Departamento de Estabilidad

84.02/64.01 ESTABILIDAD I

SISTEMAS DE FUERZAS GENERALIZADAS

Ing. Carolina Pérez Taboada[1]

---

[1] JTP del Dto. de Estabilidad, Facultad de Ingeniería, UBA

Índice de contenidos

Fuentes de consulta 3
Objetivos 4
Fuerzas 4
Unidades de fuerzas 4
Vectores fuerza 4
Versores y cosenos directores 4
Clases de vectores: 5
Dos vectores pueden ser: 5
Sistemas de fuerzas 5
Principios de la estática 5
1º Principio: del paralelogramo 5
Triángulo de fuerzas 6
Polígono de fuerzas 6
Corolarios 7
2º Principio de la Estática – Equilibrio (1ra ley de Newton) 7
Corolarios 7
3º Principio y teorema de transmisibilidad 8
Corolarios 8
4º Principio de acción y reacción 8
Momentos 9
Momento respecto de un eje (representación escalar) 9
Fuerza perpendicular al eje 9
Fuerza en cualquier dirección respecto del eje 9
Momento respecto de un punto (representación vectorial) 10
Unidades de momento 10
Teorema de Varignon (o principio de momentos) 10
Par de fuerzas o cupla: 11
Traslación de fuerzas 12
Invariantes en los sistemas de fuerzas 13
Invariante vectorial 13
Invariante escalar 13
Conclusiones 14
Resultante 14
Caso particular: única fuerza resultante 14
Equilibrio 14
Sistemas de fuerzas equivalentes 14
ANEXOS 15
Cosenos directores 15
Descomposición de un vector en el plano 15
Descomposición de un vector en el espacio 16
Momento de una fuerza en el espacio 17

Producto vectorial 17
Componente a componente 18

Fuentes de consulta

El presente apunte se ha confeccionado en base a la bibiliografía que se detalla a continuación. Para mayor profundidad o detalles, ejercicios resueltos y ejercicios propuestos, favor de recurrir a las fuentes.

- Mecánica vectorial para ingenieros - Estática, Russell C. Hibbeler, Pearson, 2004.
- Estabilidad – 1º curso, Enrique D. Fliess, Edit. Kapeluz, 1963.
- Estática, Pico, Peralta, Ciancio, Montanaro, Editorial Unicen, 2013.

Sistemas de fuerzas generalizadas

Objetivos

Los objetivos del presente documento son:

- Que el estudiante identifique los conceptos de fuerza y momento, su representación y su aplicación en las estructuras
- Que conozca los cuatro principios de la estática y el teorema de Varignon
- Que sea capaz de realizar operaciones de reducción, descomposición y traslación de fuerzas y momentos en el plano y en el espacio

Fuerzas

Los cuerpos se encuentran sometidos a acciones exteriores y de masa. Estas acciones se modelan mediante el concepto de fuerza.

Fuerza es toda acción capaz de modificar el estado de reposo o MRU de un cuerpo.

Una *fuerza concentrada* representa el efecto de una carga que se supone que está actuando en un punto sobre el cuerpo. Se puede representar una carga por medio de una fuerza concentrada cuando el área sobre la cual la carga es aplicada es muy pequeña en comparación con el tamaño total del cuerpo. Se representa mediante un vector.

Unidades de fuerzas

Se utilizará el Newton como unidad de fuerza. $F = [N]$.

Los valores usuales de fuerza hacen conveniente la expresión de fuerzas en términos de $[kN]$.

Sin embargo, aunque no sea del todo correcto, en la vida profesional es usual confundir las unidades de fuerza gravitatoria (peso) con las unidades de masa, ya que la carga gravitatoria es la más frecuente. Por esta razón muchas veces se expresan cargas en términos de kg o toneladas, o empujes en términos de kg/cm^2.[2]

Siendo que el valor de la aceleración de la gravedad en unidades del SI es: $g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$, para una masa de 1 kg, la fuerza será:

$$P = m \cdot g = 1\ kg \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \qquad \text{(Eq 1)}$$

En términos prácticos se asumirá la siguiente equivalencia:

$$1\ kg \cong 10\ N \qquad \text{(Eq 2)}$$

Vectores fuerza

Un vector es una cantidad que tiene magnitud, dirección y sentido. En estática las cantidades vectoriales que se van a manejar con frecuencia son posición, fuerza y momento.

Analíticamente el vector fuerza se expresa con una letra mayúscula con una flecha encima. Gráficamente se representa mediante una flecha con un origen, llamado punto de aplicación, su longitud indica la magnitud, su dirección queda definida por su recta de acción y su sentido con la cabeza de la flecha.

