2. Sistemas de Fuerzas Generalizadas

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- **Conceptos de fuerza y momento:** Identificar los conceptos de fuerzas y de momentos, como también su representación y su aplicación sobre las estructuras.
- **Principios de la Estática y Teorema de Varignon:** Conocer los cuatro principios de la estática y el teorema de Varignon para lograr operar con sistemas de fuerzas y momentos.
- **Reducción, despomposición y traslación:** Realizar operaciones de reducción, descomposición y traslación de fuerzas y momentos en el plano y en el espacio.

2.1 Vectores

Un **vector** es una cantidad que tiene magnitud, dirección y sentido. En la **Estática** las cantidades vectoriales que se van a manejar con frecuencia son **posición**, **fuerza** y **momento**.

Los vectores quedan definidos por su intensidad, su recta de acción y su sentido. Para definir una recta es suficiente con conocer dos puntos pertenecientes a la misma. De este modo, dado un sistema cartesiano, cualquier vector puede definirse mediante su intensidad, que es una magnitud escalar, y la ubicación de dos puntos de su recta de acción.

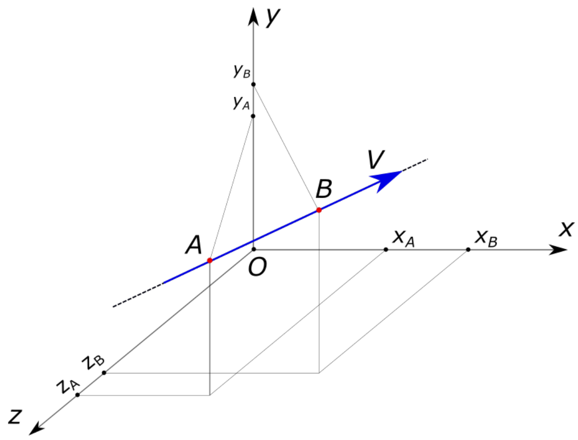


Figura 2.1.1: *Vector definido por su intensidad y por dos puntos de su recta de acción*

Clasificación de vectores

- **Fijo o aplicado:** actúa en un punto fijo del espacio
- **Deslizante o axil:** puede aplicarse en cualquier punto a lo largo de su recta de acción
- **Libre:** puede actuar en cualquier lugar del espacio; solamente es necesario que conserve su magnitud y dirección

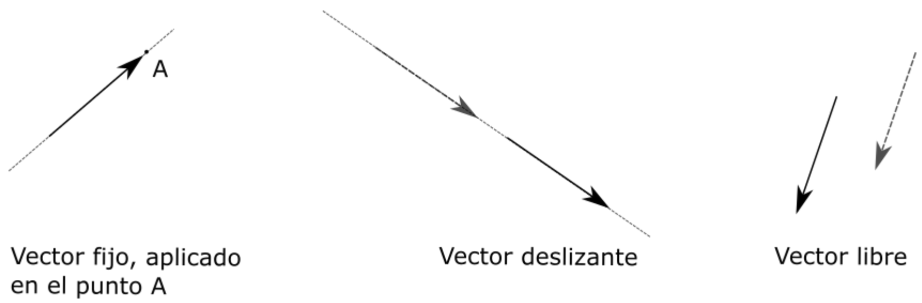


Figura 2.1.2: *Clases de vectores*

2.2 Fuerzas

Los cuerpos se encuentran sometidos a acciones exteriores y de masa. Estas acciones se modelan mediante el concepto de fuerza.

Definición 2.2.1 — Fuerza. Es toda acción capaz de modificar el estado de reposo o movimiento uniformemente variable de un cuerpo.

Una fuerza concentrada representa el efecto de una carga que se supone que está actuando en subre punto del cuerpo. Una carga se puede representar como una fuerza concentrada cuando el área sobre la cual es aplicada la carga es muy pequeña en comparación con el tamaño total del cuerpo. Se representa mediante un vector.

2.2.1 Unidades de fuerza

Se utilizará el Newton como unidad de fuerza $F = [N]$.
Los valores usuales de fuerza hacen conveniente la expresión de fuerzas en términos de $[kN]$.

Sin embargo, aunque no sea del todo correcto, en la vida profesional es usual confundir las unidades de fuerza gravitatoria (peso) con las unidades de masa, ya que la carga gravitatoria es la más frecuente. Por esta razón muchas veces se expresan cargas en términos de kg o $toneladas$, o empujes en términos de kg/cm^2, que realidad, se trata de kgf, kilogramos fuerza.

Siendo que el valor de la aceleración de la gravedad en unidades del SI es: $g = 9,81\,m/s^2$, para una masa de $1kg$, la fuerza será:

$$P = mg = 1kg\,9,81\,m/s^2 \tag{2.2.1}$$

En términos prácticos se asumirá la siguiente equivalencia:

$$1kg \simeq 10N \tag{2.2.2}$$

2.2.2 Vectores fuerza

Los vectores fuerza se expresan con una letra mayúscula con una flecha encima, por ejemplo $\vec{F}$.

Gráficamente se representa mediante un segmento de recta con una flecha en uno de los extremos. La recta a la que pertenece el segmento es la *recta de acción*, que indica la dirección de la fuerza. La flecha en el extremo indica el sentido.

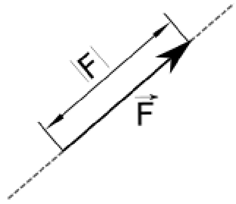


Figura 2.2.1: *Representación gráfica del vector fuerza $\vec{F}$, de magnitud* $|\mathbf{F}|$

En términos vectoriales, una fuerza está caracterizada por su módulo y su versor de módulo unitario, según:

$$\vec{F} = |\mathbf{F}|\,\hat{v} = |\mathbf{F}|\,(v_x; v_y; v_z) = (F_x; F_y; F_z) \tag{2.2.3}$$

Siendo:

$\vec{F}$	el vector fuerza
$\lvert\mathbf{F}\rvert$	el módulo o magnitud
$\hat{v}$	el versor que indica la dirección y sentido de la fuerza
$(v_x; v_y; v_z)$	las componentes del versor en un sistema cartesiano (x, y, z) , también llamadas cosenos directores

En notación vectorial cartesiana:

$$\vec{F} = F_x\,\hat{i} + F_y\,\hat{j} + F_z\,\hat{k} \tag{2.2.4}$$

2.2.3 Sistemas de Fuerzas

Sobre un cuerpo rígido pueden actuar simultáneamente más de una fuerza. Al conjunto de fuerzas se le llama *Sistema de Fuerzas*.

En función de su **recta de acción, sentido e intensidad**, dos o más fuerzas pueden ser:

- **Iguales:** cuando tienen igual intensidad, igual dirección, igual sentido
- **Opuestas:** la misma recta de acción, igual intensidad y sentido contrario
- **Coplanares:** cuando las rectas de acción actúan en el mismo plano
- **Colineales:** cuando tienen la misma recta de acción

En relación únicamente a su **recta de acción**, los sistemas de fuerzas pueden ser:

- **Concurrentes:** Si las rectas de acción se cruzan (concurren) en un punto
- **No concurrentes:** Si las rectas de acción no se cruzan a un punto

Un caso especial de sistemas de fuerzas concurrentes es el de los sistemas paralelos, donde las rectas de acción tienen la misma dirección. Su punto de concurrencia es el punto impropio de la dirección común.

En función de su **distribución en el espacio**, los sistemas de fuerzas se pueden clasificar en:

- Planos: cuando todas las rectas de acción se encuentran contenidas en un mismo plano
- Espaciales: con direcciones cualesquiera

E

COSENOS DIRECTORES

En la operación entre vectores, es útil la descomposición según una terna cartesiana conveniente, de modo de poder realizar operaciones eje por eje.
Para ello debe poder representarse el vector en términos de módulo y versor para conocer cada una de sus componentes.

Descomposición de un vector en el plano

Dada una fuerza espacial $\vec{F}$, de módulo $|\mathbf{F}|$ y recta de acción pasante por dos puntos conocidos A y B. La fuerza F según las coordenadas cartecianas x, y, tiene como componentes F_x y F_y.

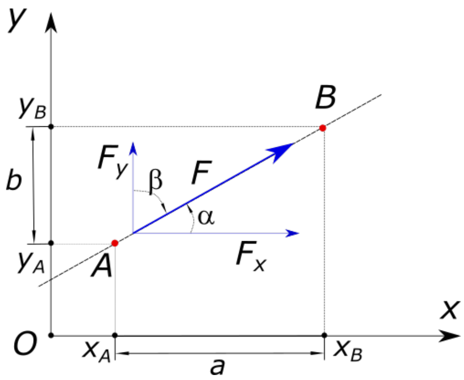


Figura 2.2.2: *Cosenos directores de la fuerza F en el plano cartesiano x y*

Las componentes se pueden expresar en términos de los ángulos α y β como:

$$\vec{F} = (F_x; F_y) = |\mathbf{F}| \cdot (cos(\alpha); cos(\beta)) \tag{2.2.5}$$

Pero si lo que es conocido es la ubicación de los puntos A y B según los ejes x e y:

La distancia entre A y B sobre el eje x: $a = x_B - x_A$
La distancia entre A y B sobre el eje y: $b = y_B - y_A$
Y la distancia absoluta entre A y B, Por Pitágoras: $\sqrt{a^2 + b^2}$

Los cosenos directores se calculan como la razón entre el cateto y la hipotenusa del triángulo equivalente:

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \cos(\beta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{2.2.6}$$

Y las componentes de la fuerza resultan de multiplicar el módulo por el coseno director correspondiente:

$$F_x = |\mathbf{F}| \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad F_y = |\mathbf{F}| \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{2.2.7}$$

Descomposición de un vector en el espacio

De forma análoga que en el plano, es posible conocer las componentes de un vector espacial si se conoce la ubicación de dos puntos de su recta de acción y su módulo.

Dada una fuerza $\vec{F}$, de módulo $|\mathbf{F}|$ y recta de acción pasante por dos puntos conocidos A y B. La fuerza F según la terna coordenada x, y, z tiene como componentes F_x, F_y y F_z.

