Departamento de Estabilidad

84.02/64.01 ESTABILIDAD I

RETICULADOS

Ing. Carolina Pérez Taboada[1]

[1] JTP del Dto. de Estabilidad, Facultad de Ingeniería, UBA

Índice de contenidos

Fuentes de consulta

El presente apunte se ha confeccionado en base a la bibliografía que se detalla a continuación. Para mayor profundidad o detalles, ejercicios resueltos y ejercicios propuestos, favor de recurrir a las fuentes.

- R. C. Hibbeler (2004) *Mecánica vectorial para ingenieros - Estática*, México, Pearson Educación, pag. 257
- E. D. Fliess (1970) *Estabilidad – 1º curso*, Enrique D. Fliess, Buenos Aires, Argentina, Editorial Kapeluz, página 337
- Rusell, pag. 286
- Pico, Peralta, Ciancio, Montanaro (2013) *Estática*, Tandil, Buenos Aires, Argentina, UNICEN, pag. 177

Reticulados

Objetivos

Los objetivos del presente documento son que el estudiante:

- Logre identificar las ventajas y desventajas de las estructuras reticuladas frente a las de alma llena
- Pueda calcular los valores de esfuerzo de tracción y compresión en las barras de reticulado
- Sepa discernir qué método de cálculo es adecuado en cada caso.
- Pueda identificar las barras nulas

Estructuras reticuladas

Existen un tipo de estructuras de barras que son de particular interés, ya que presentan algunas características que pueden resultar ventajosas en ciertos casos.

Se llaman **estructuras reticuladas** [2] a aquellas formadas por triángulos de bielas. Esta idealización implica la consideración de una serie de hipótesis simplificativas.

Se recuerda el concepto de biela anteriormente estudiado: se le llama biela a una barra de eje recto con sus dos extremos articulados, que no presente cargas en su tramo, es decir que las cargas a las que se encuentre sometido y los vínculos se apliquen en los extremos.

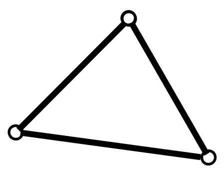
Condiciones geométricas	Condiciones de cargas
• Formado por bielas • Articulaciones perfectas en los extremos (sin fricción) • Conformando triángulos rígidos	• Cargas y vínculos solamente en los extremos (puntuales) • Se desprecia el peso propio frente a las cargas

Tabla 1. Reticulado Ideal

Análisis cinemático y generación de reticulados planos

Se ha visto en el análisis de cadenas cerradas de cuerpos en el plano que la cantidad de grados de libertad de una cadena cerrada es igual a la cantidad de cuerpos. Se parte de un triángulo formado por bielas. La cantidad de barras *b* y de nodos *n* es igual a 3, e igual a la cantidad de grados de libertad de un solo cuerpo en el plano definido por el triángulo.

Puede considerarse al triángulo como un único cuerpo, en términos de su comportamiento cinemático.



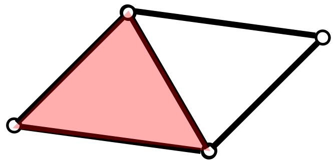
$b = 3 \qquad n = 3$

$GL = 3$

Figura 1. Unidad básica del reticulado: triángulo, con 3 grados de libertad en el plano

Si se unen a dos vértices del triángulo un par de bielas en cada uno y se las une entre sí por su extremo libre, entonces se estará formando otra cadena cerrada donde podría considerarse al triángulo original como uno de los cuerpos, no modificándose la cantidad total de grados de libertad del conjunto. A las 3 barras originales se le agregan 2 y a los 3 nodos originales se agrega uno.