Versores y cosenos directores

En términos vectoriales, una fuerza está caracterizada por su módulo y su versor de módulo unitario, según:

$$\vec{F} = |F| \cdot \breve{v} = |F| \cdot \left(v_x, v_y, v_z\right) = \left(F_x, F_y, F_z\right) \qquad \text{(Eq 3)}$$

Siendo:

$\vec{F}$ El vector fuerza

[2] En realidad, se trata de kgf, kilogramos fuerza.

$\lvert F \rvert$	El módulo o magnitud
$\breve{v}$	El versor que da la dirección y sentido a la fuerza
(v_x, v_y, v_z)	Las componentes del versor en un sistema cartesiano (x, y, z), también llamadas cosenos directores[3].

En notación vectorial cartesiana:

$$\vec{F} = F_x \cdot \breve{\imath} + F_y \cdot \breve{\jmath} + F_z \cdot \breve{k} \qquad \text{(Eq 4)}$$

Clases de vectores:

- Fijo o aplicado: actúa en un punto fijo del espacio
- Deslizante o axil: puede aplicarse en cualquier punto a lo largo de su recta de acción
- Libre: puede actuar en cualquier lugar del espacio; solamente es necesario que conserve su magnitud y dirección.

Dos vectores pueden ser:

- Iguales: igual intensidad, igual dirección, igual sentido
- Opuestos: la misma recta de acción, igual intensidad y sentido contrario
- Coplanares: actúan en el mismo plano
- Colineales: la misma recta de acción

Sistemas de fuerzas

Sobre un cuerpo rígido pueden actuar simultáneamente más de una fuerza. Al conjunto de fuerzas se le llama sistema de fuerzas.

Los sistemas de fuerzas pueden ser:

- Planos: cuando todas las rectas de acción se encuentran contenidas en un mismo plano
- Espaciales: con direcciones cualesquiera

En relación a su recta de acción, los sistemas de fuerzas pueden ser:

- Concurrentes: Si las rectas de acción se encuentran (concurren) en un punto
- No concurrentes: Si las rectas de acción no concurren a un punto.

Un caso especial de sistemas de fuerzas concurrentes es el de los sistemas paralelos, donde las rectas de acción tienen la misma dirección. Su punto de concurrencia es el punto impropio de la dirección común.

Principios de la estática

La estática se encuentra basada en cuatro principios: principio del paralelogramo, del equilibrio, de la transmisibilidad y el principio de acción y reacción.

1º Principio: del paralelogramo

Enunciado: *"El efecto de dos fuerzas F_1 y F_2, aplicadas a un mismo punto de un cuerpo rígido es el mismo que el de una única fuerza llamada* ***Resultante****, aplicada en el mismo punto y cuya intensidad y dirección quedan definidas por la diagonal del paralelogramo que tiene por lados los vectores representativos de las fuerzas componentes."*

[3] Ver cosenos directores en Anexos

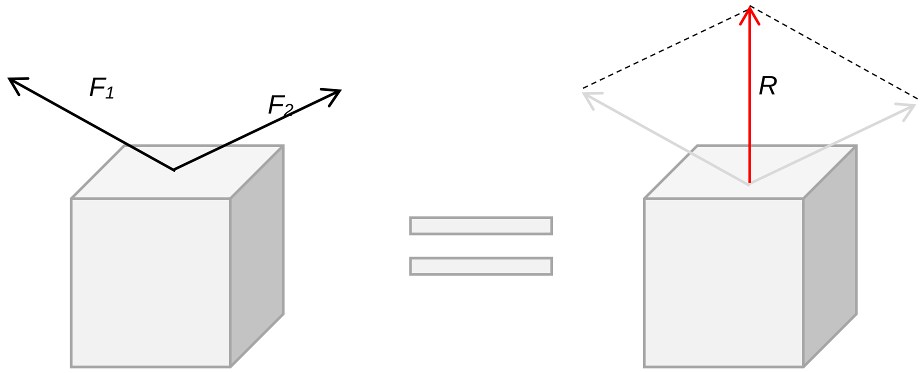

Figura 1. Principio del paralelogramo

Vectorialmente:

$$\vec{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} \qquad \text{(Eq 5)}$$

Triángulo de fuerzas

Cuando las fuerzas son concurrentes no hace falta graficar el paralelogramo completo, y es suficiente con componer el triángulo, uniendo el fin del vector de la fuerza F_1 con el origen del vector de la fuerza F_2. La resultante R quedará definida por la unión del origen de la fuerza F_1 y el fin de la fuerza F_2:

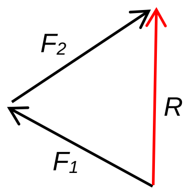

Figura 2. Triángulo de fuerzas

Polígono de fuerzas

Para sistemas de más de dos fuerzas se puede obtener la resultante mediante la aplicación sucesiva del principio del paralelogramo. El resultado gráfico será un polígono donde la resultante se obtiene de unir el origen de la primera fuerza con el fin de la última.

