EJERCICIO Nº / TIPO		
1.	01	G

* Dada la sección compuesta de la figura 1.01, formada por dos perfiles UPN 200, se pide:

1 Determinar la posición del Baricentro.
2 Determinar la posición de los Ejes Principales de Inercia baricéntricos.
3 Calcular los Momentos Principales de Inercia baricéntricos.

Las tres determinaciones se llevarán a cabo mediante procedimientos analíticos.

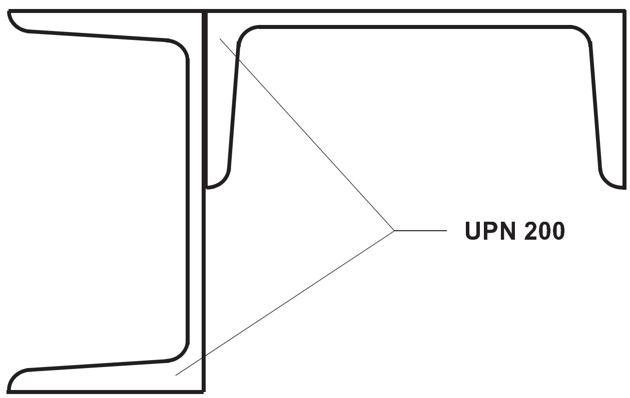


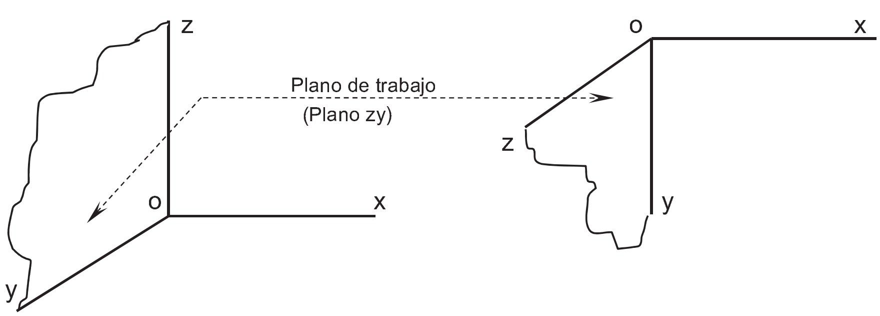
Figura 1.01

1 Posición del Baricentro

Dado que resolveremos el problema aplicando un procedimiento *analítico* , lo primero que debemos hacer es adoptar una *terna de ejes de referencia* y ubicarla relativamente respecto de la sección compuesta que estamos estudiando.

La terna que adoptaremos es una *terna izquierda* , que elegiremos posicionar tal como lo indica la figura 1.02, que será nuestro *esquema de análisis* . En él volcaremos todos los datos del problema, así como otros elementos de referencia y la posición genérica del baricentro G.

A continuación recordamos cómo es una terna izquierda de ejes ortogonales y en cuál de los tres planos coordenados elegimos resolver nuestro problema:



C

VIERNES 16 A 19	ING. GIACOIA	LAIUN / PARENTE				/
CLASES DE TP	JEFE DE TP	INGS. AYUDANTES DE TP	GRUPO Nº	ALUMNO: APELLIDO / NOMBRE	PADRON Nº	HOJA Nº

