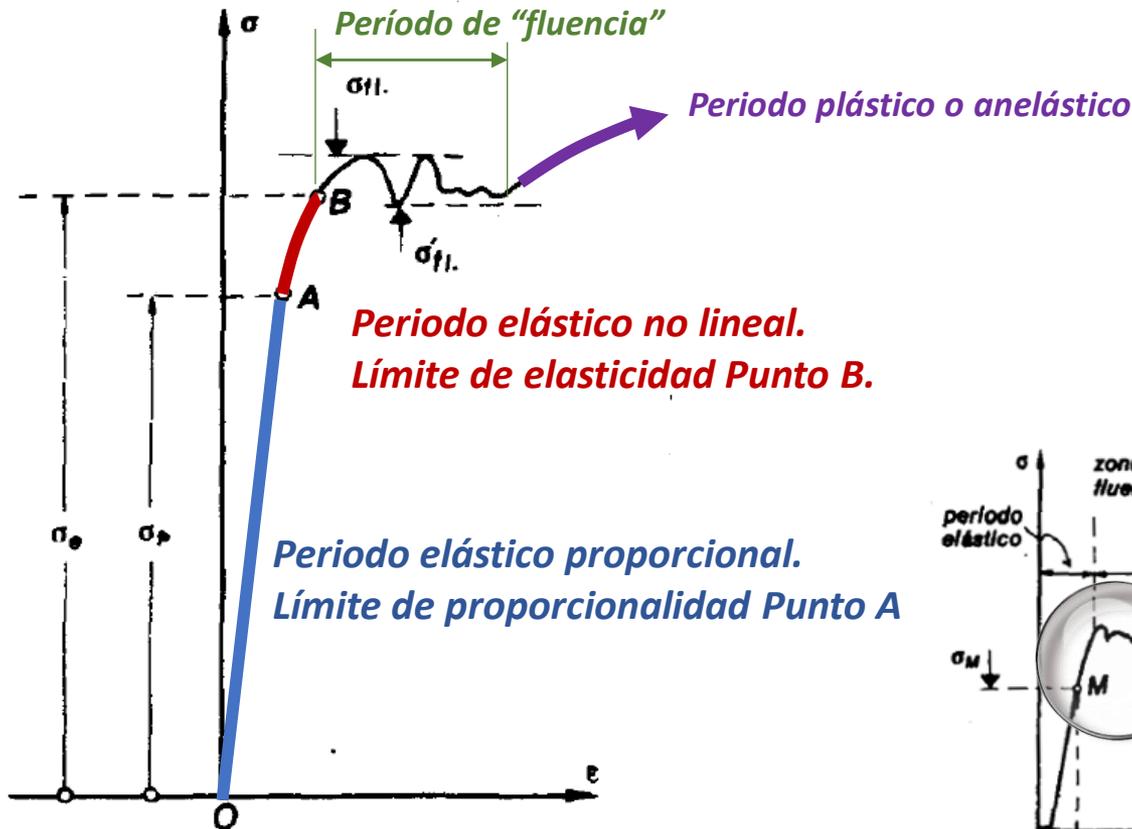
σ_M : Tensión límite de proporcionalidad (Hooke)

ϵ_M : Def lineal específica del límite de proporcionalidad (Hooke)

$\tan \alpha = E$: Módulo de Elasticidad.

1. PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS MATERIALES → El diagrama Tensión – Deformación.

1.2 El Diagrama “Tensión-Deformación” para un material “dúctil”

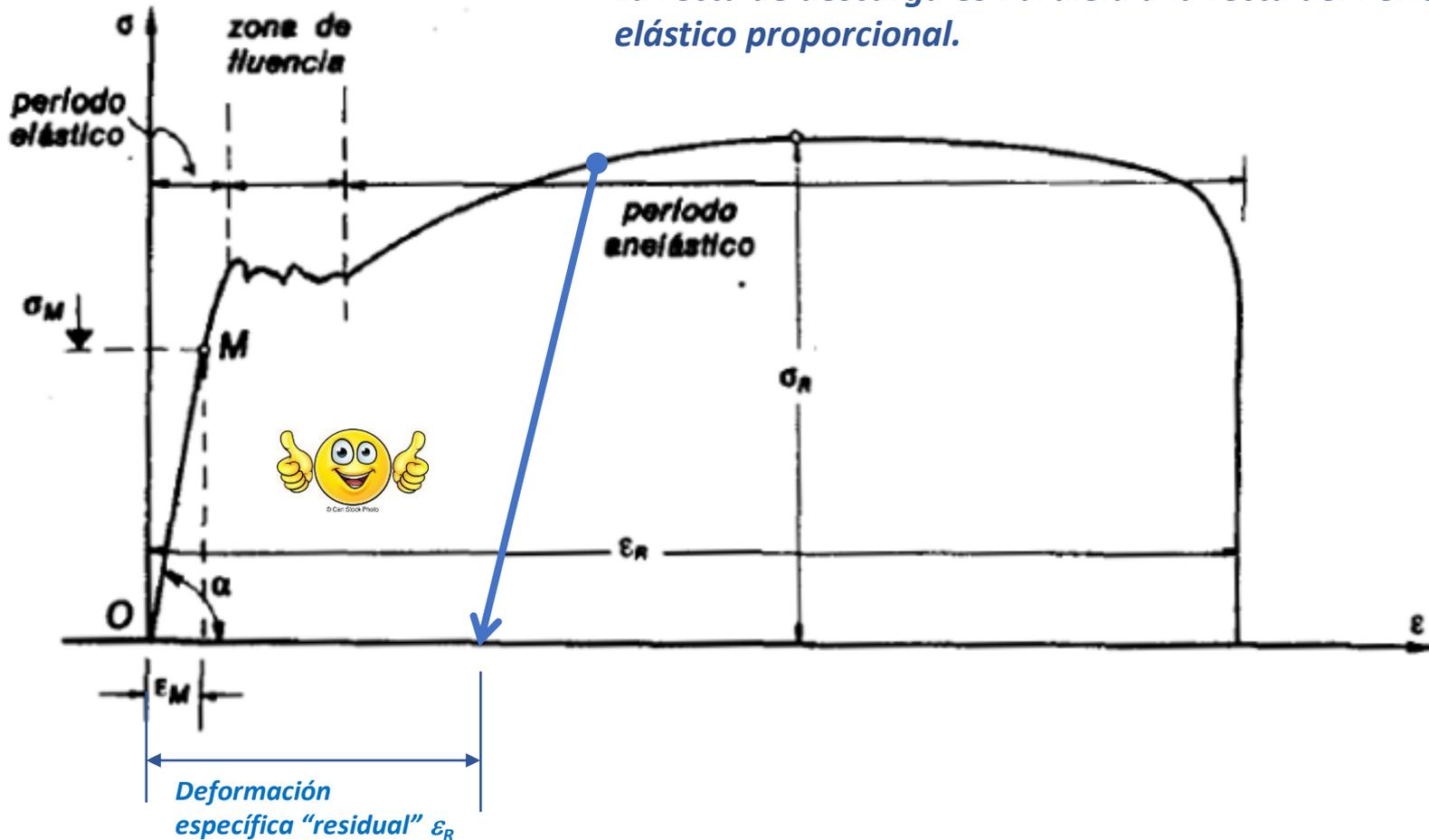


1. PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS MATERIALES → El diagrama Tensión – Deformación.

1.2 El Diagrama “Tensión-Deformación” para un material “dúctil”

Que sucede si descargamos la probeta en un punto del período anelástico.