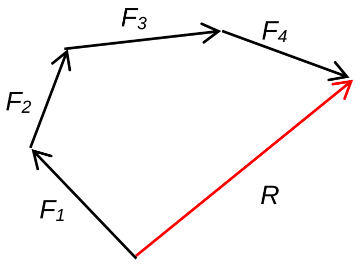

Figura 3. Polígono de fuerzas

Analíticamente para n cantidad de fuerzas:

$$\vec{R} = \sum_{i=0}^{n} \overrightarrow{F_n} \qquad \text{(Eq 6)}$$

Que, componente a componente, da lugar a 3 ecuaciones en el espacio y 2 en el plano

$$\left(R_x, R_y, R_z\right) = \left(\sum_{i=0}^{n} F_{n_x}, \sum_{i=0}^{n} F_{n_y}, \sum_{i=0}^{n} F_{n_z}\right) \qquad \text{(Eq 7)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{PLANO}\left\{\begin{array}{l} R_x = \sum_{i=0}^{n} F_{n_x} \\ R_y = \sum_{i=0}^{n} F_{n_y}\end{array}\right. \\ \qquad\quad R_z = \sum_{i=0}^{n} F_{n_z}\end{array}\right\}\text{ESPACIO}$$

Corolarios

- La resultante de fuerzas colineales es la suma algebraica de los vectores representativos de las componentes.
- Composición de fuerzas: Se pueden componer n fuerzas concurrentes en el plano o en el espacio, dando como resultado una única fuerza resultante.
- Descomposición en el plano: Se puede descomponer una fuerza en 2 direcciones cualesquiera coplanares. La fuerza a descomponer y las direcciones deben estar en el mismo plano.
- Descomposición en el espacio: Una fuerza se puede descomponer en 3 direcciones concurrentes en el espacio.

<u>2º Principio de la Estática – Equilibrio (1ra ley de Newton)</u>

Enunciado: *"Para que dos fuerzas se equilibren es necesario que sean opuestas"*

Un sistema de fuerzas concurrentes se encuentra en **equilibrio** si la resultante del mismo es el vector nulo.

EQUILIBRIO: $\vec{R} = 0$

Al sistema de fuerzas en equilibrio se le llama sistema nulo. Las fuerzas opuestas forman sistemas nulos.

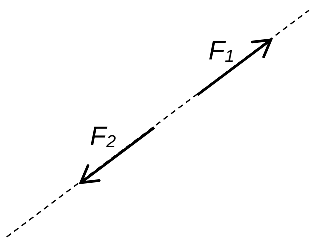

Figura 4. Fuerzas opuestas

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{R} = 0$$

$$\vec{F_1} = -\vec{F_2}$$

Dado un sistema de fuerzas de resultante *R*, se le llama **equilibrante** *E* a la fuerza opuesta a la resultante.

Corolarios

- Para que la resultante sea nula es condición necesaria y suficiente que sean nulas sus componentes.

$$\vec{R} = 0 \qquad \left\{\begin{array}{l} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ R_z = 0 \end{array}\right. \qquad \text{(Eq 8)}$$

- Para que la resultante sea nula es condición necesaria y suficiente que el polígono de fuerzas sea cerrado.
- Dos fuerzas se equilibran cuando son iguales y contrarias.

$$\text{Si } \vec{R} + \vec{E} = 0, \quad \text{entonces} \quad \vec{R} = -\vec{E} \qquad \text{(Eq 9)}$$

3º Principio y teorema de transmisibilidad

Enunciado: *"El efecto de un sistema de fuerzas dado sobre un cuerpo no se modifica si a dicho sistema se le agrega o quita un sistema de fuerzas nulo"*

En base a este principio puede demostrarse el **Teorema de transmisibilidad** de una fuerza que enuncia que:

"El efecto de una fuerza sobre un cuerpo rígido es independiente de cuál sea el punto de aplicación de la fuerza sobre dicho cuerpo, sobre la misma recta de acción."

A esto se lo llama efecto estático global (EEG). El EEG de dos fuerzas iguales y de sentido opuesto actuando sobre un cuerpo es nulo: equilibrio global.

Es condición que los cuerpos sean indeformables (hipótesis de rigidez).

Corolarios

- Las fuerzas que actúan sobre cuerpos rígidos son vectores axiles o deslizantes.
- Puede obtenerse la resultante de fuerzas coplanares no paralelas, aplicando el principio del paralelogramo sobre el punto de intersección de la línea de acción de las fuerzas intervinientes.

4º Principio de acción y reacción

Enunciado: *"Toda acción implica la existencia de una reacción, de igual intensidad y sentido contrario."*

Si un cuerpo "A" ejerce una fuerza sobre un cuerpo "B", entonces el cuerpo "B" ejerce sobre el cuerpo "A" otra fuerza de igual intensidad, igual recta de acción y sentido opuesto a la ejercida por "A".

