# Parcial $1^a$ oportunidad de Señales y Sistemas

## 7 de noviembre de 2005

**Aclaración:** Todas las respuestas de las preguntas siguientes deben ser acompañadas de la explicación de los razonamientos seguidos para resolverlos. Cualquier respuesta, aunque correcta, que no cumpla este requisito, carecerá de validez.

1. Dado un sistema *lineal* del que se conoce la respuesta al impulso

$$\delta(n-k) \rightarrow e^{a(n+k)}\, u(n-k), a > 0, a \in \mathbb{R}$$

se pide:

1.a) Encontrar la respuesta al escalón.

1.b) Determinar si el sistema es estable.

1.c) Determinar si el sistema es causal.

1.d) Determinar si el sistema es invariante ante desplazamientos.

2. Un sistema LTI, cuya respuesta impulsiva es

$$h(n) = \begin{cases} n+1 & \text{si } 0 \leq n \leq N-1 \\ -n+2N-1 & \text{si } N \leq n \leq 2N-2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

es excitado con una entrada

$$x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{N} n\right) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(n - r\,N),$$

obteniéndose la salida $y(n)$.

2.a) Calcular la transformada de Fourier $H(\Omega)$ de $h(n)$, y graficarla esquemáticamente mostrando amplitudes relativas y cruces por cero.

2.b) Calcular la transformada de Fourier $Y(\Omega)$ de la salida $y(n)$.

2.c) Calcular los coeficientes de la serie de Fourier $a_k$ de $y(n)$.

2.d) Describa una forma de obtener los coeficientes $a_k$ de $y(n)$ a partir de $h(n)$ utilizando DFT.

3. La señal de tiempo continuo

$$x_c(t) = \sin(20\pi t) + \cos(40\pi t)$$

es muestreada con un intervalo de muestreo $T$, obteniéndose la siguiente señal de tiempo discreto

$$x(n) = \sin\left(\frac{\pi n}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right)$$

3.a) Determinar si $x_c(t)$ y $x(n)$ son periódicas.

3.b) Determinar un valor de $T$ consistente con la información anterior. Existe una única opción posible para dicho valor? (justifique su respuesta).

## Parcial 1° oportunidad

## de Señales y Sistemas

## 7 de noviembre de 2005

**Ejercicio 1**

$$\delta(n-k) \longrightarrow e^{a(n-k)}\, u(n-k) \quad , a>0 \;, a\in\mathbb{R}$$

(1a) respuesta al escalón

$$u(n)=\sum_{k=0}^{+\infty}\delta(n-k) \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} e^{a(n-k)} \underbrace{u(n-k)}_{1 \text{ si } n\geq k} = \sum_{k=0}^{n} e^{a(n-k)} = \left(\sum_{k=0}^{n} e^{-ak}\right) e^{an}$$

$$= \frac{1-e^{-a(n+1)}}{1-e^{-a}}\, e^{an}$$

$$= \boxed{\frac{e^{an}-e^{-a}}{1-e^{-a}}}$$

(1b) Estabilidad

si $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|e^{a(n-k)} u(n-k)\right|$ es acotado, el sistema es estable

entonces $\sum_{n=k}^{+\infty} e^{a(n-k)} = \sum_{n=k} e^{an}\cdot e^{-ak} = e^{-ak}\sum_{n=k}^{+\infty} e^{an}$ claramente diverge, no es estable

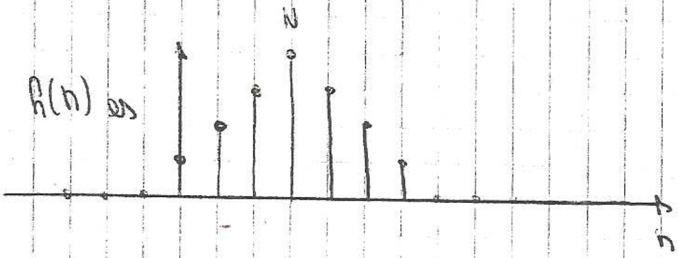
(1c) Causalidad

(1d) TI? Sí (aunque debería haberlo usado al ppio

¡Ejercicio 2!

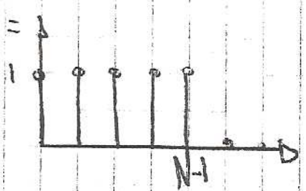
$$h(n) = \begin{cases} n+1 & \text{si } 0 \le n \le N-1 \\ -n+2N-1 & \text{si } N \le n \le 2N-2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$h(n)$ es




es decir $h(n) = c(n) * c(n)$

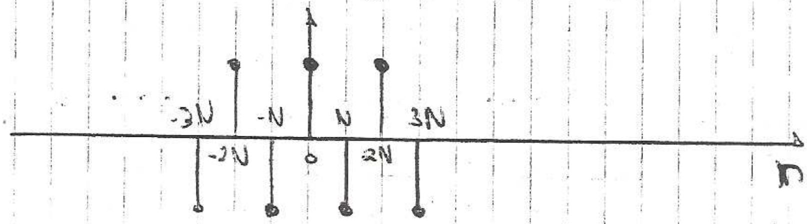
con $c(n) =$




Se excita con $x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{N} \cdot n\right) \cdot \sum_{r=-\infty}^{\infty} \overset{1 \text{ si } rN = n}{\delta(n - rN)}$

$= \cos\left(\frac{\pi}{N} \cdot Nr\right) \quad -\infty < r < +\infty$

$= \cos(\pi r) \quad -\infty < r < +\infty$




(2a) Transformada de $h(n)$

$H(\Omega) = C(\Omega) \cdot C(\Omega)$ (por prop. de la conv.)

$$C(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\Omega n} = \frac{1 - e^{-j\Omega N}}{1 - e^{-j\Omega}} = \frac{\text{sen}(N/2\,\Omega)}{\text{sen}(\Omega/2)} e^{-j\Omega\left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2}\right)}$$

$$(C(\Omega))^2 = \boxed{H(\Omega) = \frac{\text{sen}^2(N/2\,\Omega)}{\text{sen}^2(\Omega/2)} e^{-j\Omega(N+1)}} \quad (1)$$

(2b) $Y(\Omega)$?