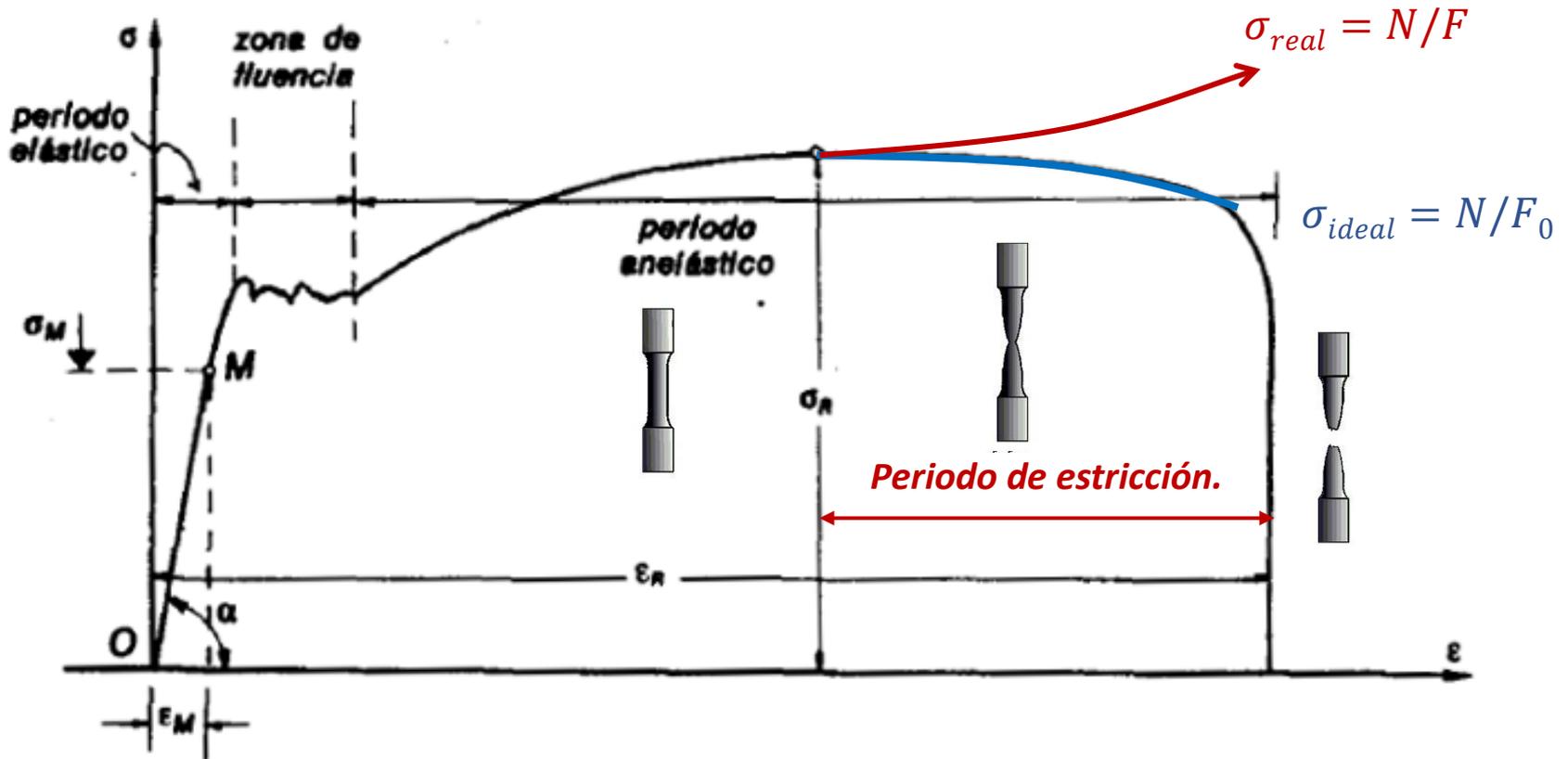
La recta de descarga es Paralela a la recta del Período elástico proporcional.



1. PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS MATERIALES → El diagrama Tensión – Deformación.

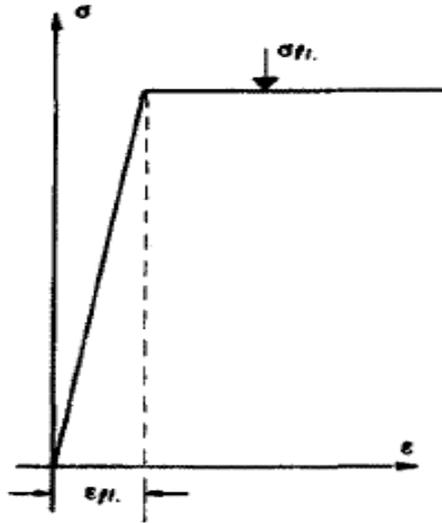
1.2 El Diagrama “Tensión-Deformación” para un material “dúctil”

Que sucede más allá del momento en que se alcanza σ_R (tensión de Rotura)



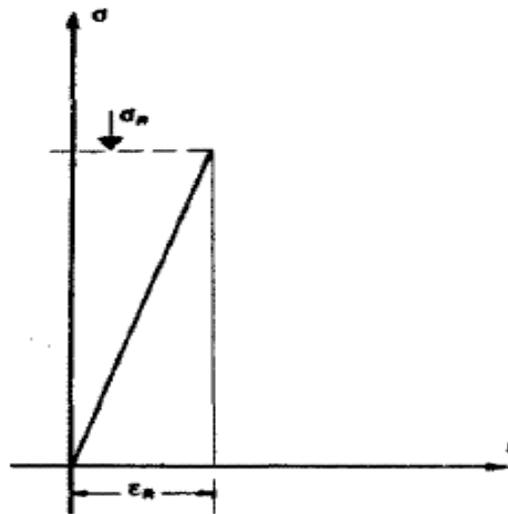
1. PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS MATERIALES → El diagrama Tensión – Deformación.

1.3 Diagramas ideales “Tensión-Deformación”.



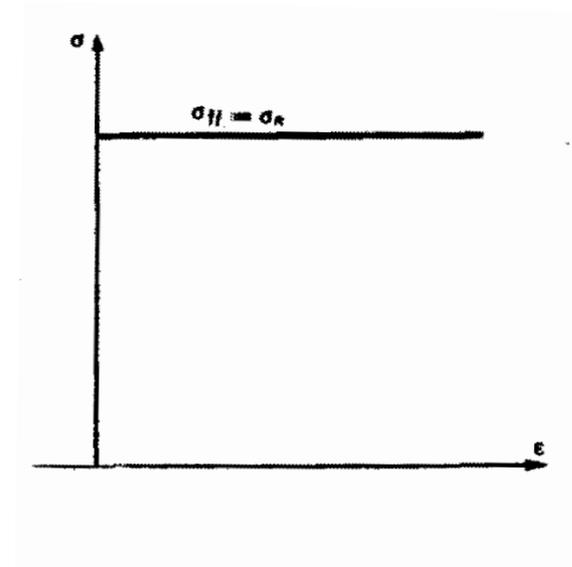
Material “dúctil”

Aceros con bajo contenido de carbono



Material “frágil”

ϵ_R es muy pequeña.



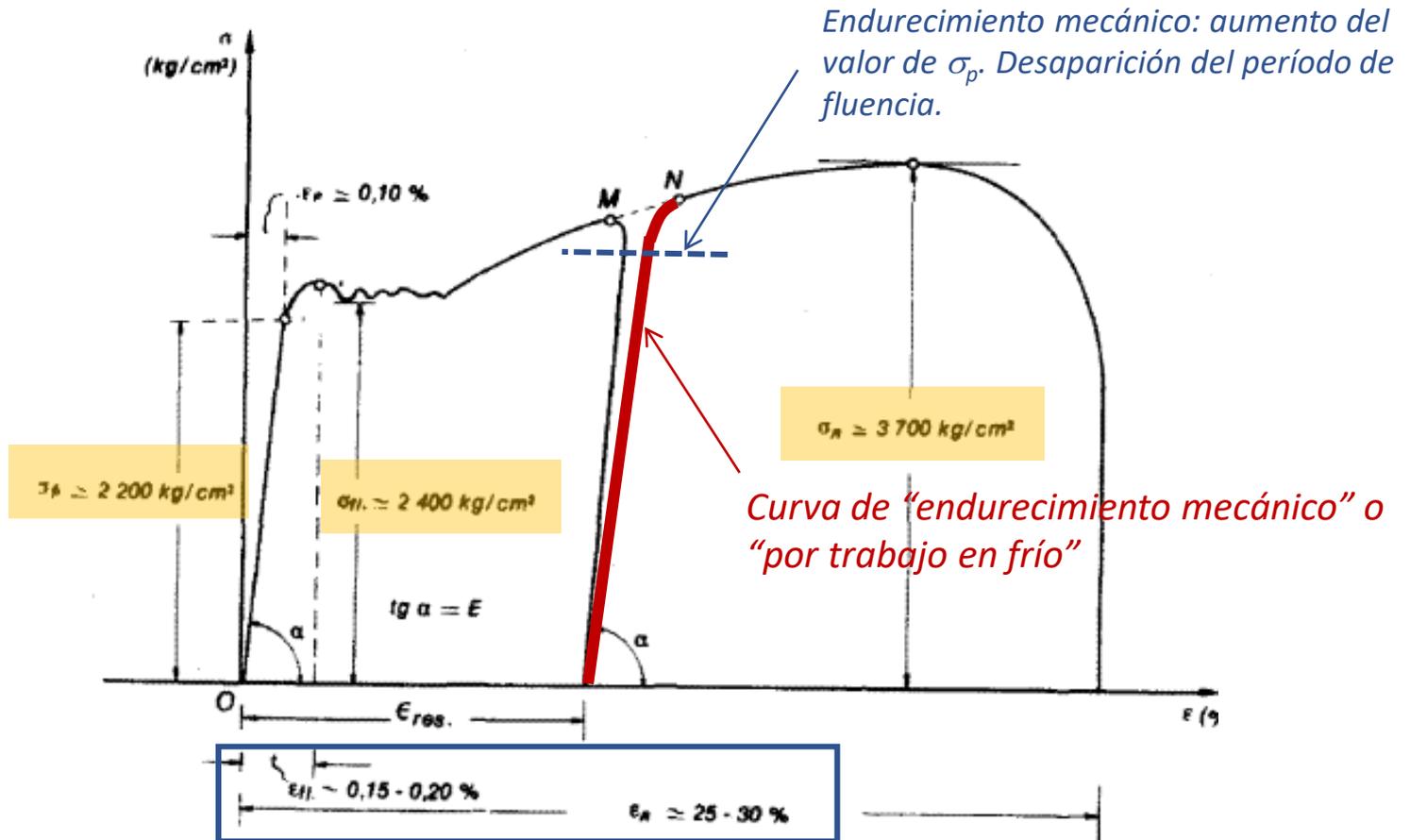
Material “plástico ideal”

Plomo, arcilla, lacre,
“plastilina”

1. PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS MATERIALES → El diagrama Tensión – Deformación.

1.4 El Diagrama “Tensión-Deformación” para el acero

Analicemos un acero común de construcción “dúctil” St 37, también conocido como F-24



1.5 Características Mecánicas de los Materiales.

Que tensiones son determinantes en los materiales ?