En el estudio de estructuras, a uno de los cuerpos, supongamos "B", le llamaremos *vínculo*, y a la acción que desarrollará el vínculo la denominaremos *reacción de vínculo*. Estos conceptos se estudiarán con detalle en esta materia más adelante.

Momentos

El momento de una fuerza respecto a un punto o eje proporciona una medida de la tendencia de la fuerza a ocasionar que un cuerpo gire entorno del punto o eje.

Momento respecto de un eje (representación escalar)

Fuerza perpendicular al eje

Dada una fuerza *F* que actúa perpendicularmente a un eje *e*, a una distancia *d* del mismo.

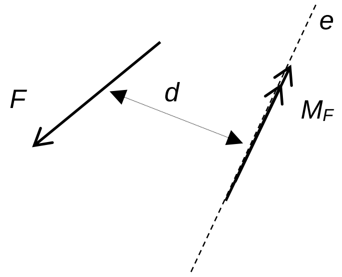

Figura 5. Momento de una fuerza *F* respecto de un eje *e*

La fuerza *F* genera una tendencia a girar en torno del eje *e* que es proporcional a la distancia *d*, o brazo de momento. La magnitud del momento o torque de la fuerza *F* en torno del eje *e* es el producto escalar entre *F* y *d.*

Esto es:

$$M_F^e = d \cdot F \qquad \text{(Eq 10)}$$

Se debe establecer una convención para definir cuál será un giro negativo y uno positivo. En Estabilidad I utilizaremos la **terna derecha**, o regla del tirabuzón, que establece que un giro positivo es antihorario.

Figura 6. Regla de la mano derecha: El pulgar señala la dirección del momento y los otros 4 dedos se mueven de acuerdo con la fuerza.

El momento se puede representar mediante un vector cuya recta de acción es el eje *e*, perpendicular al plano que queda definido por la fuerza y el brazo, cuya magnitud es el producto escalar entre la fuerza y el brazo y cuyo sentido es el definido por la regla de la mano derecha.

Se ilustra con flecha de doble cabeza para distinguirlo de los vectores fuerza[4].

Fuerza en cualquier dirección respecto del eje

En el caso general en que una fuerza tiene una dirección cualquiera respecto del eje, siempre es posible descomponer a la fuerza en una componente perpendicular al eje y otra componente paralela.

La componente perpendicular al eje se comportará de la manera descripta anteriormente, mientras que la componente paralela al eje no será capaz de generar momentos respecto del eje.

[4] Esta notación solo es válida cuando se ha establecido claramente la terna convenida.

Se deduce entonces que para el que valor del momento sea cero existen tres posibilidades:

- Que la intensidad de la fuerza valga cero
- Que la distancia de la fuerza al eje sea nula, es decir, que la recta de acción de la fuerza pase por el eje
- Que la fuerza sea paralela al eje

Momento respecto de un punto (representación vectorial)

Se define mediante la siguiente ecuación[5]:

$$\overrightarrow{M_{\vec{F}}^{O}} = \vec{d} \times \vec{F} \qquad \text{(Eq 11)}$$

Donde:

$\overrightarrow{M_{\vec{F}}^{O}}$	El momento de la fuerza $\vec{F}$ en torno al punto O. Es perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{d}$ y $\vec{F}$
$\vec{d}$	El vector posición tiene origen en el punto *O* hasta un punto cualquiera de la recta de acción de la fuerza.
$\vec{F}$	El vector fuerza

Desarrollando el producto vectorial con terna derecha, en notación cartesiana queda:

$$\begin{bmatrix} \breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{k} \\ d_x & d_y & d_z \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} = \left(d_y \cdot F_z - d_z \cdot F_y\right) \cdot \breve{\imath} + \left(d_z \cdot F_x - d_x \cdot F_z\right) \cdot \breve{\jmath} + \left(d_x \cdot F_y - d_y \cdot F_x\right) \cdot \breve{k} \qquad \text{(Eq 12)}$$

La componente M_x del vector momento es el momento de la fuerza respecto del eje x, análogamente para los ejes y y z.[6]:

$$\begin{cases} M_x = d_y \cdot F_z - d_z \cdot F_y \\ M_y = d_z \cdot F_x - d_x \cdot F_z \\ M_z = d_x \cdot F_y - d_y \cdot F_x \end{cases} \qquad \text{(Eq 13)}$$

En el Anexo un detalle del cálculo vectorial y escalar de momentos de fuerzas espaciales respecto de un punto.