[2] En la bibliografía en castellano no hay gran consenso en el nombre que se le da a este tipo de estructuras. Se pueden encontrar bajo el nombre de estructuras *de alma calada*, en contraposición a las de alma llena; estructuras *articuladas*, llamando a los pórticos estructuras reticuladas; o *armaduras*. En inglés las llaman *truss.*

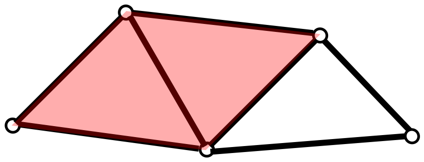


$$b = 3 + 2 = 5 \qquad n = 3 + 1 = 4$$

$$GL = 3$$

Figura 2. Si se agrega un par de barras unidas se sigue comportando como un solo cuerpo

Se puede continuar este análisis indefinidamente en cualquier dirección y con cualquier dimensión de bielas, de modo que toda estructura formada por triángulos a la que se le agregan dos bielas unidas, tiene la misma cantidad de grados de libertad que un solo cuerpo[3].



$$b = 3 + 2 \cdot x \qquad n = 3 + x$$

$$GL = 3$$

Figura 3. Se agregan dos barras *b* y un nodo *n*, *x* veces

Reemplazando el valor de *x* se puede encontrar la relación entre la cantidad de barras y de nodos para un reticulado simple en el plano:

$$x = n - 3$$

$$b = 3 + 2\,(n - 3)$$

$$b = 2\,n - 3 \qquad \text{(Eq 1)}$$

Características

Las bielas pueden solamente presentar esfuerzos paralelos a su eje, lo cual es una gran ventaja para su resolución: debe calcularse solamente el valor del esfuerzo normal y su signo, no hay corte ni momento. Además, ésta característica implica una economía del material, ya que sus piezas deben estar diseñadas para soportar un solo tipo de esfuerzo.

Figura 4. Solicitaciones posibles de una biela

Por otro lado, al comportarse como un solo cuerpo, un reticulado plano queda fijo con una configuración de vínculo que restrinja 3 direcciones independientes, por ejemplo simplemente apoyado, lo que permite salvar grandes luces con estructuras relativamente livianas.

De acuerdo con estas características, resulta natural que las estructuras que puedan ser modeladas como reticulados se ejecuten en acero o madera, ya que por un lado estos materiales pueden fácilmente soportar esfuerzos longitudinales y por otro las uniones entre sus piezas se asimilan más la modelo de articulación que al de empotramiento, al contrario de lo que sucede con estructuras de hormigón.

Puede tratarse de estructuras planas, cuando tanto la estructura de barras como sus cargas tengan la simetría tal que pueda modelarse contenida en un plano. Este es el caso de las cerchas

[3] Podrían darse casos de estructuras rígidas de bielas en los que no se forman triángulos, pero se comportan cinemáticamente como un solo cuerpo. Ver ejemplo en Anexos.

para la cubierta de un galpón, o las vigas de los puentes[4]. También pueden ser estructuras espaciales, como las torres que sostienen cables de alta tensión o los domos.

También pueden generarse reticulados a partir de unir dos reticulados simples, como es el caso de la Cercha Fink mostrada en Anexos. En estos casos la resolución es similar a la de los reticulados simples.

Métodos de resolución

Las estructuras de reticulado poseen como incógnitas la solicitación en sus barras y las RVE. Si *b* es la cantidad de barras, la cantidad de incógnitas para un reticulado plano es:

$$b + 3 \qquad \text{(Eq 2)}$$

Para determinar las RVE no es necesario conocer los valores de solicitación de las barras, se obtiene de plantear las 3 ecuaciones de equilibrio global.

Para calcular las solicitaciones en las barras se presentan dos métodos de resolución: un método puramente analítico, llamado método de los nudos, y un método gráfico numérico, llamado método de las secciones o de Ritter. En la siguiente tabla se presentan las ventajas y desventajas de cada uno de los métodos:

	Método de los nudos (analítico)	Método de las secciones (gráfico analítico)
Ventajas	• Programable • Permite resolución matricial	• Se puede calcular una pieza en particular, sin necesidad de calcular los otros miembros
Desventajas	• La resolución total se obtiene de ecuaciones anidadas. Es susceptible de arrastrar error	• No es fácilmente programable • No puede usarse en todos los casos

Tabla 2. Métodos de resolución de reticulados

Ambos método de resolución se basan el principio de que si la estructura se encuentra en equilibrio, entonces cada una de sus partes también deben estar en equilibrio. Difiere cuáles son las partes que se separan.

Método de los nudos

El procedimiento consiste en aislar cada uno de los nudos, colocando una fuerza en la dirección de cada barra y plantear el equilibrio de del sistema concurrente de fuerzas. Las ecuaciones de equilibrio disponibles son las dos de proyección de fuerzas para cada nudo.