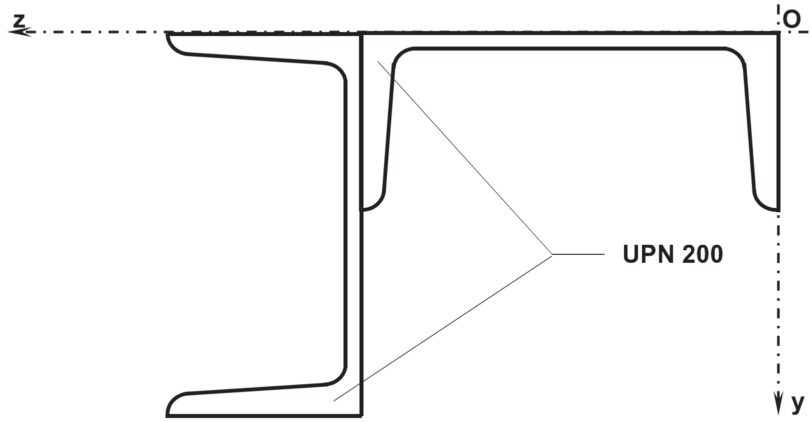
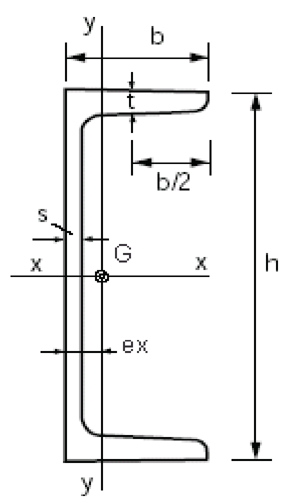


Figura 1.02

Para empezar nuestros cálculos, debemos tener en cuenta que, si bien el *sistema de masas* con el que estamos trabajando es *continuo*, el hecho de que las *características geométricas* del perfil UPN aislado estén ya determinadas y tabuladas nos permite abordar el tratamiento de la sección compuesta como si se tratase de un *sistema discreto* de dos masas, que serán, en este caso, las áreas de las secciones transversales de los perfiles, supuestas concentradas en los respectivos baricentros G_1 y G_2.

De la tabla correspondiente a los perfiles UPN, fabricados de acuerdo con las normas alemanas, extraemos los siguientes datos, para el perfil UPN 200 aislado:



h = 200 mm

b = 75 mm

ex = 20,1 mm

F = 32,2 cm2

Jxx = 1 910 cm4

Jyy = 148 cm4

Recordemos ahora que la definición de *baricentro* establece que *el momento estático o de primer orden de la masa asignada a ese punto material con respecto a un plano es igual a la suma de los momentos estáticos de las masas parciales que componen el sistema con respecto al mismo plano,* lo que permite hallar la distancia que media entre el baricentro y el plano en cuestión.

En nuestro caso, tendremos que:

F_1 = Area de la sección del perfil Nº 1, que se asignará al baricentro G_1 del mismo.
F_2 = Area de la sección del perfil Nº 2, que se asignará al baricentro G_2 del mismo.
F = Area de la sección compuesta, que se asignará al baricentro G de la misma.
xy = Plano de referencia de la terna, para hallar la abcisa z_G del baricentro G.
xz = Plano de referencia de la terna, para hallar la ordenada y_G del baricentro G.

lo que nos permite, entonces, plantear lo siguiente:

$$F \cdot z_G = F_1 \cdot z_1 + F_2 \cdot z_2 \qquad (1)$$

$$F \cdot y_G = F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 \qquad (2)$$

donde

F_1 = 32,2 cm2
F_2 = 32,2 cm2
$F = F_1 + F_2$ = 64,4 cm2

z_1 = 20,0 cm + 2,01 cm = 22,01 cm
z_2 = 20,0 cm / 2 = 10,00 cm

y_1 = 20,0 cm / 2 = 10,00 cm
y_2 = ………………………… = 2,01 cm

Reemplazando estos valores en las ecuaciones (1) y (2) y despejando, obtenemos, finalmente:

$$\left.\begin{aligned} z_G &= 16{,}00 \text{ cm} \\ y_G &= 6{,}00 \text{ cm} \end{aligned}\right| \quad (3)$$

Vimos en su momento, que el baricentro de dos puntos materiales se ubica sobre el segmento de recta que los une y que la distancia al punto medio es directamente proporcional a las áreas en juego.