En el caso espacial, para el que valor del momento sea cero es necesario que:

- Que la intensidad de la fuerza valga cero
- Que la distancia de la fuerza al centro de momentos sea nula. Es decir, que la recta de acción de la fuerza pasa por el punto

Unidades de momento

Las unidades de momento que utilizaremos en Estabilidad son: $M = d \cdot F = [N] \cdot [m]$

Teorema de Varignon (o principio de momentos)

Enunciado: *"El momento de una fuerza respecto de un punto es igual a la suma de los momentos de las componentes de la fuerza respecto al punto."*

Es fácilmente demostrable por la propiedad distributiva del producto vectorial. A saber:

[5] Si se definiera la distancia d como desde la fuerza hasta el centro de momentos la definición de momento sería con el producto vectorial al revés: $\overrightarrow{M_{\vec{F}}^{O}} = \vec{F} \times \vec{d}$

[6] En la práctica calcularemos los momentos componente por componente, que corresponde a la formulación escalar (respecto de un eje). La formulación vectorial la reservaremos para la programación de problemas. Ver detalle en Anexo.

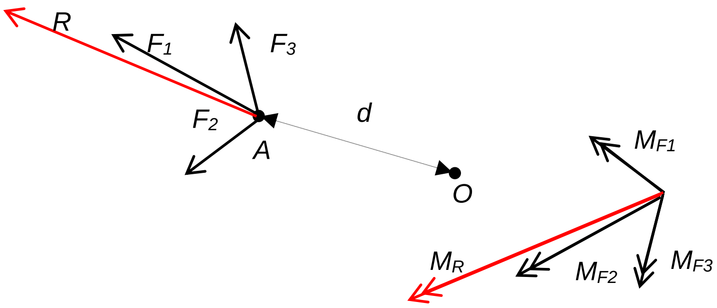

Figura 7. Teorema de Varignon

Dado un sistema de fuerzas *F₁, F₂,…, Fₙ* concurrentes en el punto *A*, de resultante *R*, se puede decir que el sistema de fuerzas son las componentes de la resultante. El momento de *R* respecto al punto *O,* separado una distancia *d* del punto de aplicación *A,* es un vector libre que responde a la expresión:

$$\overrightarrow{M^{O}_{\vec{R}}} = \vec{d} \times \vec{R} \qquad \text{(Eq 14)}$$

Reemplazando $\vec{R}$ en función del sistema de fuerzas que lo compone:

$$\overrightarrow{M^{O}_{\vec{R}}} = \vec{d} \times \sum_{i=0}^{n} \overrightarrow{F_n} \qquad \text{(Eq 15)}$$

Distribuyendo el producto vectorial:

$$\sum_{i=0}^{n} \vec{d} \times \overrightarrow{F_n} = \vec{d} \times \overrightarrow{F_1} + \vec{d} \times \overrightarrow{F_2} + \cdots + \vec{d} \times \overrightarrow{F_n} = \sum_{i=0}^{n} \overrightarrow{M^{O}_{\vec{F}}} \qquad \text{(Eq 16)}$$

Con lo cual queda demostrado el teorema:

$$\overrightarrow{M^{O}_{\vec{R}}} = \sum_{i=0}^{n} \overrightarrow{M^{O}_{\vec{F}}} \qquad \text{(Eq 17)}$$

Par de fuerzas o cupla:

Un par de fuerzas o cupla es un sistema de fuerzas constituido por dos fuerzas paralelas, no colineales, de igual intensidad y sentido contrario. Su efecto es producir una rotación pura en una dirección específica.

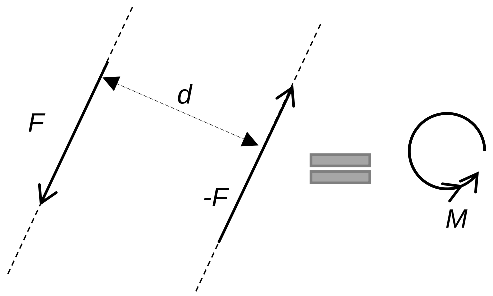

Figura 8. Cupla, definida por $M = d \cdot F$

Los pares de fuerzas quedan definidos por el **momento del par**, que es perpendicular al plano que contiene a las dos rectas de acción del par.

El momento de un par de fuerzas respecto de un punto cualquiera es constante e igual al momento del par.

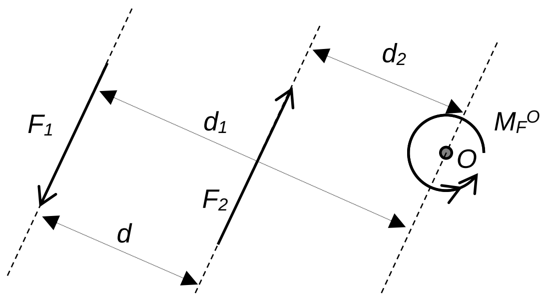

Figura 9. Momento de una cupla

Analíticamente:

$$M_F^O = d_1 \cdot F_1 - d_2 \cdot F_2 \qquad \text{(Eq 18)}$$

Se sabe que $F_1 = -F_2 = F$ y se puede ver que $d_1 = d_2 + d$. Reemplazando:

$$M_F^O = (d_2 + d) \cdot F - d_2 \cdot F = d \cdot F \qquad \text{(Eq 19)}$$

Independientemente del punto de aplicación se obtiene el valor del momento de la cupla. Se puede concluir que el momento de una cupla es un **vector libre**.