Como incógnitas se tiene por un lado la tensión en cada barra *b* y por el otro las 3 RVE. Dada la relación entre barras y nodos expuesta en la ecuación Eq. 1, y teniendo en cuenta que se disponen de dos ecuaciones por nudo, entonces el sistema se encuentra estáticamente definido. Esto es:

Cantidad de incógnitas: $b + 3 = 2\,n - 3 + 3 = 2n$

Cantidad de ecuaciones: $2\,n$

Se muestra el método con el siguiente ejemplo simple:

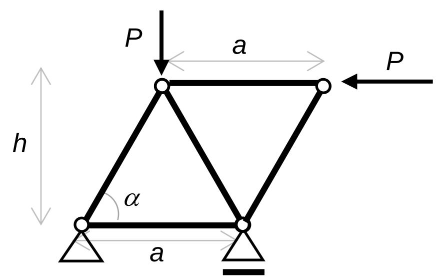


Figura 5. Ejemplo de cálculo de estructura reticulada

[4] En Anexos se muestran esquemas de las configuraciones más conocidas para vigas y cerchas.

Es común numerar los nudos e identificar el esfuerzo en las barras con una letra mayúscula y utilizando como subíndices los dos nudos que lleva la barra en sus extremos[5]. Otra práctica habitual es asumir que todas las barras se encuentran traccionadas, así se obtiene un resultado negativo para barras comprimidas, según la convención.

Notar que si la barra está traccionada, al aislar el nudo en el lugar de la barra debe colocarse una fuerza que tracciona al nudo en la dirección de la barra. En cambio si la barra está comprimida, entonces el nudo también la barra estará presionando en esa dirección.

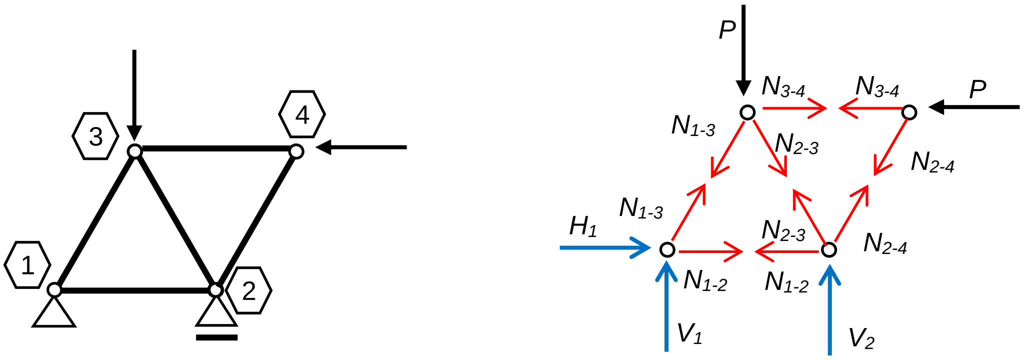
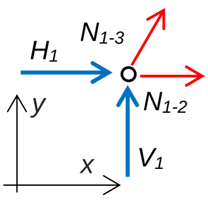


Figura 6. Ejemplo de resolución por el método de los nudos

Para este ejemplo la cantidad de incógnitas es 8, las 5 barras del reticulado y las 3 RVE. La cantidad de nudos es 4, por lo tanto la cantidad de ecuaciones de equilibrio de fuerzas concurrentes es 8. El planteo del equilibrio de cada nudo puede realizarse en su propia terna local, no es necesario que se utilice la misma terna en todos los casos. Esto es:

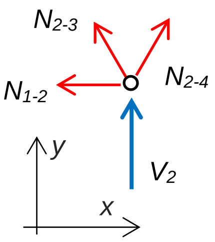
Nudo 1:



$$\sum F_x = 0 = H_1 + N_{1-3} \cdot \cos(\alpha) + N_{1-2} \quad \text{(Eq 3)}$$

$$\sum F_y = 0 = V_1 + N_{1-3} \cdot \sin(\alpha) \quad \text{(Eq 4)}$$

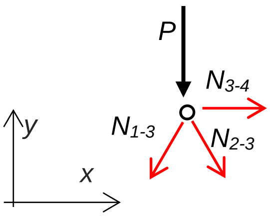
Nudo 2:



$$\sum F_x = 0 = -N_{1-2} - N_{2-3} \cdot \cos(\alpha) + N_{2-4} \cdot \cos(\alpha) \quad \text{(Eq 5)}$$

$$\sum F_y = 0 = V_2 + N_{2-3} \cdot \sin(\alpha) + N_{2-4} \cdot \sin(\alpha) \quad \text{(Eq 6)}$$