$Y(\Omega) = H(\Omega) \cdot X(\Omega)$ (conozco $H(\Omega)$, faltaría conocer $X(\Omega)$)

$x(n)$ es periódico entonces su TDFT es un tren de impulsos ponderados por sus coeficientes $a_K$

$$a_K = \sum_{m=0}^{2N-1} x(m) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{2N}\cdot K \cdot m}$$

$$= \delta(m)\, e^{-j\frac{2\pi}{2N}\cdot K \cdot m} + \delta(m-N)\,(-1)\, e^{-j\frac{2\pi}{2N}\cdot K \cdot m}$$

$$= 1 - e^{-j\frac{2\pi}{2N}\cdot NK} = 1 - e^{-j\pi K} = 1 - (-1)^K$$

K par 0

K impar 2

$$\Rightarrow X(\Omega) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} 2\pi \cdot \left(1 - e^{-j\frac{2\pi}{2}K}\right) \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{2N} \cdot K\right)$$

$$= \sum_{K=-\infty}^{+\infty} 2\pi \cdot \left(1 - e^{-j\pi K}\right) \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{2N} \cdot K\right)$$

$$= \sum_{K=-\infty}^{+\infty} 2\pi \left(1 - (-1)^K\right) \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{2N} \cdot K\right)$$

con K impar $a_K = 2$

$$= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi \cdot 2\, \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{2N}(2r+1)\right)$$

$$= \boxed{4\pi \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N} r - \frac{\pi}{N}\right)} \quad (2)$$

$Y(\Omega) = (1) \cdot (2)$

(2c) Incluyendo (1) adentro de la sumatoria de (2)

$$b_K \leftrightarrow y(n)$$

$$b_K = \left(1-(-1)^k\right) \cdot \frac{sen^2(N/2\,\Omega)}{sen^2(\Omega/2)}\, e^{-j\Omega(N+1)} \Bigg|_{\Omega = \frac{2\pi}{2N} \cdot K}$$

$$b_K = \left(1-(-1)^k\right) \cdot \frac{sen^2(\pi/2 \cdot K)}{sen^2(\pi/2N \cdot K)}\, e^{-j\frac{2\pi}{2N}(N+1)}$$

(2.d) Para obtener los coeficientes de $y(n)$, debo calcular DFT de 1 período de $y(n)$

Ahora $y(n) = x(n) * h(n)$

pts $x_p(n)$, pts $h(n)$

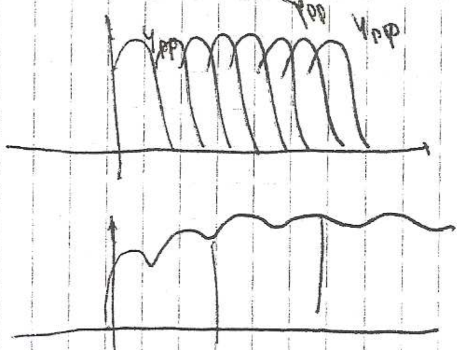
de $N+L-1$ puntos

Haciendo $y_{pp}(n) = x_p(n) * h(n)$ (lo puedo hacer usando DFT)

obtengo la respuesta del sistema a un período

periodizo $y_{pp}$ con el período de $x_p(n)$ $(2N)$

a esa periodización le hago una DFT de 2N puntos




1 período

$\rightarrow DFT_{2N} \rightarrow$ son los coeficientes

Ejercicio 3,

$$x_c(t) = \sin(20\pi t) + \cos(40\pi t) \qquad (1)$$

muestreo con período T

$$x(n) = \sin\left(\frac{\pi n}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) \qquad (2)$$

3.a) $x_c(t+T) = \sin(20\pi t + \underbrace{20\pi T}_{2\pi m}) + \cos(40\pi t + \underbrace{40\pi T}_{2\pi k}) = x_c(t)$

$$20\cancel{\pi} T = 2\cancel{\pi} m \qquad \cancel{4}0\cancel{\pi} T = \cancel{2\pi} k$$

$$T = \frac{m}{10} \qquad T = \frac{k}{20} \qquad m, k \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_T = \frac{1}{10}}$$ es periódico de $T = 1/10$ ✓

$x(n+N) = \sin\left(\frac{\pi}{5} n + \underbrace{\frac{\pi}{5} N}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5} n + \underbrace{\frac{2\pi}{5} N}\right)$

$$\frac{\pi}{5} N = 2\pi . m \qquad \frac{\cancel{2\pi}}{5} N = \cancel{2\pi} K$$

$$N = \frac{2\pi m}{\pi} . 5 \qquad N = 5K$$

$$\boxed{N = 10 m} \qquad \boxed{N = 5K}$$

$$\boxed{N_T = 10}$$ es periódico ✓

3.b) $x_c(n.T) = \sin(20\pi n T) + \cos(40\pi n T) = x(n)$

$$20\cancel{\pi} T = \frac{\cancel{\pi}}{5} + 2\cancel{\pi} m \qquad 40\cancel{\pi} T = \frac{2\cancel{\pi}}{5} + 2\cancel{\pi} k$$

$$T = \frac{1}{100} + \frac{m}{10} \qquad T = \frac{1}{100} + \frac{k}{20}$$

∃ infinitos períodos tal que si muestreo con T obtengo $x(n)$