La resultante de un par es nula: $F_1 + F_2 = 0$

Los pares de fuerzas pueden pensarse como un caso particular de fuerzas concurrentes, donde el punto de concurrencia es el punto impropio de la recta de acción común.

Traslación de fuerzas

Una fuerza que actúa sobre un cuerpo rígido tiene definida su recta de acción. Bajo la hipótesis de rigidez, las fuerzas actúan como vectores axiles, por lo que una modificación en su punto de aplicación no altera su efecto sobre el cuerpo.

Si en cambio se modifica su recta de acción, debido a la traslación de la fuerza, entonces el efecto sobre el cuerpo no será el mismo[7]. A saber:

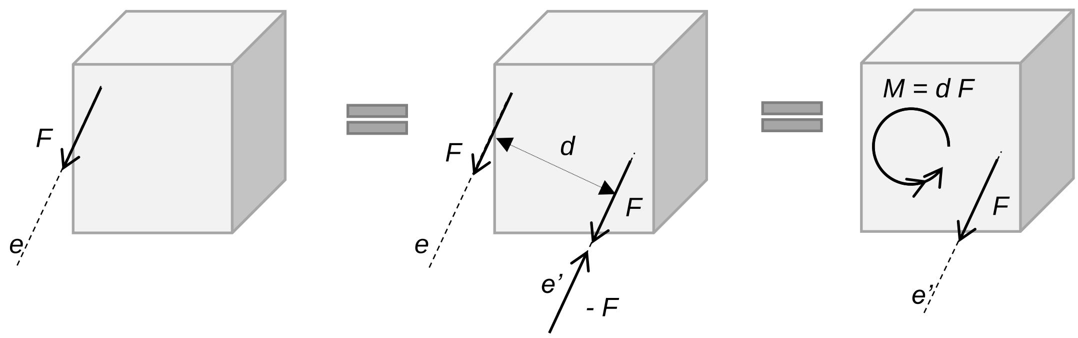

Figura 10. Traslación de una fuerza. Sistemas equivalentes.

Dada una fuerza *F* aplicada sobre un cuerpo rígido con recta de acción *e*. Se desea trasladar la fuerza a la recta *e'* paralela a la primera, separadas una distancia *d*.

Para ello se agrega un sistema nulo formado por dos fuerzas paralelas y colineales de intensidad igual a *F* sobre la recta de acción *e'*, que no modifica el efecto sobre el cuerpo, según reza el 3er Principio.

[7] Bajo la hipótesis de cuerpo rígido, el efecto de una fuerza no cambia si se modifica su punto de aplicación. Si cambia la recta de acción entonces aparece el momento de traslación.

El par de fuerzas *F* sobre la recta *e* y *–F* sobre la recta *e'*, forman una cupla de momento *M = d F*, cuya resultante es nula. Por lo tanto el primer sistema es equivalente a otro con una fuerza *F* sobre la recta *e'* más un momento *M = d F.*

Invariantes en los sistemas de fuerzas

Invariante vectorial

Si cambia el centro de reducción, la resultante de reducción no varía, pero sí el par de reducción.

INVARIANTE VECTORIAL: $I_V = \vec{R} = \left(R_x, R_y, R_x\right)$ (Eq 20)

Invariante escalar

La proyección del momento de reducción sobre la línea de acción de la resultante de reducción es un invariante escalar, no cambia aunque cambie el punto de reducción.

INVARIANTE ESCALAR: $I_E = M_R^* = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} \cdot \overrightarrow{M_R}$ (Eq 21)

Conclusiones

Resultante

Todo sistema de fuerzas en el plano o en el espacio se puede reducir a una fuerza y un par.

En el caso general, el sistema de fuerzas y momentos que actúa sobre un cuerpo se reducirá a una sola fuerza *R* y un momento *M* que no serán perpendiculares entre sí. Pero el vector momento se puede descomponer en una componente perpendicular a la fuerza y otra componente paralela. La componente perpendicular puede ser eliminada trasladando la fuerza.

Caso particular: única fuerza resultante

Si las fuerzas son concurrentes, puede ser reducido a una sola fuerza resultante.

Si el sistema de fuerzas y momentos que actúan sobre un cuerpo rígido se reduce en el punto *O* a una fuerza resultante *R* y a un momento resultante *M* que resultan perpendiculares entre sí, siempre puede trasladarse la fuerza a otro punto *P* de manera que el par resultante sea nulo.

Ejemplo de esto son las fuerzas coplanares y los sistemas de fuerzas paralelas.