Nudo 3:

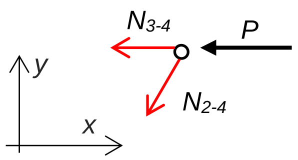


$$\sum F_x = 0 = -N_{1-3} \cdot \cos(\alpha) + N_{2-3} \cdot \cos(\alpha) + N_{3-4} \quad \text{(Eq 7)}$$

$$\sum F_y = 0 = -P - N_{1-3} \cdot \sin(\alpha) - N_{2-3} \cdot \sin(\alpha) \quad \text{(Eq 8)}$$

[5] Notar que con esta nomenclatura el orden de los subíndices no tiene importancia.

Nudo 4:



$$\sum F_x = 0 = -N_{3-4} - P \qquad \text{(Eq 9)}$$

$$\sum F_y = 0 = N_{2-4} \cdot \sin(\alpha) \qquad \text{(Eq 10)}$$

Se puede ver que si se tuviera que resolver el ejercicio sin la ayuda de herramientas que faciliten la resolución de sistemas de ecuaciones, se debería haber partido del nudo 4, que deja desacopladas dos incógnitas. Con los resultados se puede continuar con el nudo 3, de cuya resolución se obtienen los datos para continuar con los otros nudos y así resolver las 8 incógnitas.

<u>Resolución matricial</u>

Si se platea el equilibrio de cada uno de los nudos para cualquier reticulado plano ideal, el sistema de ecuaciones a resolver es un sistema de 2 *n* x 2 *n*, siendo *n* la cantidad de nudos del reticulado.

Se puede organizar este sistema de ecuaciones de forma de reunir los datos geométricos en una matriz ***G***, los datos de cargas en otra matriz ***P*** y por último las incógnitas en matriz ***S***, de modo que pueda resolverse el sistema de ecuaciones mediante la operatoria de matrices. Esto es:

$$\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{S} + \boldsymbol{P} = \boldsymbol{0} \qquad \text{(Eq 11)}$$

Para ello es necesario elegir arbitrariamente un orden para las incógnitas, que será el orden de las columnas de la matriz geométrica y, en una fila por ecuación, los términos que afectan a cada incógnita. Para el ejemplo presentado anteriormente esto es:

	N_{1-2}	N_{1-3}	N_{2-3}	N_{3-4}	N_{2-4}	H_1	V_1	V_2		**P**		
Nudo 1 x	*1*	*cos(α)*	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*		*0*		*0*
Nudo 1 y	*0*	*sin(α)*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*		*0*		*0*
Nudo 2 x	*-1*	*0*	*-cos(α)*	*0*	*cos(α)*	*0*	*0*	*0*		*0*		*0*
Nudo 2 y	*0*	*0*	*sin(α)*	*0*	*sin(α)*	*0*	*0*	*1*	+	*0*	=	*0*
Nudo 3 x	*0*	*-cos(α)*	*cos(α)*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*		*0*		*0*
Nudo 3 y	*0*	*-sin(α)*	*-sin(α)*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*		*-P*		*0*
Nudo 4 x	*0*	*0*	*0*	*-1*	*0*	*0*	*0*	*0*		*-P*		*0*
Nudo 4 y	*0*	*0*	*0*	*0*	*sin(α)*	*0*	*0*	*0*		*0*		*0*

Siendo las matrices:

Matriz geométrica	Matriz de incógnitas	Matriz de cagas
G	***S***	***P***

$$\begin{array}{l} nudo\ 1\ x \\ nudo\ 1\ y \\ nudo\ 2\ x \\ nudo\ 2\ y \\ nudo\ 3\ x \\ nudo\ 3\ y \\ nudo\ 4\ x \\ nudo\ 4\ y \end{array}
\begin{pmatrix}
1 & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 0 & -\cos(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sin(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 1 \\
0 & -\cos(\alpha) & \cos(\alpha) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\sin(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\qquad
S = \begin{pmatrix} N_{1-2} \\ N_{1-3} \\ N_{2-3} \\ N_{3-4} \\ N_{2-4} \\ H_1 \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}
\qquad
P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \\ -P \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nótese que la matriz geométrica expone los cosenos directores de las incógnitas, de manera que podría buscarse la programación de esta matriz, utilizando como datos de entrada la posición inicial y final de cada barra.