En los materiales frágiles → La tensión de rotura

En los materiales dúctiles → La tensión de fluencia

a) RIGIDEZ:

*Propiedad que en mayor o menor grado poseen los materiales, de oponerse a su deformación.
Su medida viene dada por el módulo de elasticidad E .*

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \text{Hooke}$$

$$\varepsilon = \sigma/E \quad \text{Cuanto mayor sea } E, \text{ menos deformable resulta el material.}$$

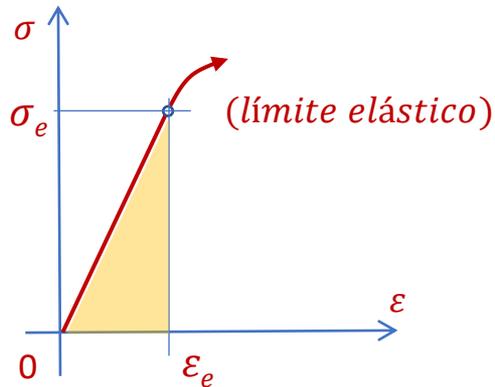
b) DUCTILIDAD:

*Medida de la deformabilidad del material en el periodo anelástico o plástico.
Cuanto mayor es la capacidad de deformación que posee un material antes de alcanzar la rotura, tanto mayor es su ductilidad.*

1.5 Características Mecánicas de los Materiales.

c) RESILIENCIA:

Capacidad de un determinado material para restituir la energía almacenada durante su deformación dentro de los límites del período elástico.



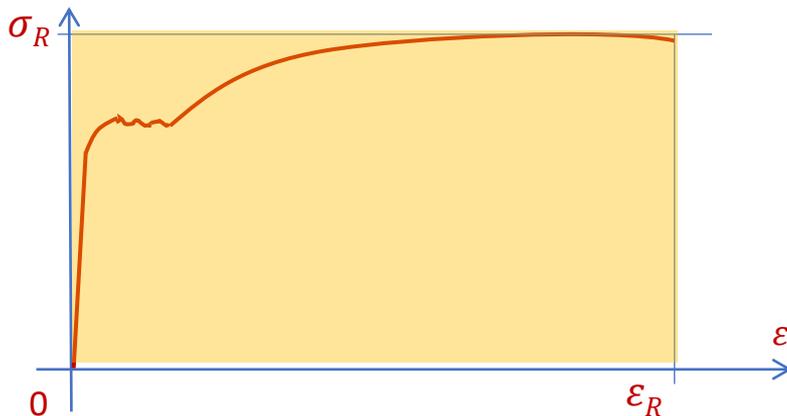
El área encerrada en el diagrama σ - ε en el período elástico, representa la energía almacenada en el mismo y que se libera desaparecida la causa deformante.

$$u = 1/2 \cdot \sigma_e \cdot \varepsilon_e \quad \varepsilon_e = \sigma_e/E$$

$$u = \sigma_e^2 / 2E$$

d) TENACIDAD:

Capacidad de un material para absorber energía en el período anelástico (plástico, o de las grandes deformaciones) hasta alcanzar la rotura.



Un valor aproximado de esta energía puede calcularse como:

$$u_R = \sigma_R \cdot \varepsilon_R$$

1.6 Dimensionamiento de secciones y estructuras. Coeficiente de seguridad.

Dimensionar significa dar dimensiones a una estructura de modo que cumpla ciertas condiciones de:

Resistencia: No supere valores determinados de tensiones, ya sean estas normales o tangenciales.

Capacidad de uso: Las deformaciones de las estructuras sean compatibles con el fin para el que han sido diseñadas.

Economía: No exista un “sobredimensionamiento” que implique un gasto mayor que el necesario en su construcción.

Con respecto al dimensionamiento atendiendo factores de resistencia, tendremos dos casos:

Dimensionado en régimen elástico (coeficiente de seguridad central)

Dimensionado a rotura (mayoración de cargas, minoración de resistencias)

1.6 Dimensionamiento de secciones y estructuras. Coeficiente de seguridad.

Incertidumbres a la hora de dimensionar:

Cargas: Se conocen las cargas por separado (peso propio, sobrecargas, viento, etc) pero su simultaneidad constituye una variable aleatoria.

Resistencia del elemento estructural: Intervienen factores como:

- Homogeneidad del material

- Tipo de rotura (dúctil, frágil).

- Imperfecciones constructivas.

- Inexactitudes en cálculos de diseño.

- Grado de compromiso estructural del elemento.

1.6 Dimensionamiento de secciones y estructuras. Coeficiente de seguridad.

Dimensionado por Tensión Admisibles

$$\sigma_{\text{trabajo}} < \sigma_{\text{admisible}}$$

$$\sigma_{\text{adm}} = \sigma_{\text{fluencia}} / \gamma \quad \text{Materiales dúctiles}$$

$$\sigma_{\text{adm}} = \sigma_{\text{rotura}} / \gamma \quad \text{Materiales frágiles}$$

γ es un coeficiente de seguridad que en general depende si las cargas son de carácter permanente o transitorias.

Dimensionado por Mayoración de cargas y minoración de resistencias.

$$\text{Resistencia Requerida} \leq \text{Resistencia de diseño}$$

$$\sum \gamma \cdot Q_i \leq \Phi \cdot R_n$$

Q_i : Solicitación en el elemento a dimensionar debido a los distintos estados de carga (peso propio, sobrecargas, etc).

γ : Coeficiente de mayoración de cargas.

R_n : Resistencia de la sección en función de la tensión de fluencia o rotura según el tipo de material.

Φ : Coeficiente de minoración de la resistencia de acuerdo al tipo de sollicitación (axil, flexión, corte, etc).

1.6 Dimensionamiento de secciones y estructuras. Coeficiente de seguridad.

Dimensionado por Tensión Admisibles – EJEMPLO: Dimensionado de un tensor de Acero Redondo macizo

Datos:

$N_g = 20 \text{ kN}$ (carga muerta, D)

$N_p = 5 \text{ kN}$ (carga viva, L)

$\sigma_{fl} = 24 \text{ kN/cm}^2$ (Acero F-24)

$\gamma = 1.4$ (cargas principales y secundarias)

Objetivo:

Dimensionar: encontrar el diámetro de la sección sometida a solicitación axil.

$$\sigma_{\text{trabajo}} < \sigma_{\text{admisible}}$$

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{fl}}{\gamma} = \frac{24 \text{ kN/cm}^2}{1.4}$$

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{fl}}{\gamma} = 17.14 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{\text{trabajo}} = \frac{N_g + N_p}{F} \leq \sigma_{adm} = 17.14 \text{ kN/cm}^2$$

$$F_{nec} \geq \frac{N_g + N_p}{\sigma_{adm}} = \frac{20 \text{ kN} + 5 \text{ kN}}{17.14 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}} = 1.46 \text{ cm}^2$$

$$\frac{\pi \cdot D_{nec}^2}{4} \geq 1.46 \text{ cm}^2$$

$$D_{nec} \geq \sqrt{\frac{1.46 \text{ cm}^2 \cdot 4}{\pi}} = 1.36 \text{ cm}$$

Adoptamos según tabla $D = 16 \text{ mm}$

$F = 2 \text{ cm}^2$

1.6 Dimensionamiento de secciones y estructuras. Coeficiente de seguridad.

Dimensionado a rotura: “Mayoración de cargas y minoración de resistencias” – MISMO

EJEMPLO: Dimensionado de un tensor de Acero Redondo macizo

Datos:

$$N_g = 20 \text{ kN (carga muerta, D)}$$

$$N_p = 5 \text{ kN (carga viva, L)}$$

$$\sigma_{fl} = 24 \text{ kN/cm}^2 \text{ (Acero F-24)}$$

Resistencia requerida: Cálculo de $N_{\text{último}}$:

$$Nu_1 = 1.4 \cdot D = 1.4 \cdot 20 \text{ kN} = 28 \text{ kN}$$

$$Nu_2 = 1.2 \cdot D + 1.6 \cdot L$$

$$Nu_2 = 1.2 \cdot 20 \text{ kN} + 1.6 \cdot 5 \text{ kN} = 32 \text{ kN}$$



Objetivo:

Dimensionar: encontrar el diámetro de la sección sometida a solicitación axil.