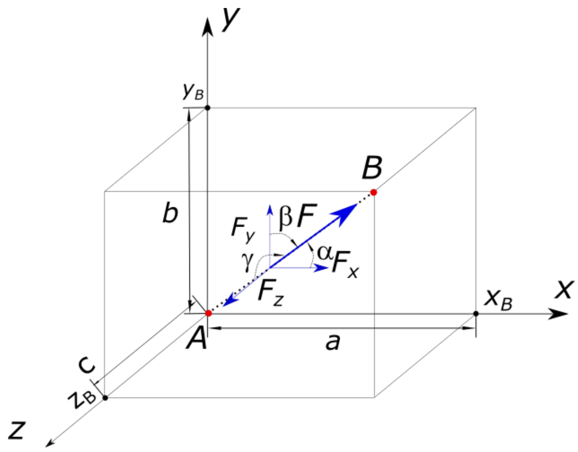


Figura 2.2.3: *Cosenos directores de la fuerza F en el espacio cartesiano x y z*

NOTA: Por simplicidad en el esquema de análisis, el punto A es coincidente con el origen de coordenadas

Las componentes expresadas en términos de los ángulos α, β y γ como:

$$\vec{F} = (F_x; F_y; F_z) = |\mathbf{F}| \cdot (cos(\alpha); cos(\beta); cos(\gamma)) \tag{2.2.8}$$

Si la ubicación de los puntos A y B es conocida:

La distancia entre A y B sobre el eje x: $a = x_B - x_A$
La distancia entre A y B sobre el eje y: $b = y_B - y_A$
La distancia entre A y B sobre el eje z: $c = z_B - z_A$
Y la distancia absoluta entre A y B, Por Pitágoras en el espacio: $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Y las componentes de la fuerza se calculan multiplicando su módulo por los cosenos directores, que se obtienen de dividir el cateto paralelo a la componente sobre la hipotenusa:

$$F_x = |\mathbf{F}| \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad F_y = |\mathbf{F}| \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad F_z = |\mathbf{F}| \cdot \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \tag{2.2.9}$$

El mismo procedimiento se puede utilizar para calcular las componentes de cualquier vector en el espacio, por ejemplo los vectores momento o posición.

2.3 Principios de la Estática

La Estática se encuentra basada en cuatro principios: Principio del Paralelogramo, del Equilibrio, de la Transmisibilidad y el Principio de Acción y Reacción.

2.3.1 1º Principio: del paralelogramo

ENUNCIADO *El efecto de dos fuerzas F_1 y F_2, aplicadas a un mismo punto de un cuerpo rígido es el mismo que el de una única fuerza llamada Resultante, aplicada en el mismo punto y cuya intensidad y dirección quedan definidas por la diagonal del paralelogramo que tiene por lados los vectores representativos de las fuerzas componentes.*

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} \tag{2.3.1}$$

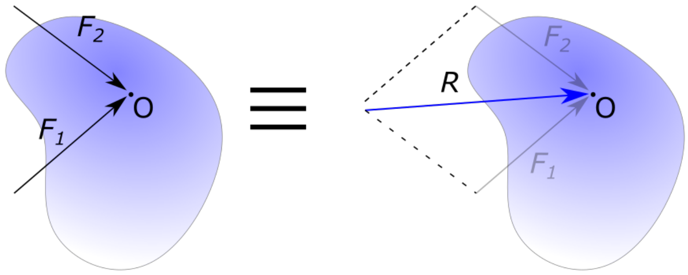


Figura 2.3.1: *Principio del paralelogramo*

Triángulo de fuerzas

Cuando las fuerzas son concurrentes no hace falta graficar el paralelogramo completo, y es suficiente con componer el triángulo, uniendo el fin del vector de la fuerza F_1 con el origen del vector de la fuerza F_2. La resultante R quedará definida por la unión del origen de la fuerza F_1 y el fin de la fuerza F_2:

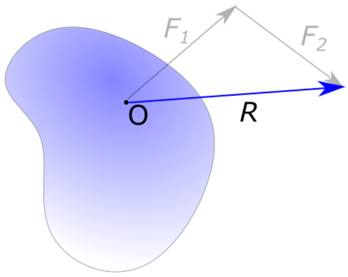


Figura 2.3.2: *Triángulo de fuerzas*

Polígono de fuerzas

Para sistemas de más de dos fuerzas se puede obtener la resultante mediante la aplicación sucesiva del principio del paralelogramo. El resultado gráfico será un polígono donde la resultante se obtiene de unir el origen de la primera fuerza con el fin de la última.

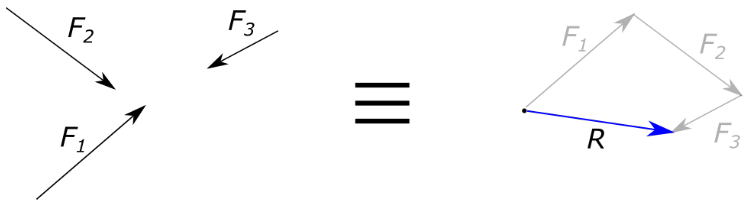


Figura 2.3.3: *Polígono de fuerzas*

Analíticamente, para n cantidad de fuerzas:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_n} \tag{2.3.2}$$

Que, componente a componente, da lugar a 3 ecuaciones en el espacio y 2 en el plano:

$$(R_x; R_y; R_z) = (\sum_{i=1}^{n} F_{nx}; \sum_{i=1}^{n} F_{ny}; \sum_{i=1}^{n} F_{nz}) \tag{2.3.3}$$

Corolario 2.3.1 La resultante de fuerzas colineales es la suma algebraica de los vectores representativos de las componentes.

Corolario 2.3.2 Se pueden componer n fuerzas concurrentes en el plano o en el espacio, dando como resultado una única fuerza resultante.

Corolario 2.3.3 Se puede descomponer una fuerza en 2 direcciones cualesquiera coplanares. La fuerza a descomponer y las direcciones deben estar en el mismo plano.

Corolario 2.3.4 Una fuerza se puede descomponer en 3 direcciones concurrentes en el espacio.

2.3.2 2º Principio de la Estática – Equilibrio (1ra ley de Newton)

ENUNCIADO *Para que dos fuerzas se equilibren es necesario que sean opuestas.*

Un sistema de fuerzas concurrentes se encuentra en **Equilibrio** si la resultante del mismo es el vector nulo.

$$\vec{R} = 0 \tag{2.3.4}$$

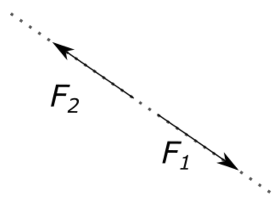


Figura 2.3.4: *Fuerzas opuestas*

Al sistema de fuerzas en equilibrio se le llama **Sistema Nulo**.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{R} = 0 \tag{2.3.5}$$

Las fuerzas opuestas forman sistemas nulos.

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \tag{2.3.6}$$

Dado un sistema de fuerzas de resultante R, se le llama **Equilibrante** E a la fuerza opuesta a la resultante R.

$$\vec{R} = -\vec{E} \tag{2.3.7}$$

Corolario 2.3.5 Para que la resultante sea nula, es condición necesaria y suficiente que sean nulas sus componentes.

$$\vec{R} = 0, \ \texttt{entonces} \ R_x = 0 \qquad R_y = 0 \qquad R_z = 0 \tag{2.3.8}$$

Corolario 2.3.6 Para que la resultante sea nula es condición necesaria y suficiente que el polígono de fuerzas sea cerrado.

Corolario 2.3.7 Dos fuerzas se equilibran cuando son iguales y contrarias.

$$\text{Si } \vec{R}+\vec{E}=0, \text{ entonces } \vec{R}=-\vec{E} \tag{2.3.9}$$

2.3.3 3º Principio y teorema de transmisibilidad

ENUNCIADO *El efecto de un sistema de fuerzas dado sobre un cuerpo no se modifica si a dicho sistema se le agrega o quita un sistema de fuerzas nulo.*

En base a este principio puede demostrarse el **Teorema de Transmisibilidad** de una fuerza, cuyo enunciado es:

Teorema 2.3.8 El efecto de una fuerza sobre un cuerpo rígido es independiente de cuál sea el punto de aplicación de la fuerza sobre dicho cuerpo, sobre la misma recta de acción.

A esto se lo llama **Efecto Estático Global**. El efecto estático global de dos fuerzas iguales y de sentido opuesto actuando sobre un cuerpo es nulo, o equilibrio global.
Es condición que los cuerpos sean indeformables, es decir, que debe aplicarse la hipótesis de rigidez.

Corolario 2.3.9 Las fuerzas que actúan sobre cuerpos rígidos son vectores axiles o deslizantes.

Corolario 2.3.10 Puede obtenerse la resultante de fuerzas coplanares no paralelas, aplicando el principio del paralelogramo sobre el punto de intersección de la línea de acción de las fuerzas intervinientes.

2.3.4 4º Principio de acción y reacción

ENUNCIADO *Toda acción implica la existencia de una reacción, de igual intensidad y sentido contrario.*

Si un cuerpo A ejerce una fuerza sobre un cuerpo B, entonces el cuerpo B ejerce sobre el cuerpo A otra fuerza de igual intensidad, igual recta de acción y sentido opuesto a la ejercida por A.
En el estudio de estructuras, a uno de los cuerpos, supongamos B, le llamaremos vínculo, y a la acción que desarrollará el vínculo la denominaremos reacción de vínculo. Estos conceptos se estudiarán con detalle más adelante.

2.4 Momentos

Definición 2.4.1 — Momento. El momento de una fuerza respecto a un punto o eje proporciona una medida de la tendencia de la fuerza a ocasionar que un cuerpo gire entorno de ese punto o eje.

2.4.1 Momentos respecto de un eje (representación escalar)

Dada una fuerza F que actúa a una distancia d de un eje e, de modo que el plano π que forman la fuerza y la distancia es perpendicular al eje.