En este caso la resolución del problema reside en la operatoria entre matrices, según:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{G}^{-1} \cdot (-\boldsymbol{P}) \qquad \text{(Eq 12)}$$

Método de las secciones o de Ritter

Para calcular la solicitación en las barras se parte del DCE, con las RVE evidenciadas en lugar de los vínculos.

Este método también parte de la premisa de que si el todo está en equilibrio, también las partes lo estarán. Sin embargo, en este caso se divide la pieza total en dos partes mediante una sección que afecte a 3 barras como máximo. Para una sola de las partes a la vez, se plantean 3 ecuaciones de equilibrio parcial, obteniendo como resultado el valor de la solicitación en las barras seccionadas.

La ventaja de esta metodología reside en elegir como ecuación de equilibrio la que iguala a cero los momentos con centro en el punto de intersección de dos de las tres incógnitas, de modo que cada barra es resuelta sin necesidad de hacer cálculos intermedios. Además, para una estructura con numerosas barras y nudos, permite resolver solamente la barra que interesa en particular.

Como desventaja se puede mencionar que si por la geometría no es posible realizar una sección por 3 barras, entonces no puede utilizarse. Por otro lado tampoco es de simple programación, por ser un método grafo-numérico.

Para el ejemplo presentado anteriormente, una sección posible es la que se muestra en la figura:

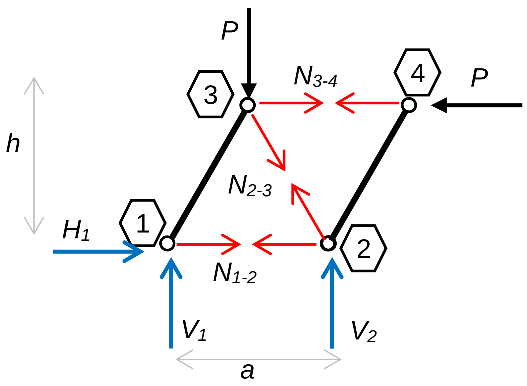


Figura 7. Método de las secciones

Donde las ecuaciones a plantear son:

Para hallar N_{1-2}:

(centro de momentos donde se intersectan las otras dos incógnitas)

$$\sum M^3 = 0 = -h \cdot N_{3-4} + \frac{a}{2} \cdot V_2 \qquad \text{(Eq 13)}$$

Para hallar N_{3-4}:

(centro de momentos donde se intersectan las otras dos incógnitas)

$$\sum M^2 = 0 = h \cdot P + h \cdot N_{3-4} \qquad \text{(Eq 14)}$$

Para hallar N_{2-3}:

(centro de momentos en el infinito: ecuación de proyección de fuerzas)

$$\sum F_y = 0 = V_2 + \sin(\alpha) \cdot N_{3-4} \qquad \text{(Eq 15)}$$

Notar que se puede considerar el equilibrio de una u otra parte indistintamente. Tampoco es necesario que el centro de momentos se encuentre en la sección para la cual se plantea el equilibrio. La terna local para referirse a las incógnitas puede cambiar para cada ecuación.

Análisis de barras inactivas

Previo a realizar cualquier cálculo, es importante analizar, frente al estado de cargas al que está sometido el reticulado, si hay barras que poseen esfuerzo nulo. De esta manera, se puede simplificar la resolución del reticulado eliminando las barras inactivas para el estado de cargas en análisis.

Este análisis se apoya en el equilibrio de fuerzas concurrentes en el plano.