Resistencia de diseño:

$$Nd = \phi \cdot F \cdot \sigma_{fl}$$

$$Nd = 0.9 \cdot F \cdot \sigma_{fl}$$

$$Nu_2 \leq Nd$$

$$32 \text{ kN} \leq 0.9 \cdot F_{nec} \cdot 24 \text{ kN/cm}^2$$

$$F_{nec} \geq \frac{32 \text{ kN}}{0.9 \cdot 24 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}} = 1.48 \text{ cm}^2$$

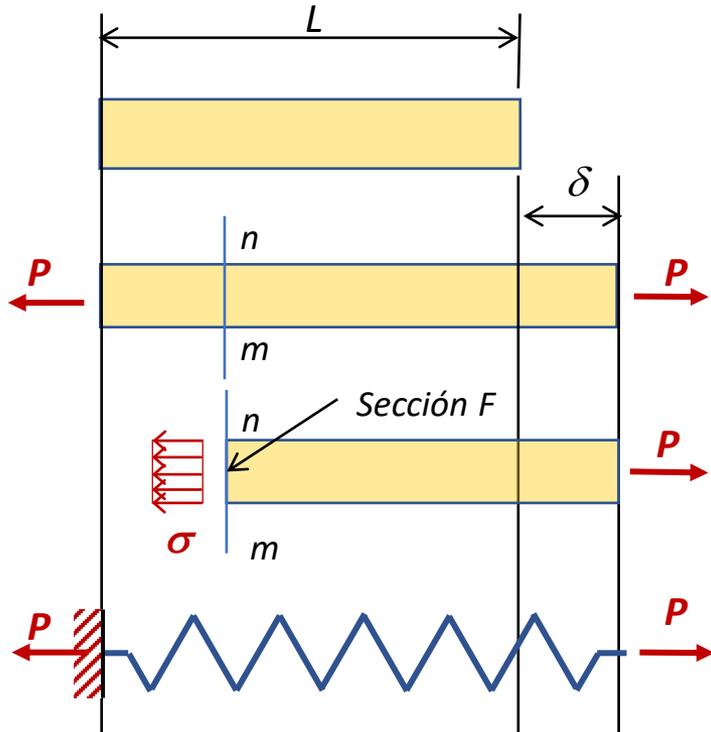
$$\frac{\pi \cdot D_{nec}^2}{4} \geq 1.48 \text{ cm}^2$$

$$D_{nec} \geq \sqrt{\frac{1.48 \text{ cm}^2 \cdot 4}{\pi}} = 1.37 \text{ cm}$$

Adoptamos según tabla $D = 16 \text{ mm}$, $F = 2 \text{ cm}^2$

2 SOLICITACIÓN AXIL

2.1 Fórmula general – Conceptos de rigidez y flexibilidad.



$$\text{Hooke} \rightarrow \sigma = E \cdot \varepsilon$$

$$P/F = E \cdot \delta/L$$

$$\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot F} \quad (1)$$

Fórmula que expresa el alargamiento de una barra en sollicitación axil, en función del esfuerzo axil, la longitud inicial, el Módulo de elasticidad longitudinal del material, y la sección de la barra.

Rigidez k: Fuerza requerida para producir un alargamiento $\delta = 1$ en la barra. En (1) para este caso:

$$P = k, \delta = 1 \rightarrow$$

$$k = \frac{E \cdot F}{L}$$



$$P' = k \cdot \delta \quad \text{Resorte!} \\ \text{Física I}$$

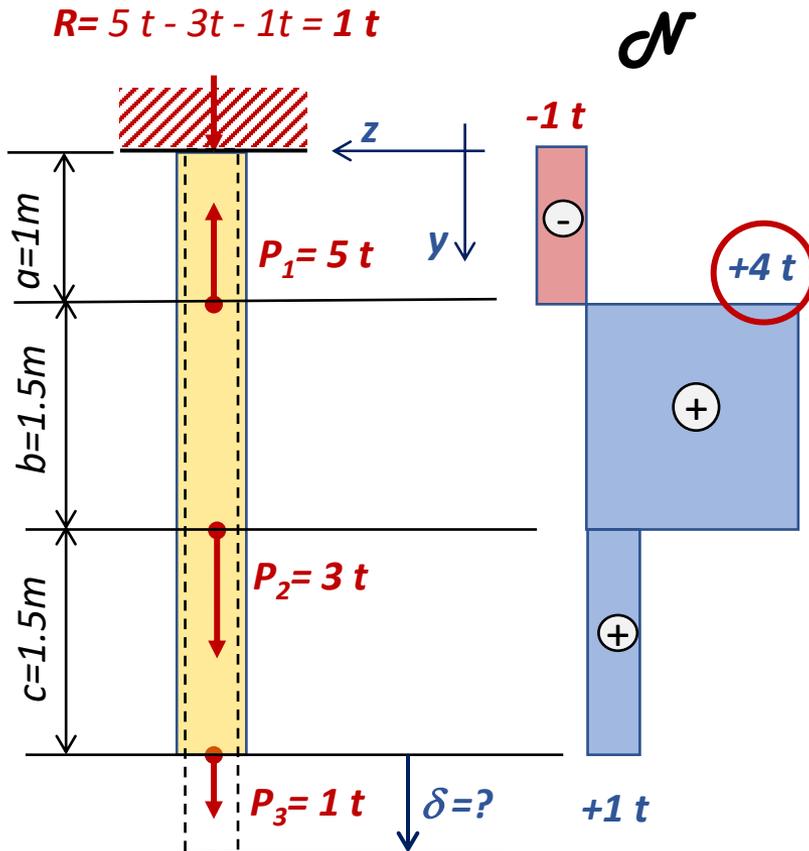
Flexibilidad f: Alargamiento que produce una fuerza unitaria en una barra de longitud L.

En (1) para este caso:

$$P = 1, \delta = f \rightarrow f = \frac{1 \cdot L}{E \cdot F}$$

$$f = \frac{L}{E \cdot F}$$

2.2 SOLICITACIÓN AXIL → Barra empotrada cargada axialmente con cargas intermedias.



Objetivos:

1. Dimensionar la barra con un redondo de acero.
 $\sigma_{adm} = 1600 \text{ kgf/cm}^2$.
2. Calcular el alargamiento total de la barra.

$$F_{nec} \geq \frac{N}{\sigma_{adm}} = \frac{4000 \text{ kgf}}{1600 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}} = 2.5 \text{ cm}^2$$

$$F_{nec} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \geq 2.5 \text{ cm}^2$$

$$D_{nec} \geq \sqrt{\frac{2.5 \text{ cm}^2 \cdot 4}{\pi}} = 1.78 \text{ cm}$$

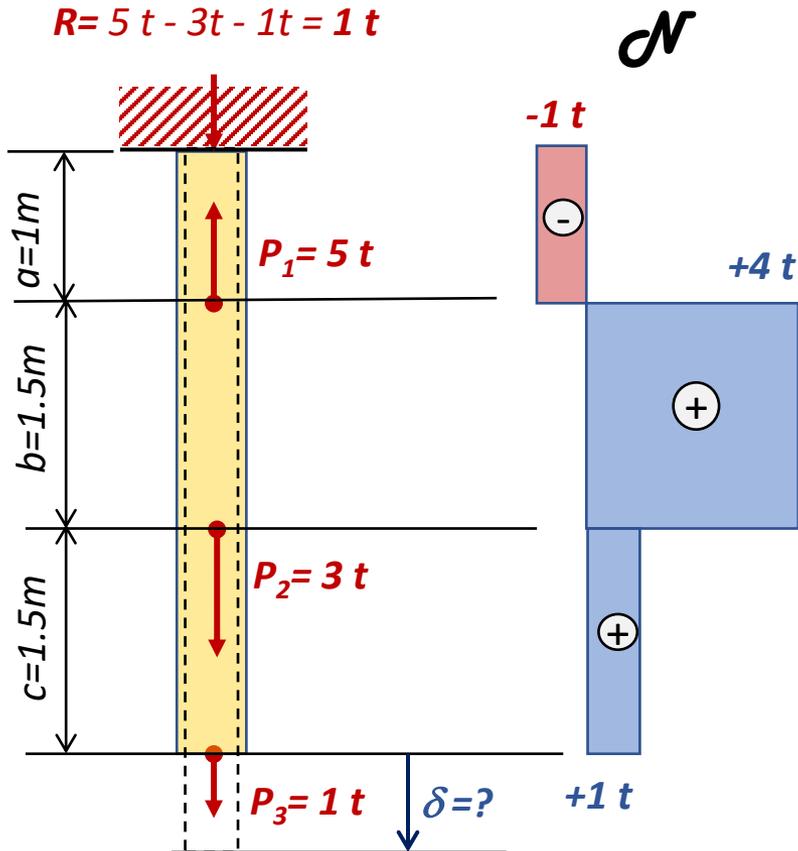
Adoptamos según tabla $D = 18 \text{ mm}$, $F = 2.54 \text{ cm}^2$

La fórmula que controla los desplazamientos en sollicitación axial para cargas discretas es:

$$\delta_T = \sum_1^n \frac{N_i \cdot L_i}{E_i \cdot F_i}$$

La analizamos con detalle en la próxima diapositiva.

2.2 SOLICITACIÓN AXIL → Barra empotrada cargada axialmente con cargas intermedias.



Longitud del tramo "i"
Esfuerzo normal
(constante en el tramo "i")

$$\delta_T = \sum_1^n \frac{N_i \cdot L_i}{E_i \cdot F_i}$$

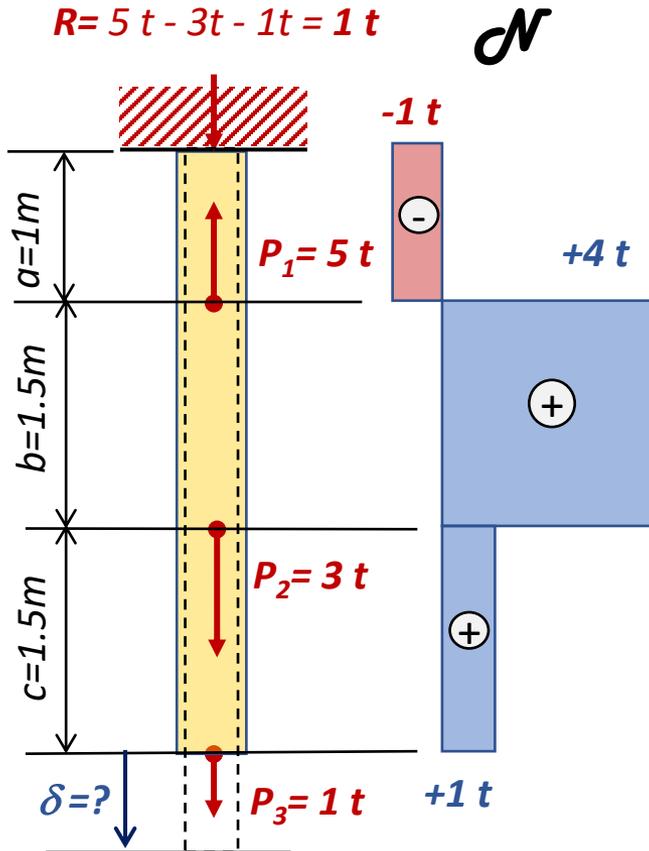
Módulo de elasticidad
E, corresponde al
material del tramo "i"

Sección de la barra en
el tramo "i"



No es más que la fórmula general deducida a través de la Ley de Hooke, para cada tramo de barra !