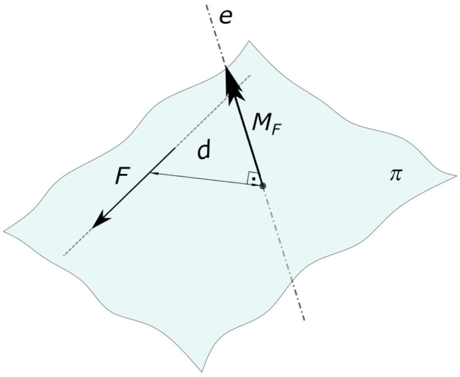


Figura 2.4.1: *Momento respecto de un eje*

La fuerza F genera una tendencia a girar en torno del eje e que es proporcional a la distancia d, o brazo de momento. La **magnitud del momento** o **torque** de la fuerza F en torno del eje e es el producto escalar entre F y d.

$$M_F^e = d \cdot F \tag{2.4.1}$$

Se debe establecer una convención para definir cuál será un giro negativo y uno positivo. En este libro se utilizará la **terna derecha**, o **regla del tirabuzón**, que establece que un giro positivo es antihorario.

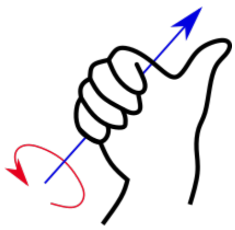


Figura 2.4.2: *Regla de la mano derecha*

El momento se representa mediante un vector cuya recta de acción es el eje e, perpendicular al plano que queda definido por la fuerza y el brazo, cuya magnitud es el producto escalar entre la fuerza y el brazo y cuyo sentido es el definido por la regla de la mano derecha.

Se ilustra con flecha de doble cabeza para distinguirlo de los vectores fuerza. Esta notación sólo es válida cuando se ha establecido claramente la terna convenida.

Fuerza en cualquier dirección respecto del eje

En el caso general en que una fuerza tiene una dirección cualquiera respecto del eje, siempre es posible descomponer a la fuerza en una componente perpendicular al eje y otra componente paralela.

La componente perpendicular al eje se comportará de la manera descripta anteriormente, mientras que la componente paralela al eje no será capaz de generar momentos respecto del eje.

2.4.2 Momentos respecto de un punto (representación vectorial)

Dada una fuerza F cuyo vector representativo es $\vec{F}$, y O es un punto en el espacio, se define al vector distancia $\vec{d}$ aquel que tiene como recta de acción una recta con origen el punto O e intersecte cualquier punto de la recta de acción de la fuerza $\vec{F}$.

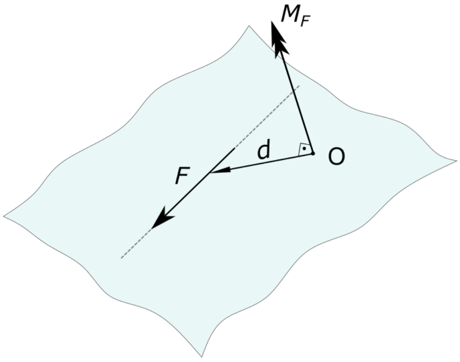


Figura 2.4.3: *Momento respecto de un punto*

Se define al momento $\vec{M}_F^0$ que generera la fuerza F en torno del punto O al producto vectorial:

$$\vec{M}_F^0 = \vec{d} \times \vec{F} \tag{2.4.2}$$

El momento $\vec{M}_F^0$ es un vector perpendicular al plano que forman el vector $\vec{F}$ y el punto O.
Desarrollando el producto vectorial con terna derecha, en notación cartesiana queda:

$$\vec{d} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ d_x & d_y & d_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (d_y\, F_z - d_z\, F_y) \cdot \hat{\imath} + (d_z\, F_x - d_x\, F_z) \cdot \hat{\jmath} + (d_x\, F_y - d_y\, F_x) \cdot \hat{k} \tag{2.4.3}$$

La componente M_x del vector momento es el momento de la fuerza respecto del eje x, análogamente para los ejes y y z:

$$M_x = d_y\, F_z - d_z\, F_y \qquad M_y = d_z\, F_x - d_x\, F_z \qquad M_z = d_x\, F_y - d_y\, F_x \tag{2.4.4}$$

Si se definiera al vector distancia $\vec{d}$ con el origen en algún punto de la recta de acción de la fuerza $\vec{F}$ hasta el punto O, entonces el producto vectorial sería en orden inverso.

Es importante destacar que el momento será el mismo, independientemente de cuál sea el vector distancia, mientras éste tenga su origen en el punto O.

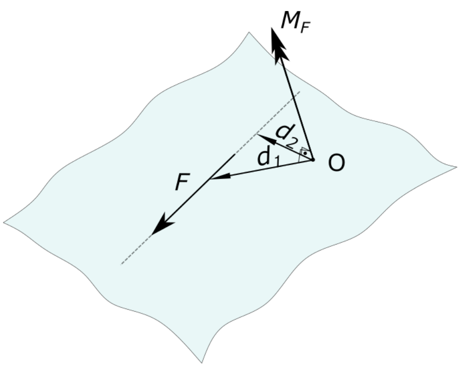


Figura 2.4.4: *Distintas distancias del punto O a la recta de acción*

$$\vec{M}_F^0 = \vec{d}_1 \times \vec{F} = \vec{d}_2 \times \vec{F} \tag{2.4.5}$$

En la práctica resulta más cómodo calcular los momentos componente por componente, que corresponde a la formulación escalar (respecto de un eje). La formulación vectorial se suele reservar para la programación de problemas.

E EJEMPLO
Dada una fuerza espacial F, contenida en un espacio cartesiano x, y, z, de componentes F_x, F_y, F_z, pasante por el punto A, definido por las coordenadas x_A, y_A, z_A; cuya recta de acción no pasa por el origen de coordenadas.
Se desea calcular el momento que genera la fuerza F respecto del punto O, origen de coordenadas.

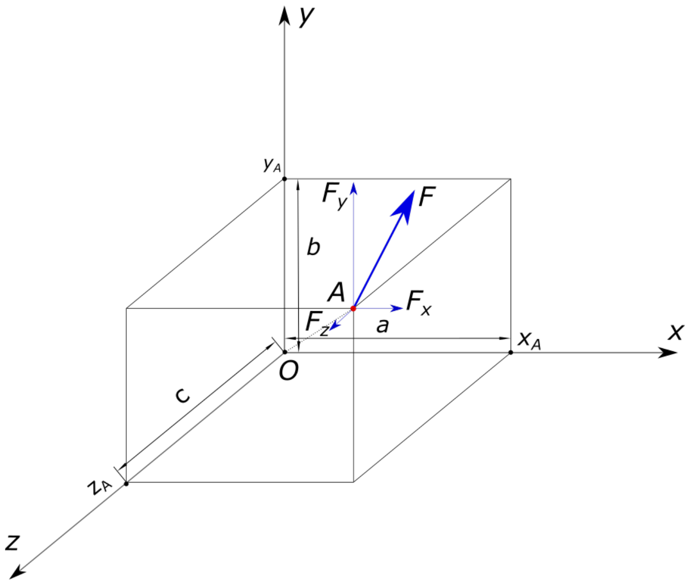


Figura 2.4.5: *Momento en 0 de la fuerza F aplicada en A*

Para utilizar la ecuación 2.4.5, es necesario determinar el vector distancia $\vec{d}$ entre los puntos O y A.

$$\vec{d} = (A - O) = (a,b,c) - (0,0,0) = (a,b,c) \tag{2.4.6}$$

En base a la ecuación 2.4.3:

$$\vec{d} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a & b & c \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (b\,F_z - c\,F_y) \cdot \hat{\imath} + (c\,F_x - a\,F_z) \cdot \hat{\jmath} + (a\,F_y - b\,F_x) \cdot \hat{k} \tag{2.4.7}$$

Si, en cambio, se calcula cada componente del momento por separado, utilizando sucesivamente la ecuación 2.4.1, para cada una de las componentes de la fuerza, para cada eje por separado.
Para ello se posiciona el pulgar paralelo al eje de análisis y se identifica hacia qué lado tiende a girar la fuerza. Si los dedos restantes se oponen al giro de la fuerza, entonces es necesario girar la mano y orientar el pulgar en el sentido contrario al inicial.

En torno del eje x

F_x	No es capaz de realizar momentos porque es paralela al eje	0
F_y	Tiende a girar en torno al eje x con brazo c, negativo según terna derecha	$-c \cdot F_y$
F_z	Tiende a girar con brazo b, giro positivo según terna derecha	$b \cdot F_z$

En torno del eje y

F_x	Tiende a girar positivo con brazo c	$c \cdot F_x$
F_y	No realiza momentos, es paralela al eje	0
F_z	Tiende a girar negativo con brazo a	$-a \cdot F_z$

En torno del eje z

F_x	Tiende a giro negativo, brazo b	$-b \cdot F_x$
F_y	Tiende a giro positivo, con brazo a	$a \cdot F_y$
F_z	No realiza momentos, es paralela al eje	0

El resultado es el mismo que el anterior. Con este método se tiene mayor comprensión del fenómeno físico que está sucediendo.

2.4.3 Momento nulo

Para el que valor del **momento sea cero** existen tres posibilidades:

- Que la intensidad de la fuerza valga cero
- Que la distancia de la fuerza al eje sea nula, es decir, que la recta de acción de la fuerza pase por el eje o centro de momentos
- Que la recta de acción de la fuerza sea paralela al eje de momentos

2.4.4 Unidades de momento

Las unidades de momento que utilizaremos en Estabilidad son: $M = d \cdot F = [N]\ [m]$.

2.4.5 Teorema de Varignon (o principio de momentos)

Teorema 2.4.1 El momento de una fuerza respecto de un punto es igual a la suma de los momentos de las componentes de la fuerza respecto al punto.

Es fácilmente demostrable por la propiedad distributiva del producto vectorial. A saber:
Dado un sistema de fuerzas $F_1, F_2, \ldots, F_n$ concurrentes en el punto A, de resultante R.