Dado que, en este caso, $F_1 = F_2$ el baricentro G de la sección compuesta deberá ubicarse en el el punto medio de la distancia que separa a los baricentros parciales. En efecto, se cumple que:

$$z_G = (z_1 + z_2) / 2 = (22{,}01 + 10{,}00) / 2 \text{ cm} = 16{,}00 \text{ cm}$$
$$y_G = (y_1 + y_2) / 2 = (10{,}00 + 2{,}01) / 2 \text{ cm} = 6{,}00 \text{ cm}$$

valores que coinciden con los resultados dados por las expresiones (3).

2 Posición de los Ejes Principales de Inercia Baricéntricos

Conocida la ubicación del baricentro, la posición de los *ejes principales de inercia* correspondientes se obtiene a partir de las expresiones que permiten hallar los momentos de segundo orden para ejes rotados de un mismo origen.

Recordemos que, si z e y son los ejes ortogonales de referencia originales y z' e y' son otros dos ejes ortogonales rotados de un ángulo α con respecto a los primeros, las expresiones mencionadas permiten calcular $J_{z'}$, $J_{y'}$ y $J_{z'y'}$ en función de J_z, J_y y J_{zy}.

En nuestro caso, α es desconocido, ya que, justamente, lo que queremos hallar es la posición de los ejes ortogonales (z' e y') que denominamos principales de inercia, para los cuales tendremos que $Jz'y'$ = 0, ya que los ejes principales son, a la vez, conjugados de inercia.

Resumiendo, tendremos lo siguiente:

Origen de coordenadas = Baricentro G de la sección compuesta
Eje z original = Eje z_G, paralelo al de referencia usado para ubicar G
Eje y original = Eje y_G, paralelo al de referencia usado para ubicar G
Eje z' buscado = Eje principal de inercia que llamaremos 1-1
Eje y' buscado = Eje principal de inercia que llamaremos 2-2

$$Jz = Jz_G$$
$$Jy = Jy_G$$
$$Jzy = Jz_Gy_G$$
$$Jz' = J_{11}$$
$$Jy' = J_{22}$$
$$Jz'y' = J_{12} = 0$$

Ahora bien, como sólo disponemos, a través de la tabla de perfiles, de los momentos de segundo orden del perfil aislado, para los ejes *x-x* e *y-y* pasantes por su propio baricentro, necesitaremos hechar mano de las expresiones de Steiner para poder calcular los valores que asumen esas magnitudes cuando se las determina para ejes paralelos a los anteriores pero que pasan por otro punto, en nuestro caso, el baricentro G de la sección compuesta.

A tal fin, debemos tener presente, por último, que los ejes *x-x* e *y-y* del perfil aislado son principales de inercia y que, por lo tanto, el momento centrífugo del perfil respecto de los mismos es nulo (por este motivo la tabla sólo incluye los momentos de inercia).

Traduciendo en números lo antedicho, tendremos:

(Jz_G) perfil 1 = Jxx (tabla) + $F_1 \cdot d_1z^2$
(Jz_G) perfil 1 = 1 910 cm4 + 32.2 cm2 x $(10.00 - 6.00)^2$ cm2 = 2 425,2 cm4

(Jz_G) perfil 2 = Jyy (tabla) + $F_2 \cdot d_2z^2$
(Jz_G) perfil 2 = 1 910 cm4 + 32.2 cm2 x $(2.01 - 6.00)^2$ cm2 = 660,6 cm4

(Jy_G) perfil 1 = Jyy (tabla) + $F_1 \cdot d_1y^2$
(Jy_G) perfil 1 = 148 cm4 + 32.2 cm2 x $(22.01 - 16.00)^2$ cm2 = 1 311,1 cm4

(Jy_G) perfil 2 = Jxx (tabla) + $F_2 \cdot d_2y^2$
(Jy_G) perfil 2 = 1 910 cm4 + 32.2 cm2 x $(10.00 - 16.00)^2$ cm2 = 3 069,2 cm4

(Jz_G) 2UPN = (2 425,2 + 660,6) cm4 = 3 086 cm4 (4)
(Jy_G) 2UPN = (1 311,1 + 3 069,2) cm4 = 4 380 cm4 (5)