2.2 SOLICITACIÓN AXIL → Barra empotrada cargada axialmente con cargas intermedias.



En el caso de nuestro ejemplo:

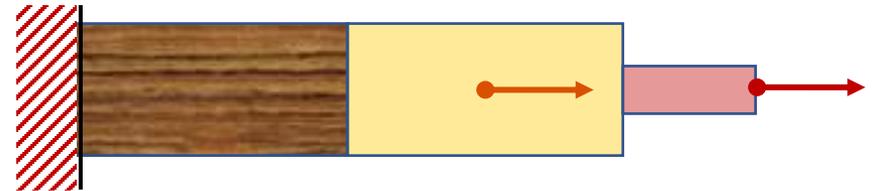
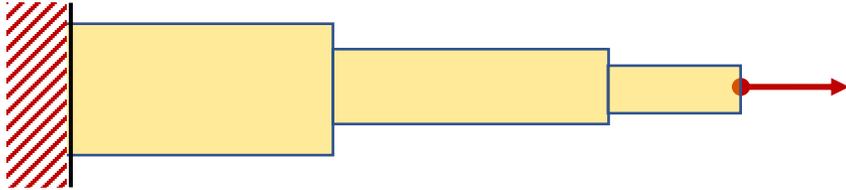
$$\delta_T = \sum_1^n \frac{N_i \cdot L_i}{E_i \cdot F_i}$$

$$\delta_T = \frac{1}{2100000 \frac{kgf}{cm^2} \cdot 2.54cm^2} \cdot (1000 kgf \cdot 150cm + 4000 kgf \cdot 150 cm - 1000 kgf \cdot 100cm) = 0.12 cm$$

$$\delta_T = 1,2 mm$$

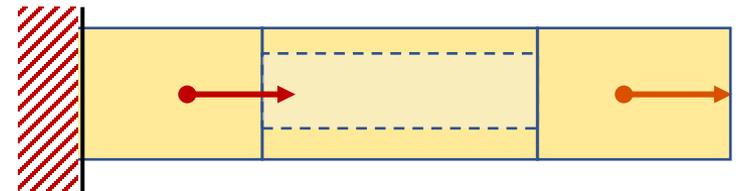
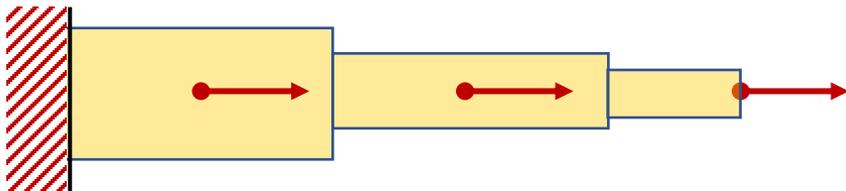
2.2 SOLICITACIÓN AXIL → Barra empotrada cargada axialmente con cargas intermedias.

Ejercitación: Cuantos tramos consideraría para la ecuación de δ_T , en estos casos ?



*Tres materiales distintos, de distinto
Módulo de elasticidad longitudinal E.*

$$\delta_T = \sum_1^n \frac{N_i \cdot L_i}{E_i \cdot F_i}$$



*Tramos de sección circular hueca o
maciza.*

2.3 SOLICITACIÓN AXIL → Barra empotrada cargada axialmente con función carga y sección continuas.

$P(x)$ es una función carga axial por unidad de longitud (kN/m, etc)

La fórmula del alargamiento para solicitación axial:

$$\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot F}$$

Adopta para el diferencial de alargamiento la siguiente forma:

$$d\delta = \frac{P(x) \cdot dx}{E \cdot F(x)}$$

La elongación total se calcula integrando $d\delta$, en toda la longitud L .

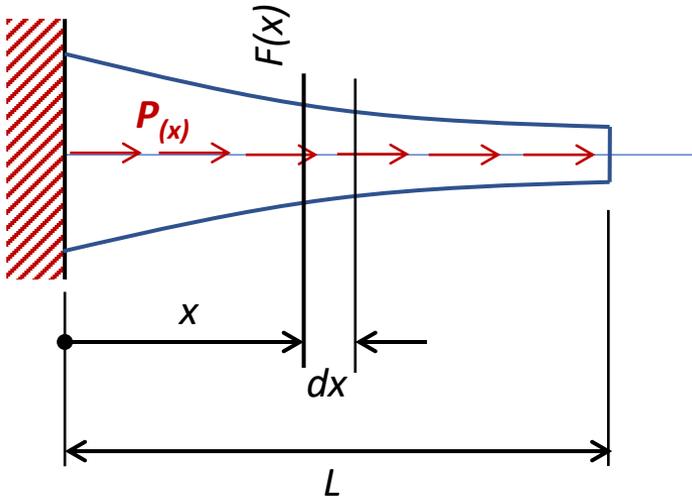
$$\delta = \int_0^L d\delta = \int_0^L \frac{P(x) \cdot dx}{E \cdot F(x)}$$

Para cargas axiales discretas

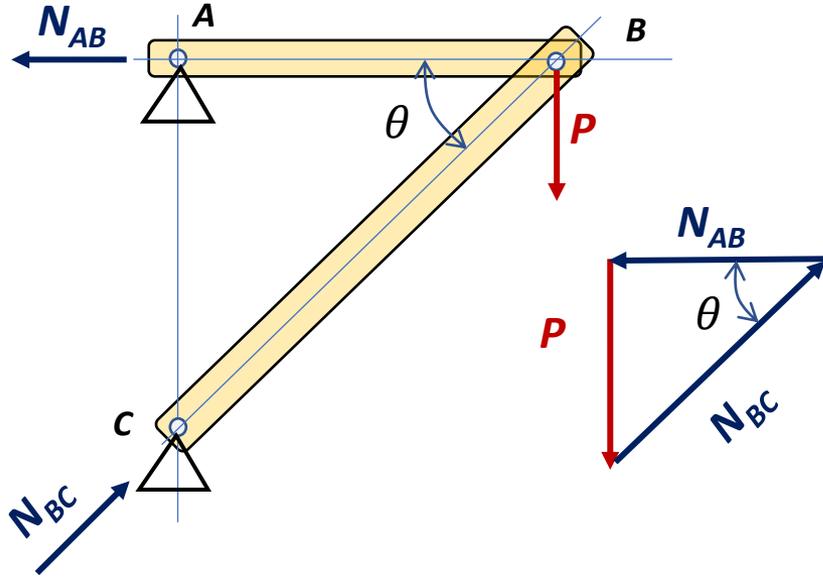
$$\delta_T = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \cdot L_i}{E_i \cdot F_i}$$

Para cargas axiales continuas y sección variable

$$\delta = \int_0^L \frac{P(x) \cdot dx}{E \cdot F(x)}$$



2.4 SOLICITACIÓN AXIL → Diagramas de Desplazamiento. "Williot"



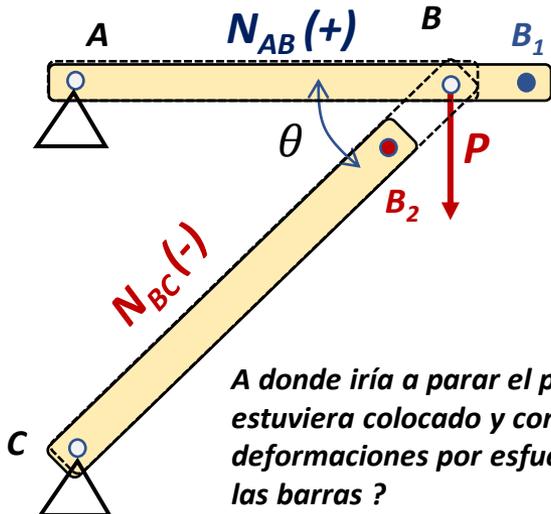
Objetivo: Determinar el corrimiento total del punto B