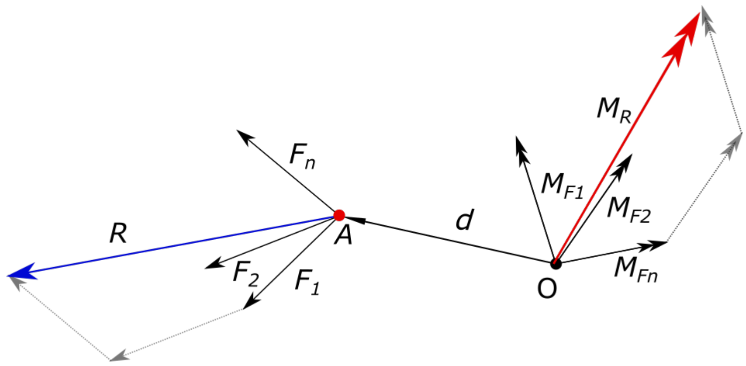


Figura 2.4.6: *Teorema de Varignon*

Se puede considerar que el sistema de fuerzas son las componentes de la resultante. El momento de R respecto al punto O, separado una distancia d del punto de aplicación A, es un vector libre que responde a la expresión:

$$\vec{M}_F^0 = \vec{d} \times \vec{R} \tag{2.4.8}$$

Reemplazando $\vec{R}$ en función del sistema de fuerzas que lo compone, según la ecuación 2.3.2:

$$\overrightarrow{M_{\vec{R}}^{O}} = \vec{d} \times \sum_{i=0}^{n} \vec{F_n} \tag{2.4.9}$$

Distribuyendo el producto vectorial:

$$\sum_{i=0}^{n} \vec{d} \times \overrightarrow{F_n} = \vec{d} \times \overrightarrow{F_1} + \vec{d} \times \overrightarrow{F_2} + \cdots + \vec{d} \times \overrightarrow{F_n} = \sum_{i=0}^{n} \overrightarrow{M_{\vec{F}}^{O}} \quad (2.4.10)$$

Con lo cual queda demostrado el teorema:

$$\overrightarrow{M_{\vec{R}}^{O}} = \sum_{i=0}^{n} \overrightarrow{M_{\vec{F}}^{O}} \quad (2.4.11)$$

2.4.6 Par de fuerzas o cupla

Un par de fuerzas o cupla es un sistema de fuerzas constituido por dos fuerzas paralelas, no colineales, de igual intensidad y sentido contrario. Su efecto es producir una rotación pura en una dirección específica.

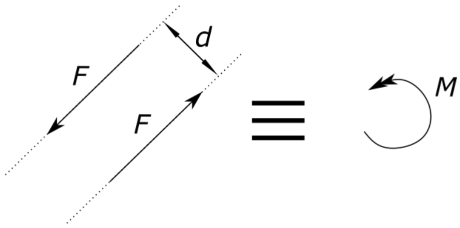


Figura 2.4.7: *Cupla, definida por $M = d \cdot F$*

Los pares de fuerzas quedan definidos por el momento del par, que es perpendicular al plano que contiene a las dos rectas de acción del par.

El momento de un par de fuerzas respecto de un punto cualquiera es constante e igual al momento del par.

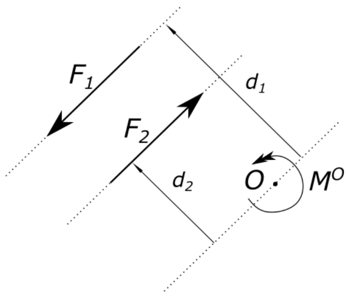


Figura 2.4.8: *Momento de una cupla*

Analíticamente:

$$M_F^O = d_1 \cdot F_1 - d_2 \cdot F_2 \quad (2.4.12)$$

En el caso que $F_1 = F_2 = F$ y se puede ver que $d_1 = d_2 + d$. Reemplazando:

$$M_F^O = (d_2 + d) \cdot F - d_2 \cdot F = d \cdot F \quad (2.4.13)$$

Independientemente del punto de aplicación se obtiene el valor del momento de la cupla. Se puede concluir que el momento de una cupla es un **vector libre**.

La resultante de un par es nula: $F_1 + F_2 = 0$

Los pares de fuerzas pueden pensarse como un caso particular de fuerzas concurrentes, donde el punto de concurrencia es el punto impropio de la recta de acción común.

2.5 Traslación de fuerzas

Una fuerza que actúa sobre un cuerpo rígido tiene definida su recta de acción. Bajo la hipótesis de rigidez, las fuerzas actúan como vectores axiles, por lo que una modificación en su punto de aplicación no altera su efecto sobre el cuerpo.
Si en cambio se modifica su recta de acción, debido a la traslación de la fuerza, entonces el efecto sobre el cuerpo no será el mismo.
Dada una fuerza F aplicada sobre un cuerpo rígido con recta de acción e.

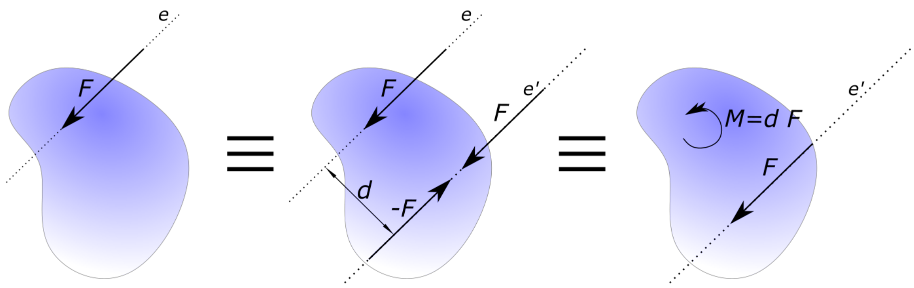


Figura 2.5.1: *Traslación de fuerzas*

Se desea trasladar la fuerza a la recta e’ paralela a la primera, separadas una distancia d.
Para ello se agrega un sistema nulo formado por dos fuerzas paralelas y colineales de intensidad igual a F sobre la recta de acción e’, que no modifica el efecto sobre el cuerpo, según reza el Tercer Principio.

El par de fuerzas F sobre la recta e y -F sobre la recta e’, forman una cupla de momento $M = d \cdot F$, cuya resultante es nula.

Por lo tanto el primer sistema es equivalente a otro con una fuerza F sobre la recta e’ más un momento $M = d \cdot F$.

2.6 Invariantes en los sistemas de fuerzas

Se definen dos magnitudes que, para un determinado sistema de fuerzas, mantienen su valor, sin depender de la posición del centro de reducción. Éstos son:

2.6.1 Invariante vectorial

Definición 2.6.1 Se le llama **Invariante Vectorial** I_V de un sistema de fuerzas cualquiera de resultante $\vec{R}$ al vector resultante:

$$I_V = \vec{R} = (R_x, R_y, R_x) \tag{2.6.1}$$

Si se cambia el centro de reducción, el vector resultante no se modifica. En cambio, el vector par de reducción sí depende del punto de reducción.

2.6.2 Invariante escalar

Definición 2.6.2 Se le llama **Invariante Escalar** I_E al valor de la proyección M_R^* del momento de reducción $\overrightarrow{M_R}$ sobre la línea de acción de la resultante de reducción $\vec{R}$:

$$I_E = M_R^* = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} \cdot \overrightarrow{M_R} \tag{2.6.2}$$

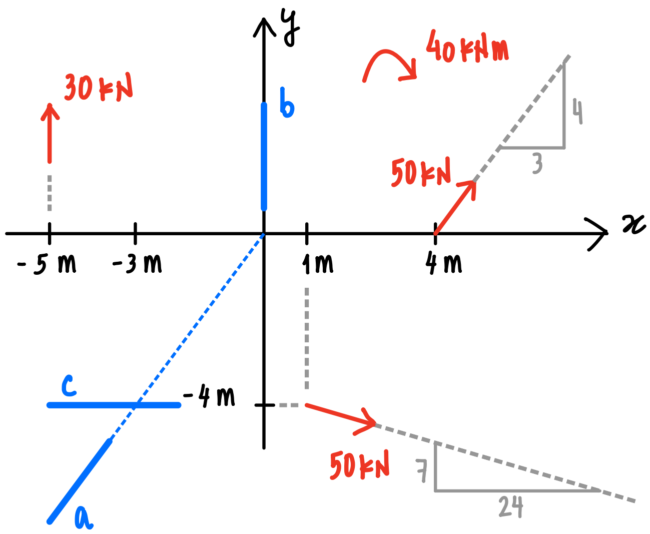
PUNTOS RELEVANTES 2.1 SISTEMAS DE FUERZAS

- Todo sistema de fuerzas en el plano o en el espacio se puede reducir a una fuerza y un par.

- En el caso general, el sistema de fuerzas y momentos que actúa sobre un cuerpo, se reducirá a una sola fuerza R y un momento M que no serán perpendiculares entre sí. Pero el vector momento se puede descomponer en una componente perpendicular a la fuerza y otra componente paralela. La componente perpendicular puede ser eliminada trasladando la fuerza.
- En el caso particular en que sea posible encontrar un punto O para el cual al reducir el sistema de fuerzas y momentos que actúan sobre un cuerpo rígido se obtiene una fuerza resultante R y a un momento resultante M que perpendiculares entre sí, siempre puede trasladarse la fuerza a otro punto P de manera que el par resultante sea nulo.
  Ejemplo de esto son las fuerzas coplanares y los sistemas de fuerzas paralelas.
- Si las fuerzas son concurrentes, el sistema de fuerzas puede ser reducido a una única fuerza resultante.
- Para que un sistema se encuentre en equilibrio la resultante debe ser igual al vector nulo. Eso implica que todas sus componentes deben ben ser nulas y su polígono de fuerzas cerrado.
- Para cuerpo sometido a un sistema de fuerzas en equilibrio de resultante R, debe existir una fuerza igual y contraria que llamaremos equilibrante E materializada por los vínculos.
- Dos sistemas de fuerzas que actúan sobre un mismo cuerpo rígido son equivalentes si pueden ser reducidos al mismo sistema fuerza-par en un punto dado O.

SISTEMA DE FUERZAS

SF1 Hallar un **Sistema Equivalente** de una única fuerza.
Equilibrar con tres fuerzas en direcciones a, b, c.



RECORDEMOS UN PAR DE CONCEPTOS

1- LAS FUERZAS SON VECTORES AXILMENTE LIBRES
2- LOS MOMENTOS APLICADOS SON VECTORES LIBRES
3- LA TRASLACIÓN DE UNA FUERZA FUERA DE SU RECTA DE ACCIÓN TRAE APAREJADO UN MOMENTO (DE TRASLACIÓN / REDUCCIÓN)

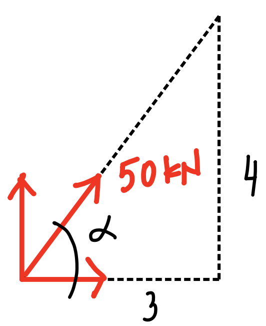
* NOS PIDEN ENCONTRAR UN SISTEMA EQUIVALENTE, EN OTRAS PALABRAS REDUCIR TODAS LAS FUERZAS Y MOMENTOS A UN PUNTO.