Se tienen barras inactivas cuando:

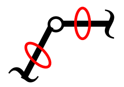
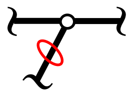
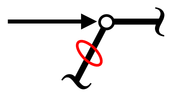
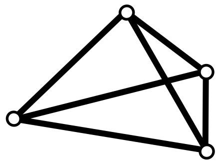
	Concurren a un nudo dos barras que de diferente dirección y no hay una carga aplicada en el nudo. Ambas barras son inactivas.
	Concurren a un nudo 3 barras, donde dos son colineales y no existen cargas sobre el nudo. En este caso la barra que no comparte la misma dirección que las otras dos es inactiva.
	Concurren a un nudo dos barras no colineales y existe una fuerza aplicada en la dirección de una de las barras. En este caso la barra que no comparte dirección con la fuerza es inactiva.

Tabla 3. Casos de barras inactivas

Si bien estas barras pueden no estar expuestas a la acción de alguna fuerza para el estado de cargas que se analiza, esta situación puede modificarse para otro estado de cargas. Por otra parte algunas barras cumplen la función de soportar cargas que se despreciaron, como el peso propio, o bien para que la estructura mantenga la forma. Por último también pueden existir las barras que cumplen la función de rompetramos[6] en miembros a compresión.

Reticulados espaciales

En el espacio un cuerpo posee 6 grados de libertad. El elemento básico de un reticulado en el espacio es un tetraedro en el que sus cuatro caras son triángulos. El tetraedro básico tiene 6 barras y 4 nudos, y posee las posibilidades de movimiento de un único cuerpo. Para

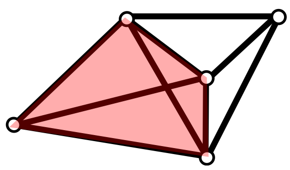


$b = 6 \qquad n = 4$

$GL = 6$

Figura 8. Unidad básica del reticulado espacial: tetraedro, con 6 grados de libertad.

Si se le agregan en cualquier sentido, desde diferentes nodos existentes, 3 bielas unidas entre sí en su extremo libre, el comportamiento cinemático del conjunto no se modifica.



$b = 6 + 3\,x \qquad n = 4 + x$

$GL = 6$

[6] En piezas sometidas a compresión podría desarrollarse el fenómeno de inestabilidad del equilibrio conocido como pandeo, antes de que pueda superar su capacidad portante. Como la ocurrencia de este fenómeno es proporcional a la distancia entre vínculos, se puede colocar una barra con la sola función de limitar su longitud.

Figura 9. Unidad básica del reticulado espacial: tetraedro, con 6 grados de libertad.

Extendiendo este análisis a *x* cantidad de veces, y reemplazando el valor de *x*, se llega a la relación existente entre la cantidad de barras y de nudos:

$$x = n - 4$$

$$b = 6 + 3\,(n - 4)$$

$$b = 3\,n - 6 \qquad \text{(Eq 16)}$$

La cantidad de incógnitas es igual a la cantidad de barras más las RVE.

Las ecuaciones de las que se dispone son las ecuaciones de equilibrio global y las ecuaciones de equilibrio de cada uno de los nudos. En el espacio, las ecuaciones de equilibrio de un sistema de fuerzas concurrentes son las 3 de proyección. Con esto queda el sistema definido.

Reticulados no ideales

De todas las hipótesis simplificativas impuestas, se plantea el alejamiento de la que se refiere a la distribución y ubicación de las cargas. Para ello se utilizará la superposición de efectos. Esto es:

Dada una estructura reticulada sometida a la acción de cargas distribuidas según la figura:

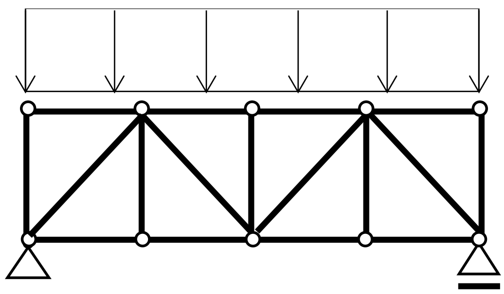


Figura 10. Reticulado no ideal

En este caso el cordón superior no cumple con la hipótesis de cargas en los nudos.