$$\text{ctg } \theta = \frac{N_{AB}}{P}$$

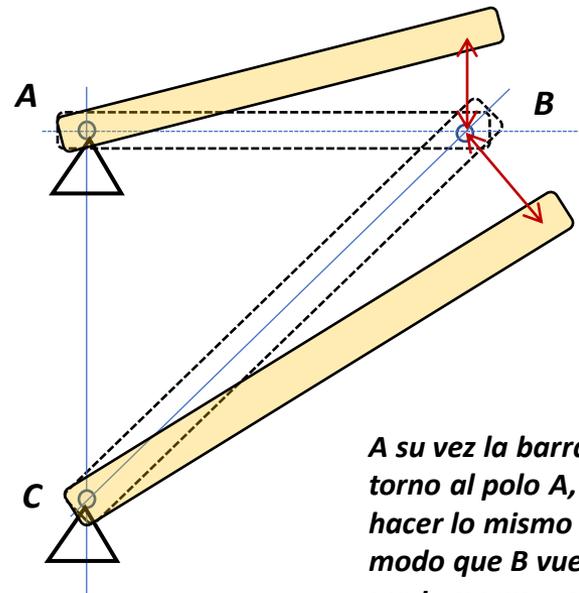
$$\text{cosec } \theta = \frac{N_{BC}}{P}$$

$$N_{AB} = P \cdot \text{ctg } \theta$$

$$N_{BC} = P \cdot \text{cosec } \theta$$

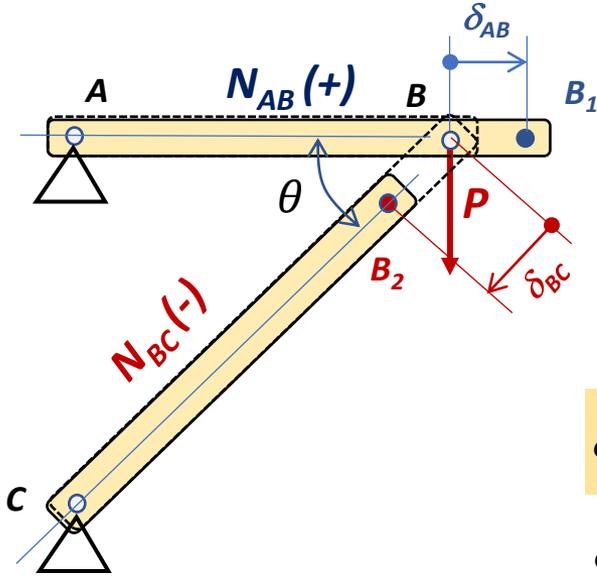


A donde iría a parar el punto B, si el perno no estuviera colocado y consideráramos las deformaciones por esfuerzo axil N_{bc} y N_{ab} de las barras ?



A su vez la barra AB puede "girar" en torno al polo A, y la barra CB puede hacer lo mismo en torno al polo C de modo que B vuelva a ser un único punto ya que en B un perno une las barras. LINEALIDAD CINEMÁTICA !!

2.4 SOLICITACIÓN AXIL → Diagramas de Desplazamiento. "Williot"



$$N_{AB} = P \cdot \operatorname{ctg} \theta \quad N_{BC} = P \cdot \operatorname{cosec} \theta$$

$$\delta_{AB} = \frac{N_{AB} \cdot L_{AB}}{E_{AB} \cdot F_{AB}} = \frac{P \cdot \operatorname{ctg} \theta \cdot L_{AB}}{E_{AB} \cdot F_{AB}}$$

$$\delta_{BC} = \frac{N_{BC} \cdot L_{BC}}{E_{BC} \cdot F_{BC}} = \frac{P \cdot \operatorname{cosec} \theta \cdot L_{BC}}{E_{BC} \cdot F_{BC}}$$

$$\delta_H = \delta_{AB} = \frac{P \cdot \operatorname{ctg} \theta \cdot L_{AB}}{E_{AB} \cdot F_{AB}}$$

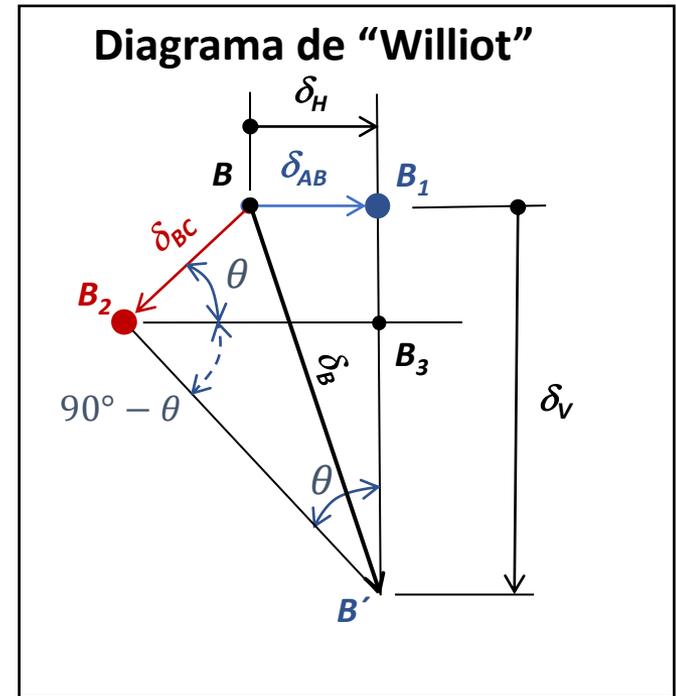
$$\delta_V = \overline{B_1 B_3} + \overline{B_3 B'}$$

$$\overline{B_1 B_3} = \delta_{BC} \cdot \operatorname{sen} \theta \quad \overline{B_3 B'} = (\delta_{BC} \cdot \operatorname{cos} \theta + \delta_{AB}) \cdot \operatorname{ctg} \theta$$

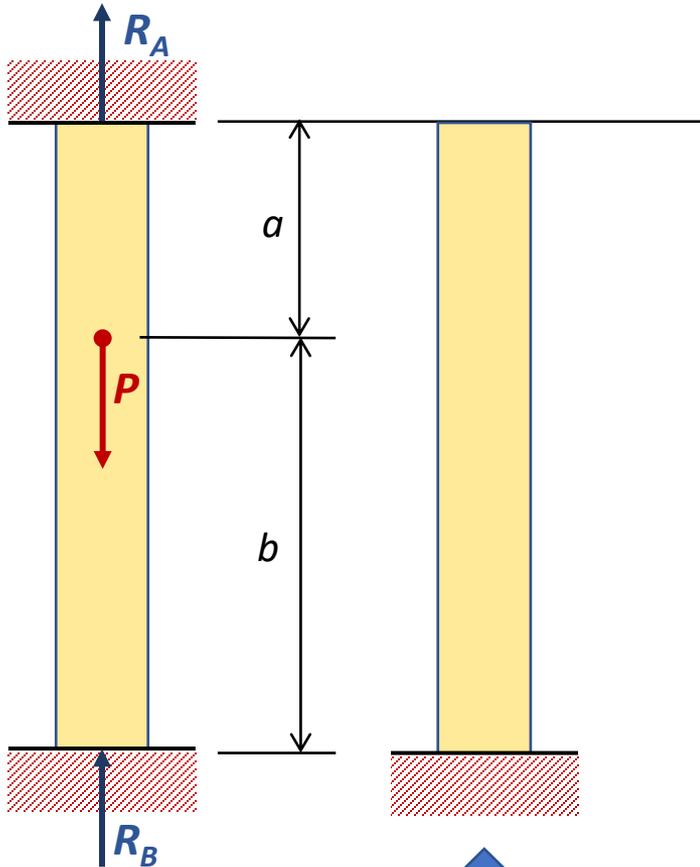
$$\delta_V = \delta_{BC} \cdot \operatorname{sen} \theta + (\delta_{BC} \cdot \operatorname{cos} \theta + \delta_{AB}) \cdot \operatorname{ctg} \theta$$

$$\delta_V = \delta_{BC} \cdot (\operatorname{sen} \theta + \operatorname{cos} \theta \cdot \operatorname{ctg} \theta) + \delta_{AB} \cdot \operatorname{ctg} \theta$$

$$\delta = \sqrt{\delta_H^2 + \delta_V^2}$$



2.5 SOLICITACIÓN AXIL → Estructuras Estáticamente Indeterminadas. Ej.1



**SISTEMA
FUNDAMENTAL**

Objetivos:

Cálculo de Reacciones de vínculo.