* SABEMOS: $\bar{R} = \sum F_i = \sum F_x \hat{i} + \sum F_y \hat{j}$

$\bar{M}_R = \sum M_i + \sum \bar{r} \times \bar{F}$ → POR SER UN SISTEMA 2D; $\hat{k}$

ESTE TÉRMINO VIENE DE LA REDUCCIÓN DE FUERZAS.

PARA PODER ENCONTRAR LAS R_x Y R_y DEBEMOS DESCOMPONER LAS FUERZAS

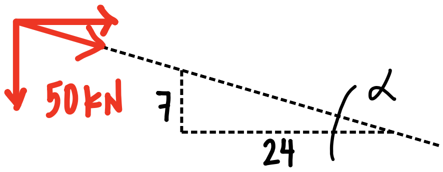


POR PITÁGORAS → $Hip = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

POR TRIGONOMETRÍA → $\cos(\alpha) = \frac{ady}{hip} = \frac{3}{5} = 0.6$

$\sin(\alpha) = \frac{op}{hip} = \frac{4}{5} = 0.8$

LA COMPONENTE
- HORIZONTAL: $50\ kN \cdot 0{,}6 = 30\ kN$
- VERTICAL: $50\ kN \cdot 0{,}8 = 40\ kN$



$$Hip = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$$

$$\cos(\alpha) = \frac{24}{25} = 0{,}96$$

$$\sin(\alpha) = \frac{7}{25} = 0{,}28$$

LA COMPONENTE
- HORIZONTAL: $50\ kN \cdot 0{,}96 = 48\ kN$
- VERTICAL: $50\ kN \cdot 0{,}28 = 14\ kN$

AHORA SÍ: $\Sigma F_x = 30\ kN + 48\ kN = 78\ kN$

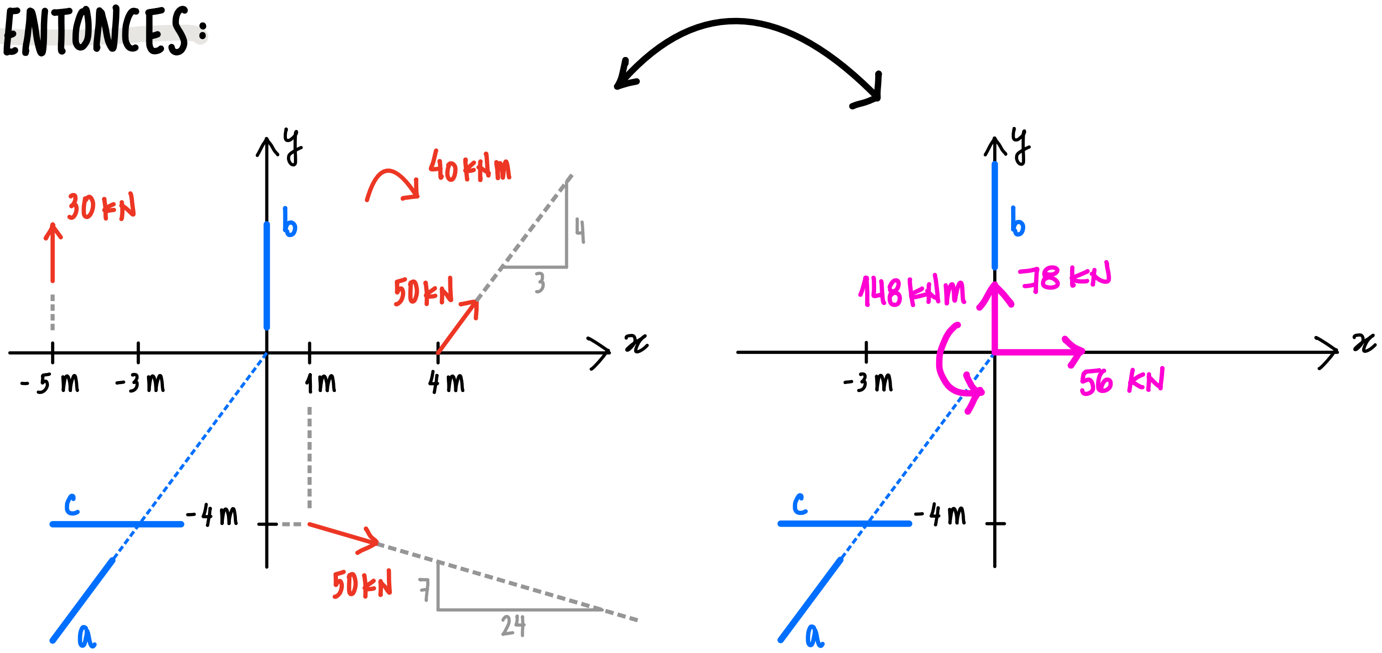
$\Sigma F_y = 30\ kN + 40\ kN - 14\ kN = 56\ kN$

¿Y EL MOMENTO?

→ TENEMOS QUE ELEGIR UN CENTRO DE REDUCCIÓN → ORIGEN DE COORDENADAS

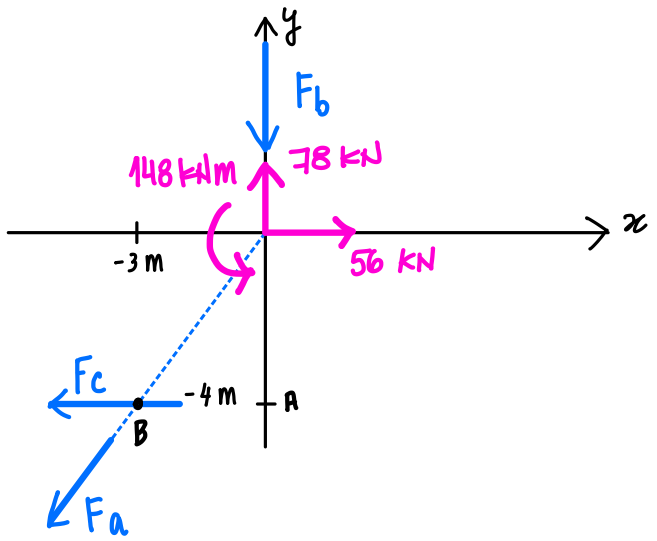
$$\Sigma M^o = -30\ kN \times 5m - 40\ kNm + 200\ kN \times 4m - 14\ kN \times 1m + 48\ kN \times 4m = 148\ kNm$$

ENTONCES:



PARA PLANTEAR EL EQUILIBRIO VAMOS A USAR EL SISTEMA EQUIVALENTE

RECORDEMOS EQUILIBRIO 2D	$\Sigma F_V = 0$ $\Sigma F_H = 0$ $\Sigma M^o = 0$	ó	$\Sigma F = 0$ $\Sigma M^A = 0$ $\Sigma M^B = 0$	ó	$\Sigma M^A = 0$ $\Sigma M^B = 0$ $\Sigma M^C = 0$ (A, B, C NO ALINEADOS)



ASUMIMOS LAS DIRECCIONES DE F_a ; F_b ; F_c

SI DAN ⊕ : DIRECCIÓN OK

SI DAN ⊖ : DIRECCION OPUESTA

TIP: PENSAR CÓMO PLANTEAR SISTEMAS DESACOPLADOS

1) $\sum M^A = -56\,kN \times 4m + (F_a \times 0{,}6) \times 3m + 148\,kNm = 0$

$\rightarrow F_a = 31{,}67\,kN$

2) $\sum M^B = -56\,kN \times 4m + 78\,kN \times 3m + 148\,kNm - F_b \times 3m = 0$

$\rightarrow F_b = 52{,}67\,kN$

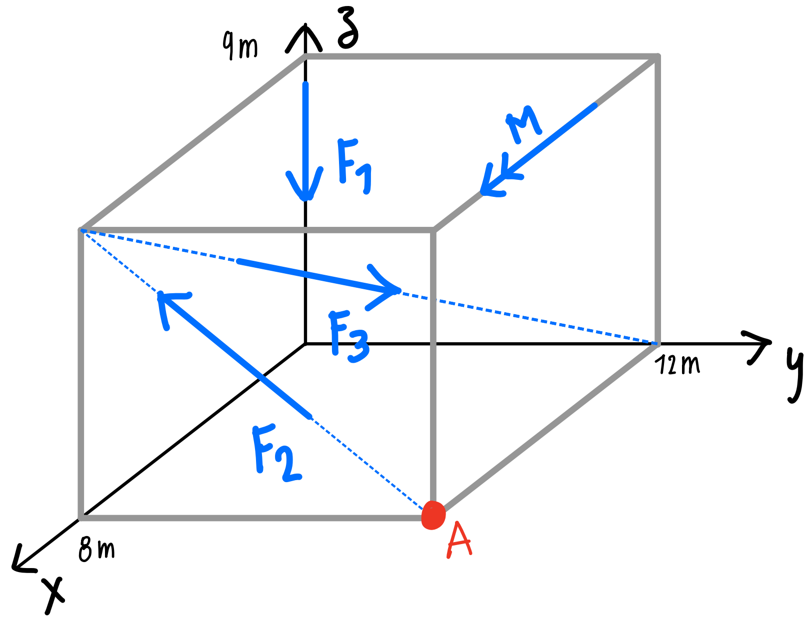
3) $\sum F_x = -F_c - F_a \times 0{,}6 + 56\,kN = 0$

$\rightarrow F_c = 37\,kN$

SF2

Dado el siguiente **sistema de fuerzas en el espacio**, se pide:

1. **Reducir** el sistema de fuerzas al punto A.
2. **Equilibrar** el sistema de fuerzas con las seis direcciones dadas.
3. Reducir a una **llave de torsión.**



$F_1 = 10$ kN

$F_2 = 20$ kN

$F_3 = 34$ kN

$M = 8$ kNm

(1)

PARA UN SISTEMA 3D:

$$\bar{R} = \sum F_i = \sum F_x \hat{\imath} + \sum F_y \hat{\jmath} + \sum F_z \hat{k}$$

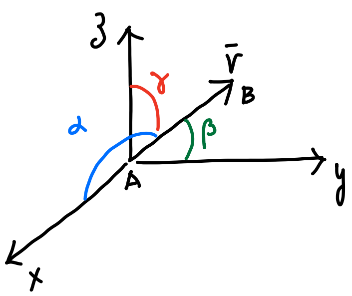
$$\bar{M}_R = \sum \bar{M}_i + \sum \bar{r} \times \bar{F} = M_x \hat{\imath} + M_y \hat{\jmath} + M_z \hat{k}$$

ESTE TÉRMINO VIENE DE LA REDUCCIÓN DE FUERZAS.