(Jz_Gy_G) perfil 1 = Jxy1 (tabla) + $F_1 \cdot a_1 \cdot b_1$
(Jz_Gy_G) perfil 1 = 0 cm4 + 32,2 cm2 x (22,01 - 16,00) cm x (10,00 - 6,00) cm = 774,1 cm4

(Jz_Gy_G) perfil 2 = Jxy2 (tabla) + $F_2 \cdot a_2 \cdot b_2$
(Jz_Gy_G) perfil 2 = 0 cm4 + 32,2 cm2 x (16,00 - 10,00) cm x (6,00 - 2,01) cm = 770,9 cm4

(Jz_Gy_G) 2UPN = (774,1 + 770,9) cm4 = 1 545 cm4 (6)

Luego, será:

$$tg\,(2\alpha) = 2\,.\,Jz_Gy_G\,/\,(Jy_G - Jz_G) = 2 \times 1\,545\,/\,(4\,380 - 3\,086)$$

$$tg\,(2\alpha) = 2{,}388 \Rightarrow 2\alpha_1 = 67{,}3º \Rightarrow \alpha_1 = 33{,}6º$$

$$2\alpha_2 = 247{,}3º \Rightarrow \alpha_2 = 123{,}6º \quad (7)$$

Esto significa, entonces, que uno de los ejes principales de inercia baricéntricos de la sección compuesta forma un ángulo de 33,6º con el eje z_G, mientras que el eje restante, que es ortogonal al anterior, forma un ángulo de 123,6º con el mismo eje z_G.

3 Momentos Principales de Inercia Baricéntricos

Para obtener, por último, los valores de los momentos principales de inercia debemos introducir los valores de α_1 y α_2 en las expresiones generales correspondientes a los momentos de inercia con respecto a ejes rotados, tal como lo adelantamos al comenzar este apartado.

Tendremos, entonces, lo siguiente:

$$J_{11} = Jz_G\,.\,\cos^2\alpha_1 + Jy_G\,.\,\text{sen}^2\,\alpha 1 - Jz_Gy_G\,.\,\text{sen}\,2\alpha_1$$
$$J_{11} = 3\,086\,.\,\cos^2 33.6º + 4\,380\,.\,\text{sen}2\,33.6º - 1\,545\,.\,\text{sen}\,67.3º$$
$$J_{11} = 2\,057\ \text{cm4}$$

$$J_{22} = Jz_G\,.\,\cos^2\alpha_2 + Jy_G\,.\,\text{sen}^2\,\alpha 2 - Jz_Gy_G\,.\,\text{sen}\,2\alpha_2$$
$$J_{22} = 3\,086\,.\,\cos^2 123.6º + 4\,380\,.\,\text{sen}2\,123.6º - 1\,545\,.\,\text{sen}\,247.3º$$
$$J_{22} = 5\,409\ \text{cm4}$$

$$\boxed{J_{11} = 2\,057\ \text{cm4}} \quad \boxed{J_{22} = 5\,409\ \text{cm4}} \quad (8)$$

Siendo $\mathbf{J_{22} > J_{11}}$ inferimos que: **El eje 1-1 es el de inercia mínima**
El eje 2-2 es el de inercia máxima

<u>Verificación</u>: Para verificar los valores de J_{11} y J_{22} que hemos obtenido precedentemente, vamos a emplear ahora las expresiones generales que dan, directamente, los valores de Jmáx y Jmín, en función de Jz_G, Jy_G y Jz_Gy_G:

$$\text{Jmáx} = [(3\,086 + 4\,380)\,/\,2] + \{[(3\,086 - 4\,380)^2 + 4 \times 1\,5452]^{1/2}\}\,/\,2$$
Jmáx = 5 408 cm4

$$\text{Jmín} = [(3\,086 + 4\,380)\,/\,2] - \{[(3\,086 - 4\,380)^2 + 4 \times 1\,5452]^{1/2}\}\,/\,2$$
Jmín = 2 058 cm4

Como vemos, estos valores coinciden con los correspondientes a las expresiones (8).

----oOo----