Corrimiento del punto C

Por estática, sabemos que:

$$R_A + R_B = P$$



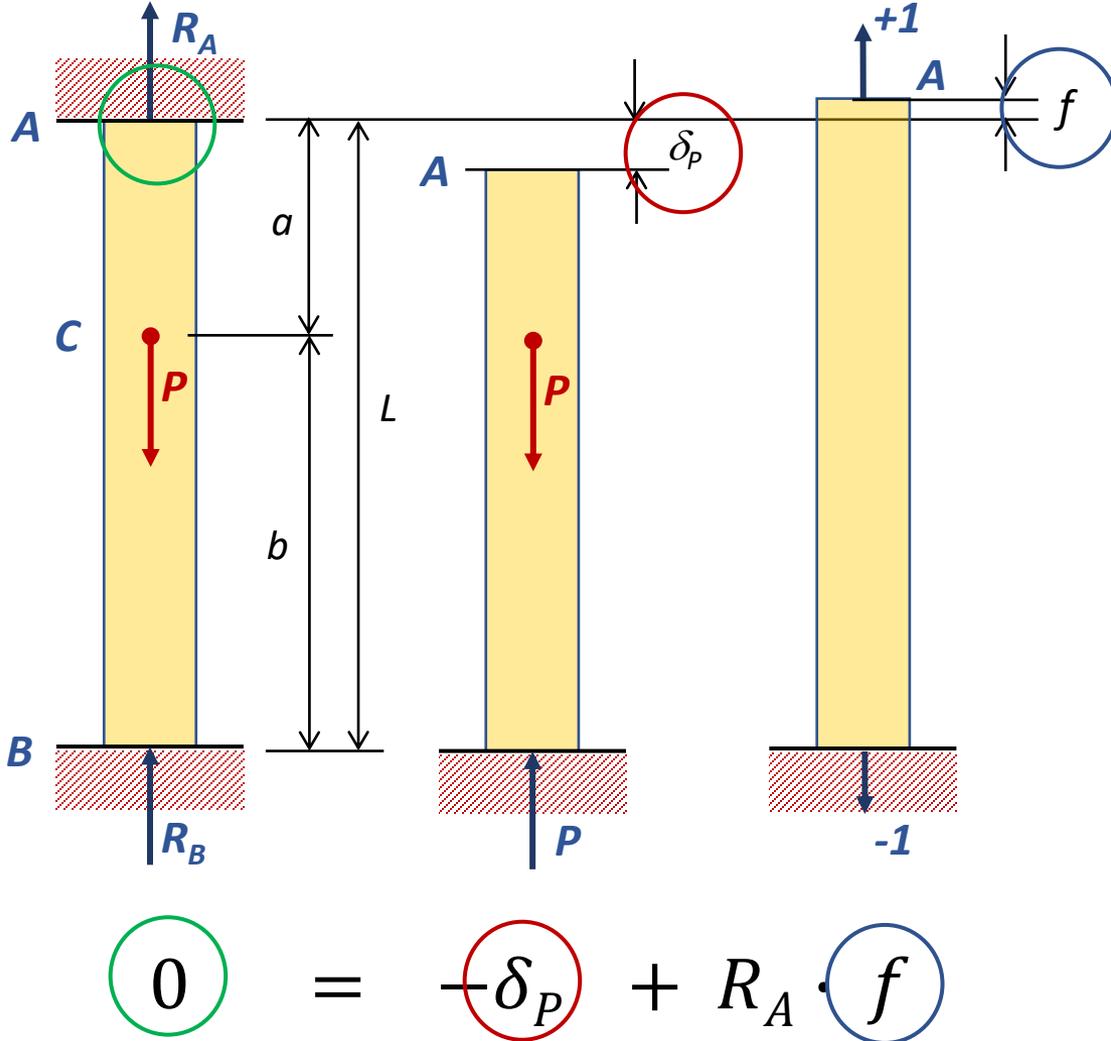
Tenemos dos incógnitas (R_A y R_B) y una sola ecuación. Necesitamos otra ecuación para resolver el problema.

*Una ecuación de “compatibilidad con los vínculos”:
Planteamos una ecuación de deformación compatible con la vinculación de la estructura en un punto en el que conocemos el valor del corrimiento. Por ejemplo los puntos de empotramiento donde el corrimiento es nulo.*

Para la resolución de este problema, utilizaremos el “Método de las flexibilidades”

2.5 SOLICITACIÓN AXIL → Estructuras Estáticamente Indeterminadas. Ej 1.

$$\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot F}$$



δ_P = corrimiento del punto A , debido a la carga P en el sistema fundamental

$$\delta_P = \frac{P \cdot b}{E \cdot F}$$

f = Flexibilidad: Corrimiento del punto A , debido a una reacción de vínculo R_A unitaria.

$$f = \frac{1 \cdot L}{E \cdot F}$$

$$-\delta_P + R_A \cdot f = 0$$

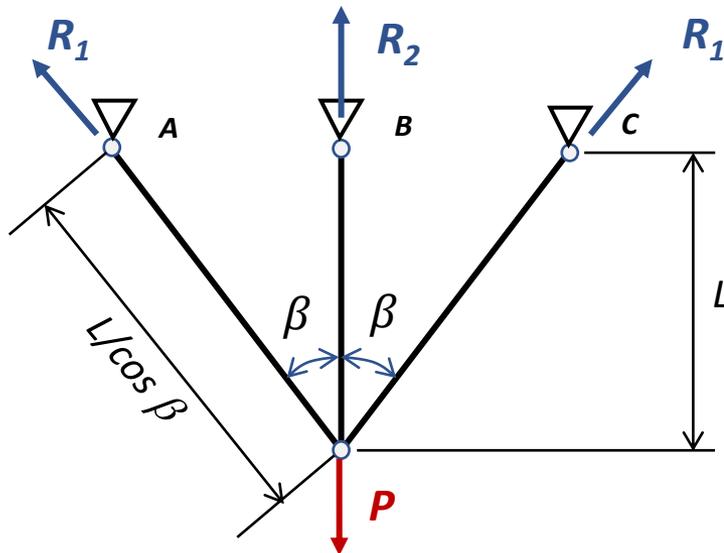
$$R_A = \delta_P / f$$

$$R_A = \frac{\frac{P \cdot b}{E \cdot F}}{\frac{1 \cdot L}{E \cdot F}} = \frac{P \cdot b}{L}$$

$$R_B = P - R_A = P - \frac{P \cdot b}{L}$$

$$R_B = \frac{P \cdot a}{L}$$

2.5 SOLICITACIÓN AXIL → Estructuras Estáticamente Indeterminadas. El Problema de las Tres Barras.



Objetivos:

Cálculo de Reacciones de vínculo.

Corrimiento del punto D

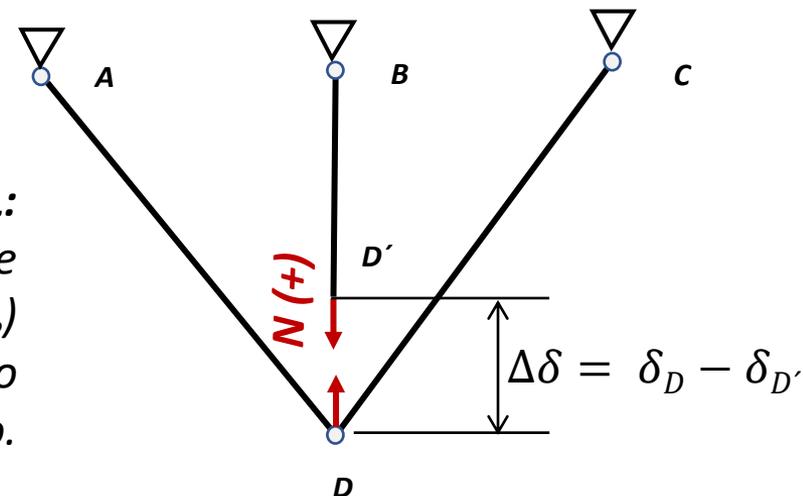
El sistema tiene un grado de hiperestaticidad.

Nuevamente resolvemos el problema por el método de las flexibilidades.

SISTEMA FUNDAMENTAL:

Incógnita: El esfuerzo normal supuesto de tracción (que coincide con R_2)

Ecuación de compatibilidad: El corrimiento relativo $\Delta\delta$ final es nulo.



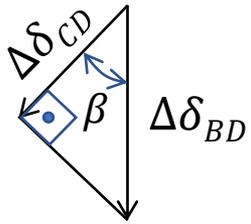
2.5 SOLICITACIÓN AXIL → Estructuras Estáticamente Indeterminadas.

El Problema de las Tres Barras.

ARMADO DE LA ECUACIÓN DE COMPATIBILIDAD:

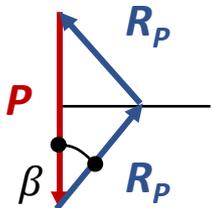
1. Calculamos el desplazamiento relativo $\Delta\delta_b$: debido a la causa deformante. En este caso la carga P .

El punto de aplicación de la carga desciende y aparece un desplazamiento relativo en el sistema FUNDAMENTAL de $\Delta\delta_B$. Lo calculamos por Hooke !

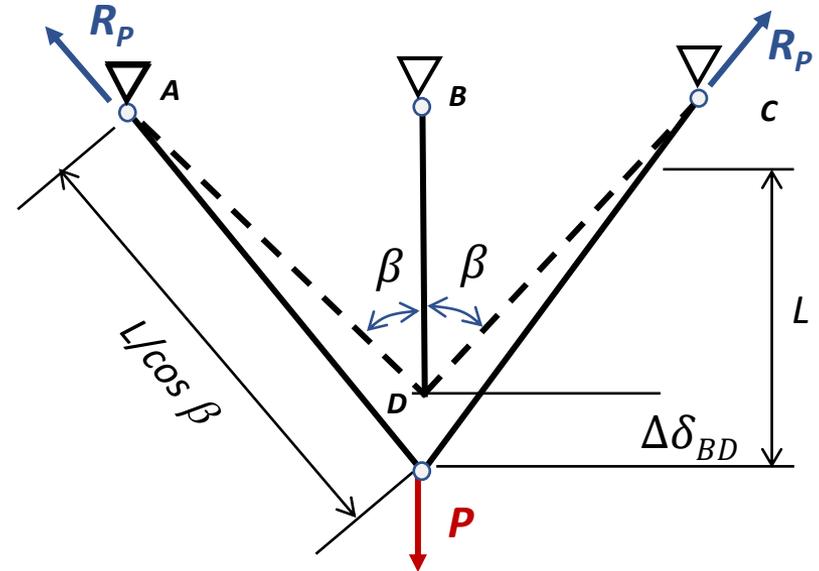


$$\cos \beta = \Delta\delta_{CD} / \Delta\delta_{BD}$$

$$\Delta\delta_{BD} = \Delta\delta_{CD} / \cos\beta$$



$$R_p = P / 2 \cdot \cos\beta$$



Por Hooke:

$$\Delta\delta_{CD} = -\frac{R_p \cdot L}{\cos\beta \cdot E \cdot F} = -\frac{R_p \cdot L}{\cos^2\beta \cdot E \cdot F}$$

$$\Delta\delta_{BD} = -\frac{\Delta\delta_{CD}}{\cos\beta} = -\frac{P \cdot L}{2 \cdot \cos^3\beta \cdot E \cdot F}$$

2.5 SOLICITACIÓN AXIL → Estructuras Estáticamente Indeterminadas.

El Problema de las Tres Barras.