ANTES QUE NADA TENEMOS QUE ENCONTRAR LAS COMPONENTES:

→ HALLAMOS LOS **COSENOS DIRECTORES**

DADO UN VECTOR



$$\bar{V} = V_x \hat{\imath} + V_y \hat{\jmath} + V_z \hat{k}$$

$$|V| \cdot \cos(\alpha) \quad |V| \cdot \cos(\beta) \quad |V| \cdot \cos(\gamma)$$

COSENOS DIRECTORES

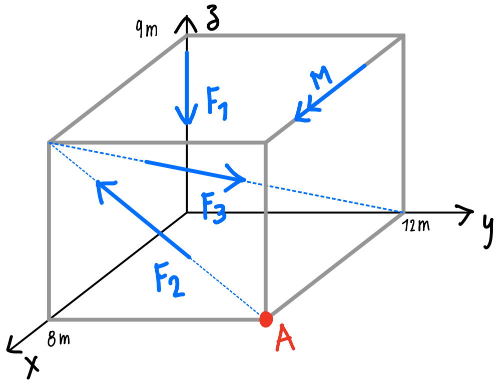
¿CÓMO ENCUENTRO LA DIRECCIÓN DE UN VECTOR?

$$\hat{r}_V = \frac{\bar{B} - \bar{A}}{\|\bar{B} - \bar{A}\|} = r_x \hat{\imath} + r_y \hat{\jmath} + r_z \hat{k}$$

Versor

De manera tal que: $\bar{V} = |V| \, \hat{r}_V$

∴ Son los cosenos directores



$F_1 = 10\ kN \qquad F_3 = 34\ kN$

$F_2 = 20\ kN \qquad M = 8\ kNm$

* F_1 : $|F_1| = 10\ kN$

$\bar{r}_{F_1} = (0;0;-1)$ (x inspección)

$\bar{F}_1 = (0;0;-10)\ kN$

* F_2 : $|F_2| = 20\ kN$

$$\bar{r}_{F_2} = \frac{(8;0;9)-(8;12;0)}{\|(8;0;9)-(8;12;0)\|} = \frac{(0;-12;9)}{\sqrt{0^2+(-12)^2+9^2}} = (0;-0,8;0,6)$$

$\bar{F}_2 = (0;-16;12)\ kN$

* F_3 : $|F_3| = 34\ kN$

$$\bar{r}_{F_3} = \frac{(0;12;0)-(8;0;9)}{\|(0;12;0)-(8;0;9)\|} = \frac{(-8;12;-9)}{\sqrt{(-8)^2+(12)^2+(-9)^2}} = (-0,471;\ 0,706;-0,529)$$

$\bar{F}_3 = (-16;24;-18)\ kN$

* M : $|M| = 8\ kNm$

$\bar{r}_M = (1;0;0)$ (x inspección)

$\bar{M} = (8;0;0)\ kNm.$

RESULTANTE:

$R_x = \sum F_x = -16\ kN$

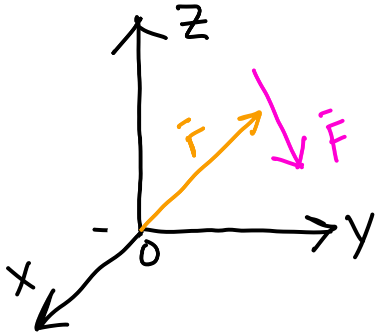
$R_y = \sum F_y = -16\ kN + 24\ kN = 8\ kN$

$R_z = \sum F_z = -10\ kN + 12\ kN - 18\ kN = -16\ kN$

RECORDATORIO

= MOMENTOS EN EL ESPACIO =

SABEMOS QUE



$\bar{M}_O = \bar{r}^o \times \bar{F}$

Vector Momento

$\bar{r}^o$: vector posición

$\bar{F}$: vector fuerza

ADEMÁS → $\bar{r}^o = (r_x^o ; r_y^o ; r_z^o)$

$\bar{F} = (F_x ; F_y ; F_z)$

PRODUCTO VECTORIAL

$$\bar{M}_O = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \Rightarrow (r_y . F_z - r_z . F_y)\,\hat{\imath} - (r_x . F_z - r_z . F_x)\,\hat{\jmath} + (r_x . F_y - r_y . F_x)\,\hat{k}$$

HAY UNA FORMA MÁS EXPEDITIVA

"MOMENTOS SEGÚN EJES PASANTES POR UN PUNTO"

LO LLEVAMOS A TRES ECUACIONES ESCALARES ("COMO SI TRABAJÁRAMOS EN EL PLANO")

ALGUNAS AYUDAS

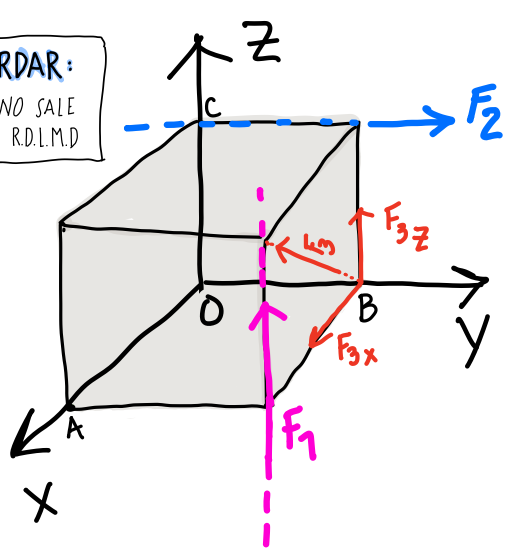
1 - EL MOMENTO DE UNA FUERZA CUYA RECTA DE ACCIÓN ES PARALELA AL EJE EN CONSIDERACIÓN ES NULO.

2 - SI LA R.D.A CORTA AL EJE, EL MOMENTO ES NULO. RESPECTO A DICHO EJE.

3 - SI LA R.D.A PASA POR EL CENTRO DE MOMENTOS, ES NULO PARA CUALQUIER EJE QUE PASE POR AHÍ.

EJEMPLO

RECORDAR: EL SIGNO SALE DE LA R.D.L.M.D



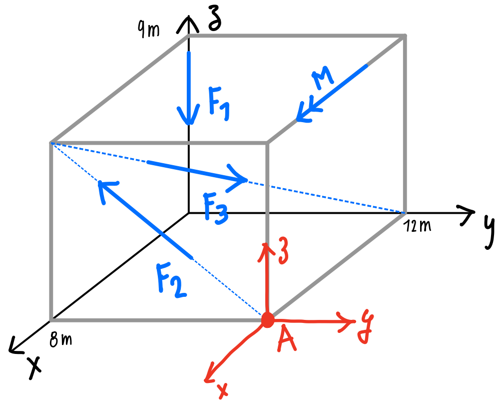
MOMENTOS SEGÚN X, Y, Z PASANTES POR O

$* \; M_x^O = +B.F_1 - C.F_2 + B.F_{3z}$ (en $\hat{\imath}$)

$* \; M_y^O = -A.F_1$ (en $\hat{\jmath}$)

$* \; M_z^O = -B.F_{3x}$ (en $\hat{k}$)

AHORA SÍ; MOMENTO EN A



$$\Sigma M_x^A = -F_{1z} \cdot 12m + M = 128 \text{ kNm}$$

$$\Sigma M_y^A = F_{1z} \cdot 8m + F_{3x} \cdot 9m = -224 \text{ kNm}$$

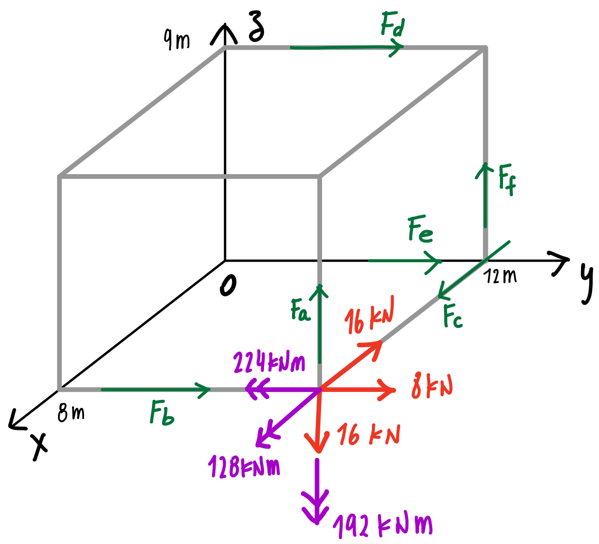
$$\Sigma M_z^A = F_{3x} \cdot 12m = -192 \text{ kNm}$$