Equilibrio

Para que un sistema se encuentre en equilibrio la resultante debe ser igual al vector nulo. Eso implica que todas sus componentes deben ser nulas y su polígono de fuerzas cerrado.

Para cuerpo sometido a un sistema de fuerzas en equilibrio de resultante *R*, debe existir una fuerza igual y contraria que llamaremos equilibrante *E* materializada por los vínculos.

Sistemas de fuerzas equivalentes

Dos sistemas de fuerzas que actúan sobre un mismo cuerpo rígido son equivalentes si pueden ser reducidos al mismo sistema fuerza-par en un punto dado *O*.

ANEXOS

Cosenos directores

En la operación entre vectores posición, fuerza y momento, es útil la descomposición según una terna cartesiana conveniente, de modo de poder realizar operaciones eje por eje.

Para ello debe poder representarse el vector en términos de módulo y versor para conocer cada una de sus componentes.

Descomposición de un vector en el plano

Dada una fuerza $\vec{F}$, de módulo $|\vec{F}|$ y recta de acción pasante por dos puntos conocidos *A* y *B*. La fuerza *F* según la terna coordenada *x, y,* tiene como componentes F_x y F_y.

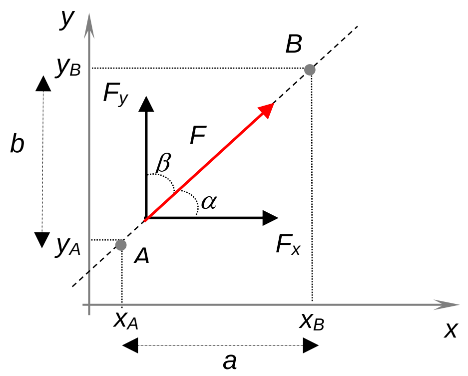

Figura 11. Cosenos directores en el plano

Las componentes pueden expresar en términos de los ángulos α y β como:

$$\vec{F} = (F_x; F_y) = |\vec{F}| \cdot (cos(\alpha); cos(\beta)) \qquad \text{(Eq 22)}$$

Pero si lo que conocemos es la ubicación de los puntos *A* y *B* según los ejes *x* e *y*:

La distancia entre *A* y *B* sobre el eje *x*: $a = x_B - x_A$

La distancia entre *A* y *B* sobre el eje *y*: $b = y_B - y_A$

Y la distancia absoluta entre *A* y *B*, por Pitágoras: $\sqrt[2]{a^2 + b^2}$

Podemos calcular los cosenos directores:

$$cos(\alpha) = \frac{a}{\sqrt[2]{a^2 + b^2}}$$
$$cos(\beta) = \frac{b}{\sqrt[2]{a^2 + b^2}} \qquad \text{(Eq 23)}$$

Entonces las componentes de la fuerza se pueden expresar:

$$F_x = |\vec{F}| \cdot \frac{a}{\sqrt[2]{a^2 + b^2}}$$
$$F_y = |\vec{F}| \cdot \frac{b}{\sqrt[2]{a^2 + b^2}} \qquad \text{(Eq 24)}$$

Descomposición de un vector en el espacio

De forma análoga que en el plano, es posible conocer las componentes de un vector espacial si se conoce la ubicación de dos puntos de su recta de acción y su módulo.

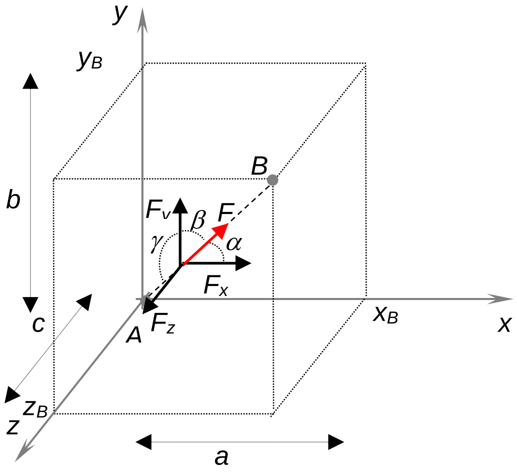

Figura 12. Cosenos directores en el espacio

Dada una fuerza espacial $\vec{F}$, de módulo $|\vec{F}|$ y recta de acción pasante por dos puntos conocidos *A* y *B*[8]. La fuerza *F* según la terna coordenada *x, y, z* tiene como componentes F_x, F_y, F_z.

$$\vec{F} = (F_x; F_y; F_z) = |\vec{F}| \cdot (cos(\alpha); cos(\beta); cos(\gamma)) \qquad \text{(Eq 25)}$$

Pero si lo que conocemos es la ubicación de los puntos *A* y *B* según los ejes *x* e *y*:

La distancia entre *A* y *B* sobre el eje *x*: $a = x_B - x_A$

La distancia entre *A* y *B* sobre el eje *y*: $b = y_B - y_A$

La distancia entre *A* y *B* sobre el eje *z*: $c = z_B - z_A$

Aplicando Pitágoras en 3D, la distancia absoluta entre *A* y *B*: $\sqrt[2]{a^2 + b^2 + c^2}$

Entonces las componentes de la fuerza se pueden expresar:

$$F_x = |\vec{F}| \cdot \frac{a}{\sqrt[2]{a^2 + b^2 + c^2}}$$
$$F_y = |\vec{F}| \cdot \frac{b}{\sqrt[2]{a^2 + b^2 + c^2}} \qquad \text{(Eq 26)}$$
$$F_z = |\vec{F}| \cdot \frac{c}{\sqrt[2]{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Un procedimiento análogo se puede utilizar para calcular las componentes de vectores momento o posición.

---

[8] Por simplicidad, en el esquema de análisis el punto A es coincidente con el origen de coordenadas.

Momento de una fuerza en el espacio

Dada una fuerza espacial *F*, contenida en un espacio cartesiano *x, y, z,* de componentes F_x, F_y, F_z, pasante por el punto A, definido por las coordenadas x_A, y_A, z_A; cuya recta de acción no pasa por el origen de coordenadas.

Se desea calcular el momento que genera la fuerza *F* respecto del punto *O* (origen).

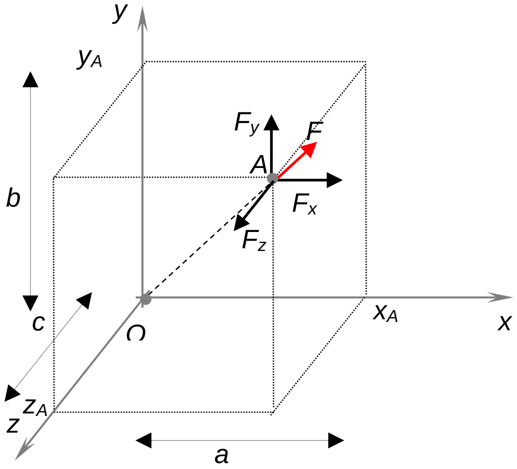

Figura 13. Momento de una fuerza en el espacio

<u>Producto vectorial</u>

Utilizaremos la ecuación Eq 11, $\overrightarrow{M_{\vec{F}}^{O}} = \vec{d} \times \vec{F}$, para lo cual debemos determinar el vector posición *d* y el vector fuerza *F.*

El vector posición *d* se define como la distancia desde el punto de origen de momentos *O* a un punto cualquiera de la recta de acción de la fuerza, por ejemplo el punto *A*. Se calcula punto final menos inicial.

$$\vec{d} = \left(\vec{A} - \vec{O}\right) = (a, b, c) - (0,0,0) = (a, b, c)$$

Y la fuerza:

$$\vec{F} = \left(F_x, F_y, F_z\right)$$

Según la Eq 12, el desarrollo del producto vectorial es:

$$\begin{bmatrix} \check{\imath} & \check{\jmath} & \check{k} \\ d_x & d_y & d_z \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \check{\imath} & \check{\jmath} & \check{k} \\ a & b & c \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}$$

Componente por componente:

$$\begin{cases} M_x = b \cdot F_z - c \cdot F_y \\ M_y = c \cdot F_x - a \cdot F_z \\ M_z = a \cdot F_y - b \cdot F_x \end{cases} \qquad \text{(Eq 27)}$$

Componente a componente

Veamos componente a componente. Esto es, los momentos del sistema de fuerzas *Fx, Fy, Fz* realizan respecto de cada eje por separado.

Para ello vamos a posicionar el pulgar paralelo al eje de análisis y vamos a identificar hacia qué lado tiende a girar la fuerza. Si vemos que los dedos se oponen al giro de la fuerza, entonces debemos girar la mano y orientar el pulgar en el sentido contrario al inicial.

En torno del eje x:	F_x	No es capaz de realizar momentos porque es paralela al eje	0
	F_y	Tiende a girar en torno al eje x con brazo *c*, negativo según terna derecha	$-c \cdot F_y$
	F_z	Tiende a girar con brazo *b*, giro positivo según terna derecha	$b \cdot F_z$
En torno del eje y:	F_x	Tiende a girar positivo con brazo *c*	$c \cdot F_x$
	F_y	No realiza momentos, es paralela al eje	0
	F_z	Tiende a girar negativo con brazo *a*	$-a \cdot F_z$
En torno del eje z:	F_x	Tiende a giro negativo, brazo *b*	$-b \cdot F_x$
	F_y	Tiende a giro positivo, con brazo *a*	$a \cdot F_y$
	F_z	No realiza momentos, es paralela al eje	0

Tabla 1. Momentos respecto de un punto componente a componente

El resultado es el mismo que el anterior. Con este método se tiene mayor comprensión del fenómeno físico que está sucediendo.