Para poder resolver la estructura por los métodos conocidos, se asume válido el Principio de Superposición de Efectos (PSE), a partir del cual, para cualquier barra del cordón superior es válida la siguiente igualdad:

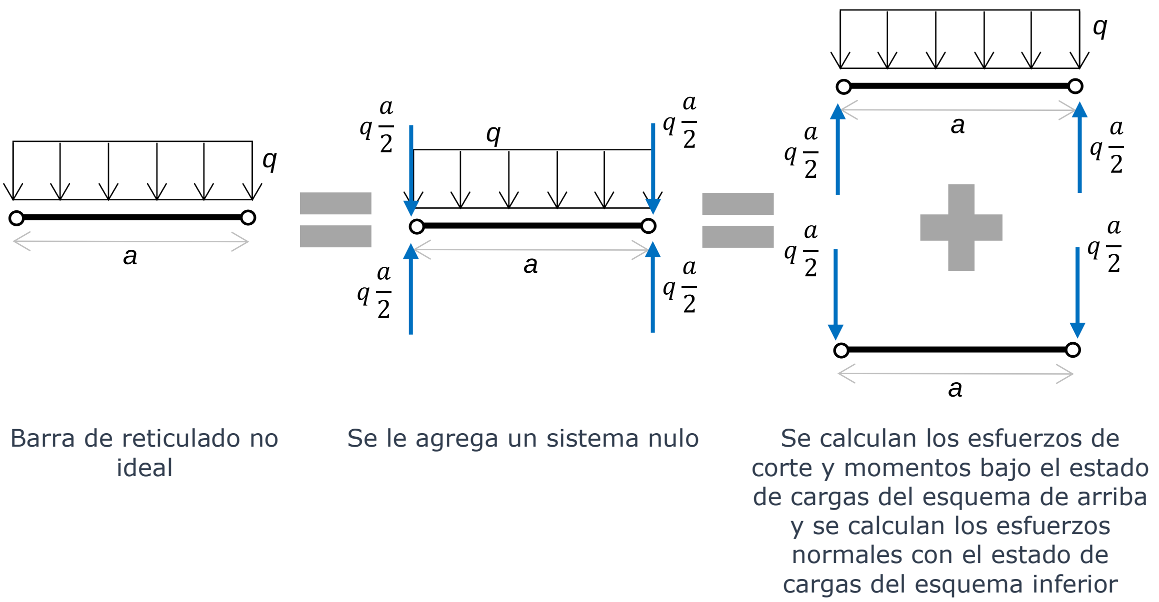


Figura 11. Tratamiento para reticulados no ideales

Utilizando el principio de superposición de efectos, se separan las cargas sobre la estructura según las solicitaciones que produzcan en las barras. La solicitación final será la resultante de sumar los efectos de ambos estados de cargas. Para calcular el reticulado se estudia a toda la pieza con las fuerzas que se encontraban en el tramo concentradas en sus extremos. Para el cálculo de corte y momento es suficiente con considerar los efectos entre articulaciones.

Estructuras Mixtas

Por lo general las estructuras reticuladas deben estudiarse como parte de un pórtico. En estos casos, la parte de la estructura reticulada se estudia como un cuerpo más de la cadena. Para determinar la solicitación en cada una de sus barras es suficiente con aislar el reticulado del resto de la estructura y aplicar el método más conveniente de resolución.

Anexos

La generación simple de reticulados se realiza a partir de triángulos a los que se les acoplan dos bielas unidas. Sin embargo existen geometrías que son reticulados pero que no forman estrictamente triángulos, como el caso que se presenta a continuación:

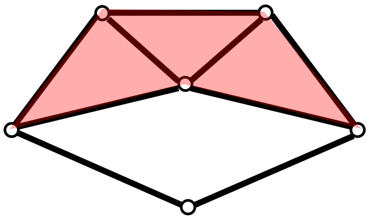


Figura 12. Caso de un reticulado no formado solamente por triángulos

Configuraciones típicas

Existen ciertas configuraciones geométricas de reticulados planos que son muy utilizadas en cerchas de cubiertas a dos aguas, como vigas de puentes o para otros usos.