ENTONCES:

$$\bar{R}_A = (-16\,;\,8\,;\,-16) \text{ kN}$$

$$\bar{M}_{R_A} = (128\,;\,-224\,;\,-192) \text{ kNm}$$

② PARA PLANTEAR EL EQUILIBRIO VAMOS A USAR EL SISTEMA EQUIVALENTE



$$\Sigma F_x = R_x + F_c = 0$$

$$\Sigma M_y^0 = -8m\,F_a + 8m\,R_z - M_y^A = 0$$

$$\Sigma F_z = R_z + F_a + F_f = 0$$

$$\Sigma M_x^0 = M_x^A - 12m \times R_z + 12m\,F_a + 12m\,F_f - 9m\,F_d = 0$$

$$\Sigma M_z^0 = -M_z^A + 8m\,R_x + 12m\,R_y + 8m\,F_b - 12m\,F_c = 0$$

$$\Sigma F_y = R_y + F_b + F_d + F_e = 0$$

6 ECUACIONES
6 INCÓGNITAS

$F_a = 12$ kN

$F_b = -44{,}44$ kN

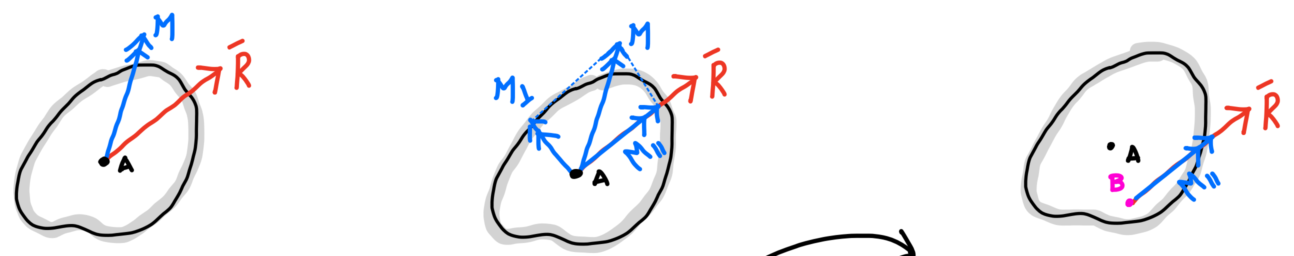
$F_c = 16$ kN

$F_d = 14{,}22$ kN

$F_e = 38{,}22$ kN

$F_f = -28$ kN

③ LLAVE DE TORSIÓN:



SISTEMA DE FUERZA $\bar{M}, \bar{R}$

DESCOMPONGO $\bar{M}$ EN DIRECCIONES $\perp$ Y $\parallel$ A $\bar{R}$

TRASLADO $\bar{R}$ TAL QUE EL MOMENTO DE TRASLACIÓN ANULE LA COMPONENTE $\perp$ A $\bar{R}$

$\downarrow$

LLAVE DE TORSIÓN:

ENTONCES:

1°. HALLO EL VECTOR DIRECCIÓN DE $\bar{R} \Rightarrow \dfrac{\bar{R}}{\|R\|} = (0{,}67\,;\,-0{,}33\,;\,0{,}67)$

2°. PROYECTO $\bar{M}$ SOBRE $\check{R}$:

$$\underbrace{\left(\bar{M}\cdot\frac{\bar{R}}{\|R\|}\right)}_{\text{PROYECCIÓN SOBRE DIRECCIÓN DE } \bar{R} \text{ (INVARIANTE ESCALAR)}}\cdot\underbrace{\frac{\bar{R}}{\|R\|}}_{\text{PARA HALLAR LAS COMPONENTES } (x,y,z) \text{ DEL } M_\parallel} = -32\,\text{kN}\cdot(0{,}67\,;\,-0{,}33\,;\,0{,}67) = (-21{,}33\,;\,10{,}67\,;\,-21{,}33)\ \text{kNm}$$

3° HALLO EL $M_\perp$: $\bar{M}_\perp = \bar{M} - M_\parallel = (149{,}33\,;\,-234{,}67\,;\,-170{,}67)$ kN

4° TRASLADO $\bar{R}$ TAL QUE: $M_R + M_\perp = 0$

$$(\bar{d} \times \bar{R}) = -M_\perp$$

$\bar{d}$: DISTANCIA INCÓGNITA $(x\,;\,y\,;\,z)$

ENTONCES:

$$\bar{d} \times \bar{R} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ -16 & 8 & -16 \end{vmatrix} = (-16y - 8z;\ 16x - 16z;\ 8x - 16z)\ \text{KNm}.$$

LUEGO:

$$\left.\begin{aligned} &x)\ -16y\ \text{KNm} - 8z\ \text{KNm} = -149{,}33\ \text{KNm} \\ &y)\ 16x\ \text{KNm} - 16z\ \text{KNm} = 234{,}67\ \text{KNm} \\ &z)\ 8x\ \text{KNm} - 16z\ \text{KNm} = 170{,}67\ \text{KNm} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= 8\ \text{m} \\ y &= 12{,}67\ \text{m} \\ z &= -6{,}67\ \text{m} \end{aligned}$$

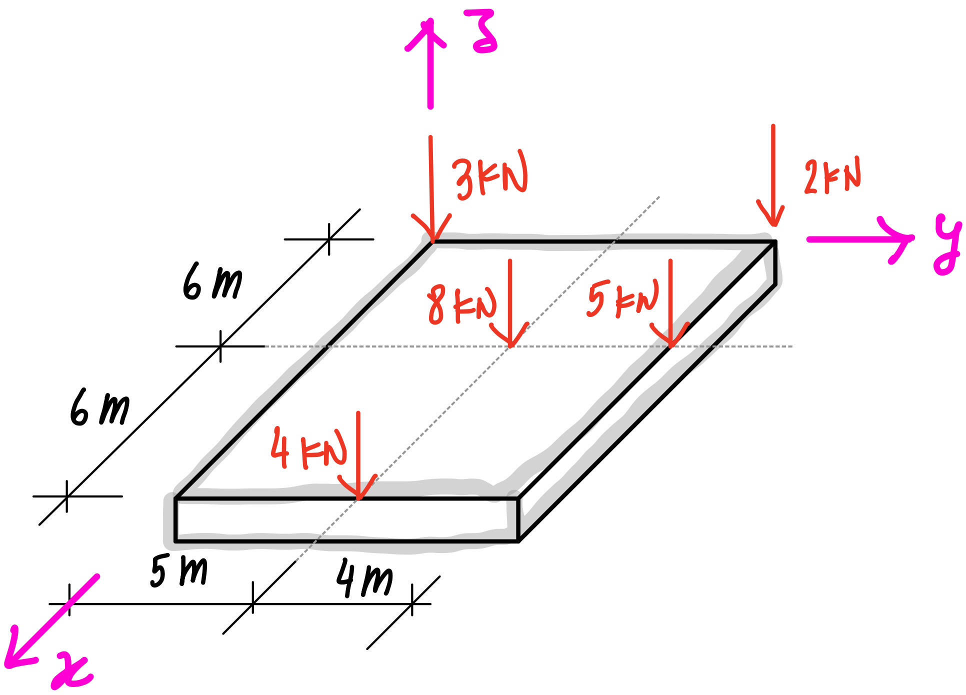
ENTONCES: MI **LLAVE DE TORSIÓN** SERÁ:

$$\bar{M}_{\parallel} = (-21{,}33;\ 10{,}67;\ -21{,}33)\ \text{kNm}$$

$$\bar{R} = (-16;\ 8;\ -16)\ \text{kN}$$

punto de aplicación: $(8;\ 12{,}67;\ -6{,}67)\ \text{m}$

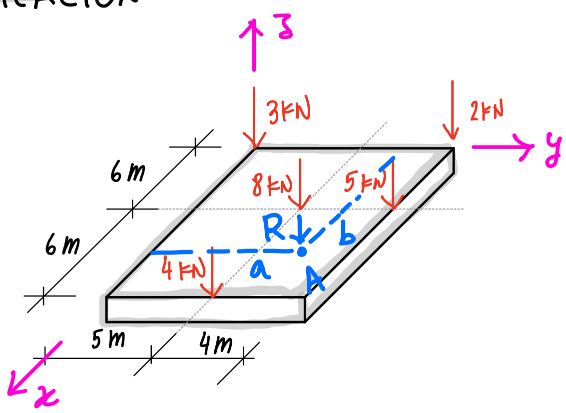
SF3 **Reducir** el sistema de fuerzas a una única fuerza y especifique las coordenadas de intersección de la recta de acción con la placa.



RESULTANTE:

$$R = \sum F_i = -3\,kN - 8\,kN - 4\,kN - 2\,kN - 5\,kN = -22\,kN$$

PARA HALLAR EL PUNTO DE APLICACIÓN → **TEOREMA DE VARIGNON**: El momento de la resultante de un sistema de fuerzas, respecto a un punto, es igual al momento de las componentes de dicho sistema respecto al mismo punto.



ASUMO UN PUNTO A DE APLICACIÓN DE $\bar{R}$ Y TOMO MOMENTOS RESPECTO DE LOS EJES X, Y PASANTES POR O

↓

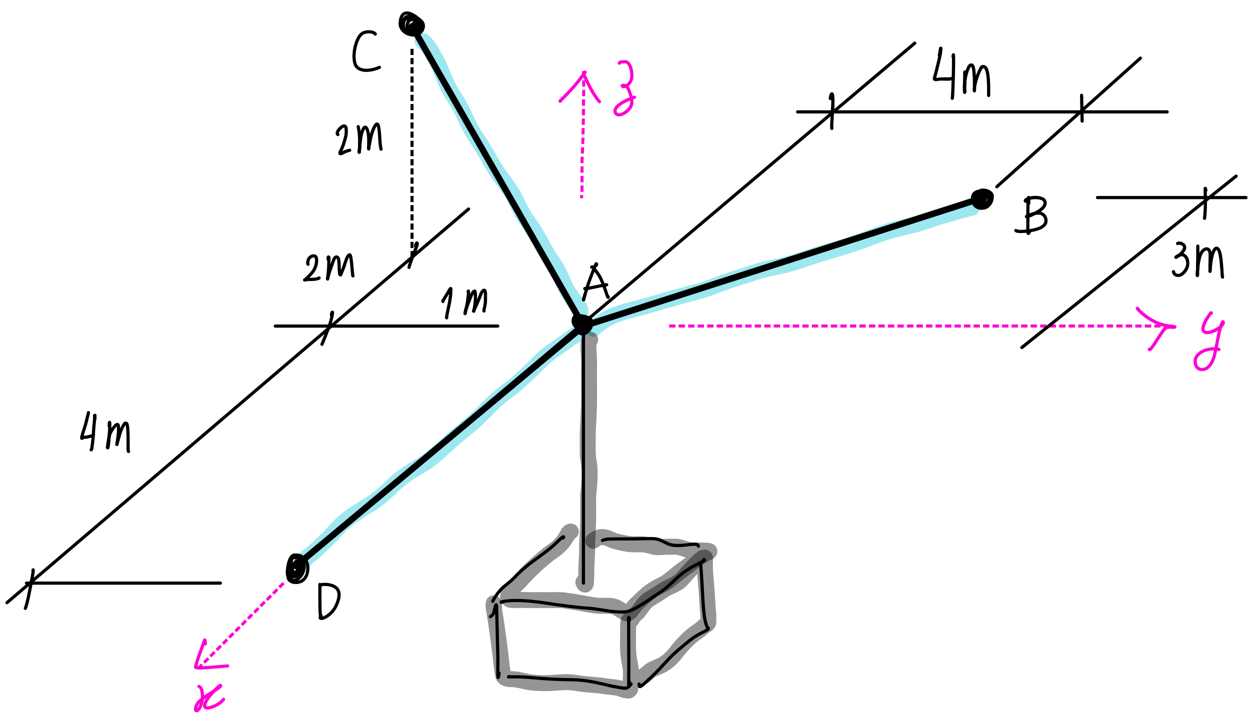
S/ EJE X → $-a\,R = -5m\,4kN - 5m \cdot 8kN - 9m \cdot 5kN - 9m \cdot 2kN$