ARMADO DE LA ECUACIÓN DE COMPATIBILIDAD:

2. Calculamos el desplazamiento relativo Δf : Flexibilidad, debido a un esfuerzo axial unitario en la barra BD, en el sistema FUNDAMENTAL: La barra BD se comprime y las barras AD y DC se traccionan.

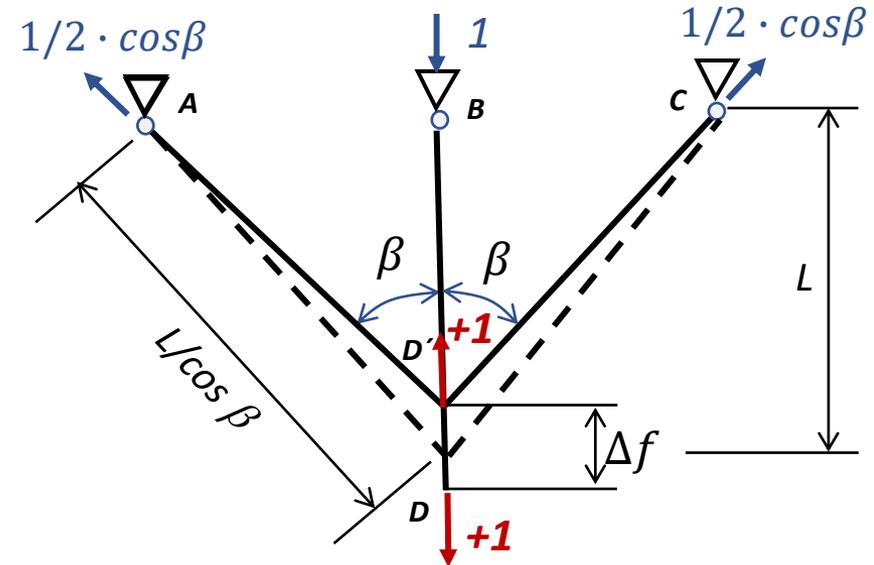
La barra vertical se estira en:

$$\delta_{D'} = \frac{1 \cdot L}{E \cdot F}$$

El punto D debido al acortamiento de las barras inclinadas sube en un valor:

$$\delta_D = \frac{1 \cdot L}{2 \cdot \cos^3 \beta \cdot E \cdot F}$$

La fórmula que controla δ_D es la misma que la que deducimos en la diapositiva anterior en el FUNDAMENTAL cuando actúa P, solo que aquí P=1



$$\Delta f = \delta_D + \delta_{D'} = \frac{1 \cdot L}{2 \cdot \cos^2 \beta \cdot E \cdot F} + \frac{1 \cdot L}{E \cdot F}$$

2.5 SOLICITACIÓN AXIL → Estructuras Estáticamente Indeterminadas.

El Problema de las Tres Barras.

3. Planteamos la ecuación de compatibilidad con los vínculos

The diagram illustrates the three-bar problem. It shows a structure with three bars meeting at a central point D. The left and right bars are inclined at an angle β to the vertical, and the middle bar is vertical. A downward force P is applied at D. The structure is supported by a roller at A and a pin at B. The displacement of D is denoted as $\Delta\delta_{BD}$. A unit load is applied at D to find the influence coefficient R_B .

The compatibility equation is given by:

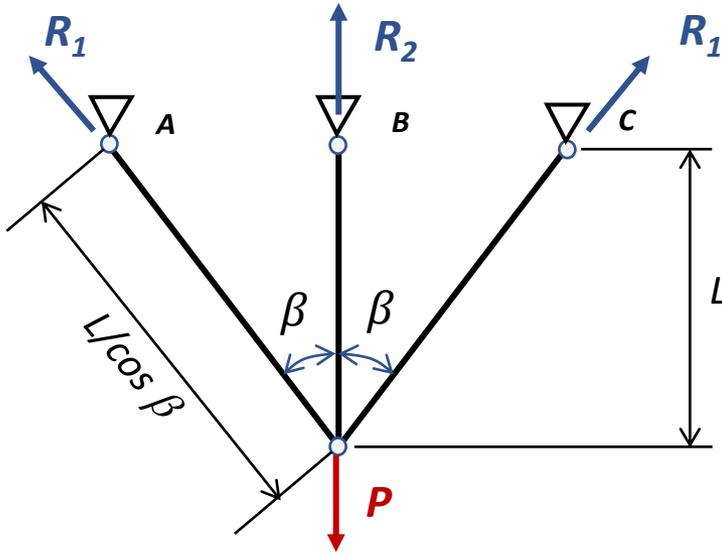
$$\Delta\delta_{BD} + R_B \cdot \Delta f = 0$$

where $\Delta\delta_{BD}$ is the displacement of D due to the load P , and Δf is the displacement of D due to the unit load.

The final equation is:

$$-\frac{P \cdot L}{2 \cdot \cos^3 \beta \cdot E \cdot F} + R_2 \cdot \left(\frac{1 \cdot L}{2 \cdot \cos^3 \beta \cdot E \cdot F} + \frac{1 \cdot L}{E \cdot F} \right) = 0$$

2.5 SOLICITACIÓN AXIL → Estructuras Estáticamente Indeterminadas. El Problema de las Tres Barras.



4. Cálculo de las reacciones R_2 y R_1

$$-\frac{P \cdot L}{2 \cdot \cos^3 \beta \cdot E \cdot F} + R_2 \cdot \left(\frac{1 \cdot L}{2 \cdot \cos^3 \beta \cdot E \cdot F} + \frac{1 \cdot L}{E \cdot F} \right) = 0$$

$$-\frac{P}{2 \cdot \cos^3 \beta} + R_2 \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \cos^3 \beta} + 1 \right) = 0$$

$$-P + R_2 \cdot (1 + 2 \cdot \cos^3 \beta) = 0$$

$$R_2 = \frac{P}{1 + 2 \cdot \cos^3 \beta}$$

$$2 \cdot R_1 \cdot \cos \beta + R_2 = P \rightarrow 2 \cdot R_1 \cdot \cos \beta + \frac{P}{1 + 2 \cdot \cos^3 \beta} = P$$

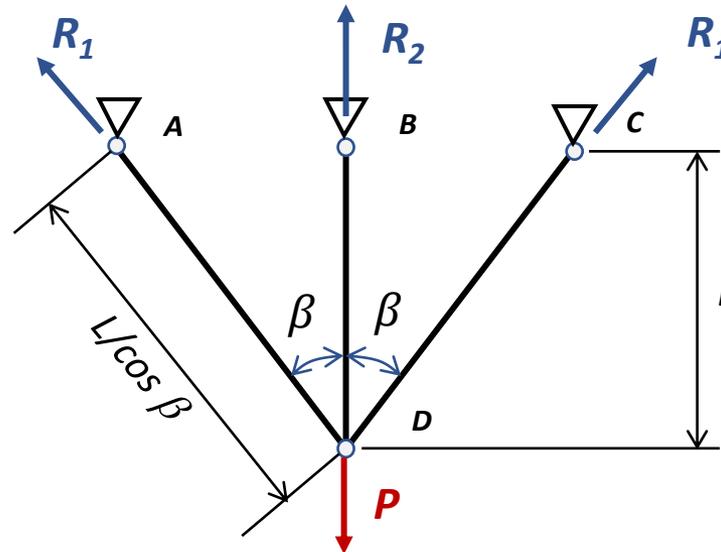
$$2 \cdot R_1 \cdot \cos \beta = P \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + 2 \cdot \cos^3 \beta} \right) = P \cdot \left(\frac{1 + 2 \cdot \cos^3 \beta - 1}{1 + 2 \cdot \cos^3 \beta} \right) = \frac{P \cdot 2 \cdot \cos^3 \beta}{1 + 2 \cdot \cos^3 \beta}$$

$$R_1 = \frac{P \cdot \cos^2 \beta}{1 + 2 \cdot \cos^3 \beta}$$

2.5 SOLICITACIÓN AXIL → Estructuras Estáticamente Indeterminadas. El Problema de las Tres Barras.

$$R_2 = \frac{P}{1 + 2 \cdot \cos^3 \beta}$$

$$R_1 = \frac{P \cdot \cos^2 \beta}{1 + 2 \cdot \cos^3 \beta}$$



Cual es el descenso del punto D ? → Coincide con el alargamiento de la barra vertical BD.

$$\delta_D = \frac{R_2 \cdot L}{E \cdot F} = \frac{P \cdot L}{E \cdot F \cdot (1 + 2 \cdot \cos^3 \beta)}$$



FIN