Aquí los casos más conocidos:

Vigas

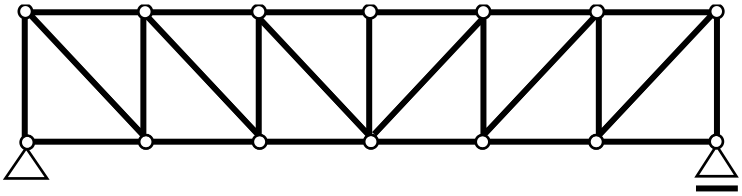


Figura 13. Viga Pratt

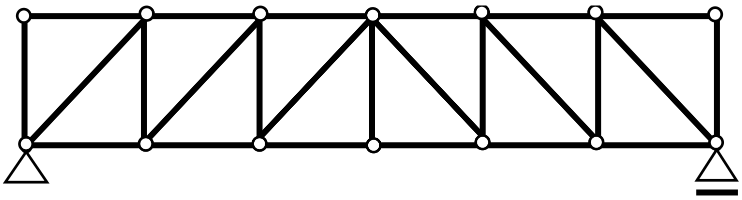


Figura 14. Viga Howe

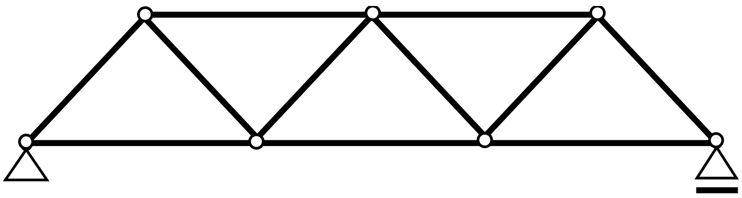


Figura 15. Viga Warren

Cerchas

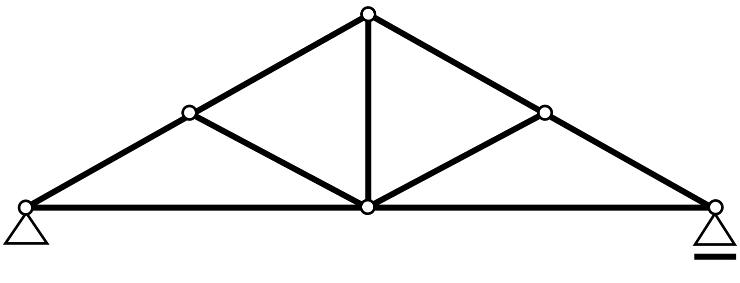


Figura 16. Cercha King Post

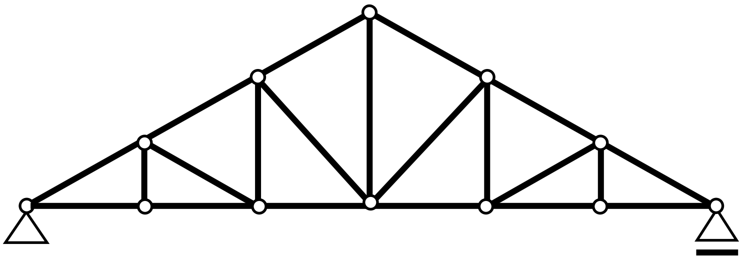
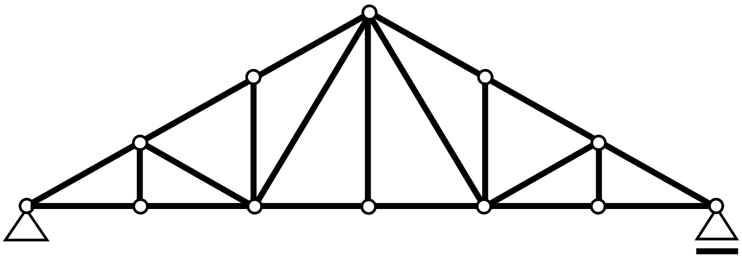


Figura 17. Cercha Pratt



Cercha Howe

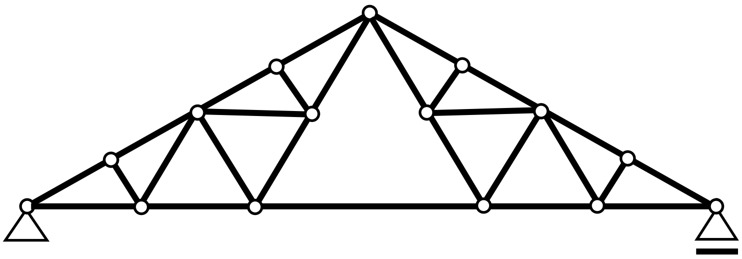


Figura 18. Cercha Fink o francesa doble