$-a \cdot 22\,kN = -20\,kNm - 40\,kNm - 35\,kNm - 18\,kNm \rightarrow a = 5{,}13\,m$

S/ EJE Y → $b \cdot R = 6m \cdot 8kN + 6m \cdot 5kN + 12m \cdot 4kN$

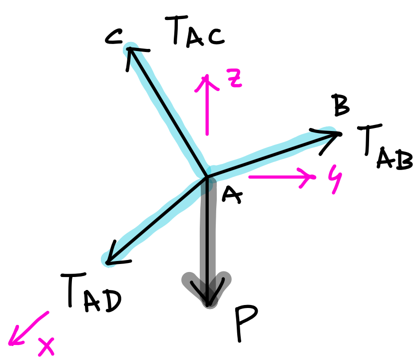
$b \cdot 22\,kN = 48\,kNm + 30\,kNm + 48\,kNm \rightarrow b = 5{,}72\,m$

$\boxed{SF4}$ Determinar el **peso máximo** de la caja si la tensión desarrollada en cualquiera de los cables no debe exceder los 450 kN



EL PROBLEMA FÍSICO PUEDE MODELARSE COMO UN SISTEMA DE FUERZAS CONCURRENTE 3D.

MODELO



DE IGUAL MANERA QUE EN $\boxed{SF2}$

T_{AB} : $\breve{n}_{AB} = \dfrac{(-3;4;0)}{\sqrt{3^2+4^2+0^2}} = (-0,6;0,8;0)$

T_{AC} : $\breve{n}_{AC} = \dfrac{(-2;-1;2)}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = (-0,67;-0,33;0,67)$

$T_{AD} = \breve{n}_{AD} = (1;0;0)$

PARA PLANTEAR EL PROBLEMA:

OPCIÓN 1: ASUMIR P INCÓGNITA → SISTEMA 4x3.

OPCIÓN 2: ASUMIR P = 1 PARA ENCONTRAR RELACIÓN CON LAS TENSIONES CON LA $T_{MÁX}$ Y SABIENDO QUE $T \leq 450$ kN HALLO P_{MAX}.

$$\begin{cases} \sum F_x = -0{,}6\, T_{AB} - 0{,}67\, T_{AC} + T_{AD} = 0 \\ \sum F_y = 0{,}8\, T_{AB} + 0{,}33\, T_{AC} = 0 \\ \sum F_z = 0{,}67\, T_{AC} - P = 0 \end{cases}$$

OP.1: ITERAR VALORES DE P HASTA QUE ALGUNA DE LAS T ALCANCE LOS 450 KN

OP.2: P=1 KN Y HALLO LA T MÁS GRANDE.

P

$T_{AB} = 0{,}625 \times 1\,\text{KN}$

$T_{AC} = 1{,}5 \times 1\,\text{KN}$ → ES EL CABLE MÁS SOLICITADO; LUEGO

$T_{AD} = 1{,}375 \times 1\,\text{KN}$

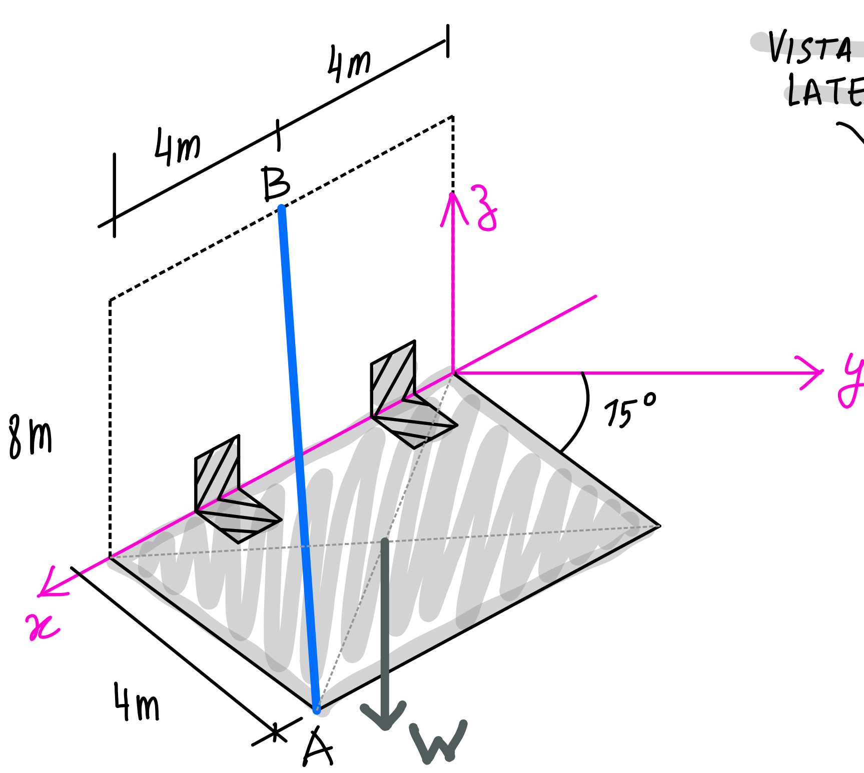
$$T_{MAX} = 450\,\text{KN} = 1{,}5\,\text{KN} \times P_{MAX}$$

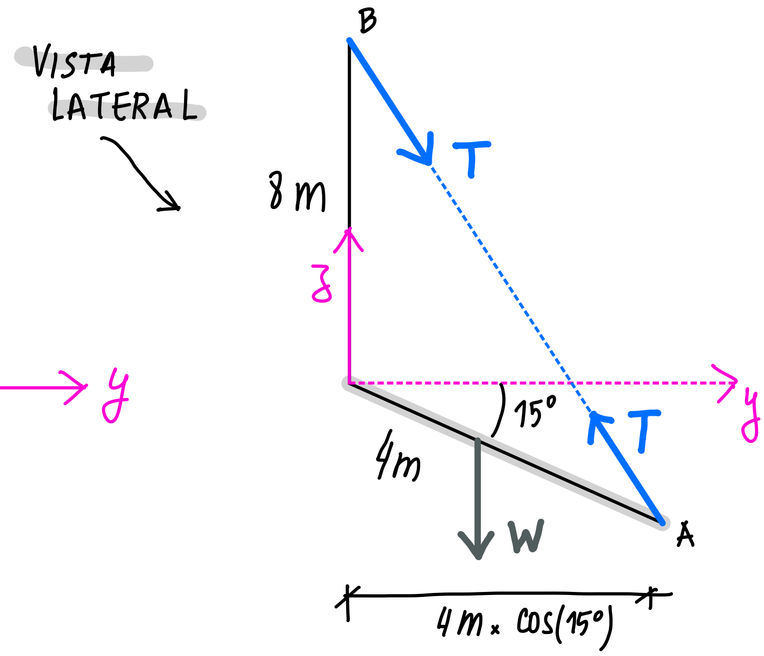
$$\rightarrow P_{MAX} = 300\,\text{KN}$$

SF5

Una placa está impedida de rotar al rededor del eje x debido a un cable AB.
Si la tensión del cable es de 750 kN:

1. Calcular el momento que genera dicha tensión respecto al eje x.
2. Calcular el peso de la placa.



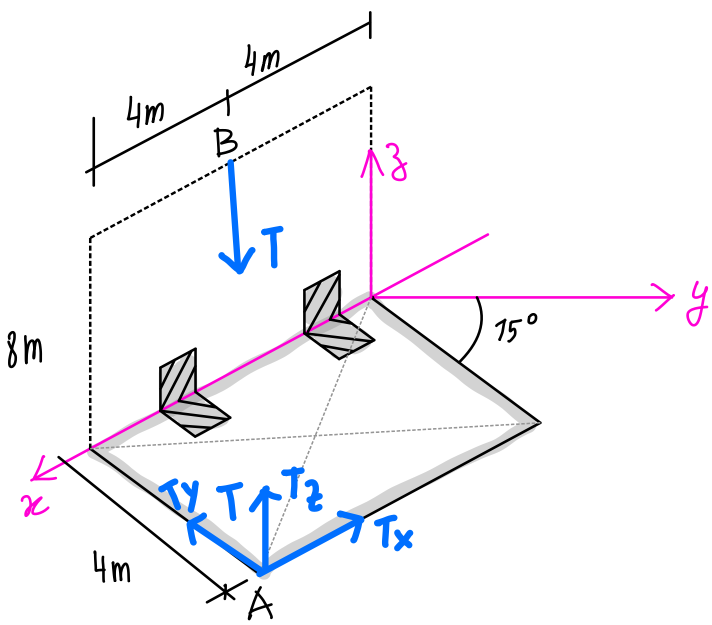


PARA HALLAR LOS COSENOS DIRECTORES:

$\bar{A}$: POR TRIGONOMETRÍA $\rightarrow$ $\bar{A} = \left(8\,;\ 4\cdot\sin(15°)\,;\ 4\cdot\cos(15°)\right)\,m$

$\bar{B} = (4\,;\ 0,\ 8)\,m$

$$\tilde{n}_{AB} = \frac{\bar{B}-\bar{A}}{\|\bar{B}-\bar{A}\|} = (-0{,}377;\ -0{,}364;\ 0{,}852)$$



① : $\Sigma M_x^B = T_z \cdot 4m \cdot \cos(15°) = (750\,kN \cdot 0{,}852) \cdot 0{,}97$

$M_x^B = 2479{,}32\ kNm$

② POR EQUILIBRIO:

$$\Sigma M_x^0 = 0 \rightarrow M_T^x - W \cdot \frac{4m \times \cos(15°)}{2} = 0$$

$W = 1278\ kN$