

ESTABILIDAD III

Clase 21: Análisis Elasto - Plástico

Prof. Ing. Guillermo J. Satostegui
13/07/2020

ESTABILIDAD III - CURSO 1 - CLASE 21 - 13/07/2020 - Análisis Elasto - Plástico

TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL ANÁLISIS ELASTO-PLÁSTICO

$$P_{\text{COLAPSO}} \left\{ \begin{array}{l} - \text{EQUILIBRIO} \\ - \text{MECANISMO} \\ - \text{ADMISIBILIDAD PLÁSTICA } |M_i| \leq |M_{pi}| \end{array} \right.$$

$$P_{\text{ESTÁTICA}} \left\{ \begin{array}{l} - \text{EQUILIBRIO} \\ - \text{ADMISIBILIDAD PLÁSTICA} \end{array} \right.$$

$$P_{\text{CINEMÁTICA}} \left\{ \begin{array}{l} - \text{EQUILIBRIO} \\ - \text{MECANISMO} \end{array} \right.$$

TEOREMA ESTÁTICO ó DEL LÍMITE INFERIOR ó de la SEGURIDAD
↔ GREENBERG y PRAGER (1952)

$$P_{\text{COLAPSO}} \geq P_{\text{ESTÁTICA}}$$

TEOREMA CINEMÁTICO ó DEL LÍMITE SUPERIOR ó de la INSEGURIDAD

$$P_{\text{COLAPSO}} \leq P_{\text{CINEMÁTICA}}$$

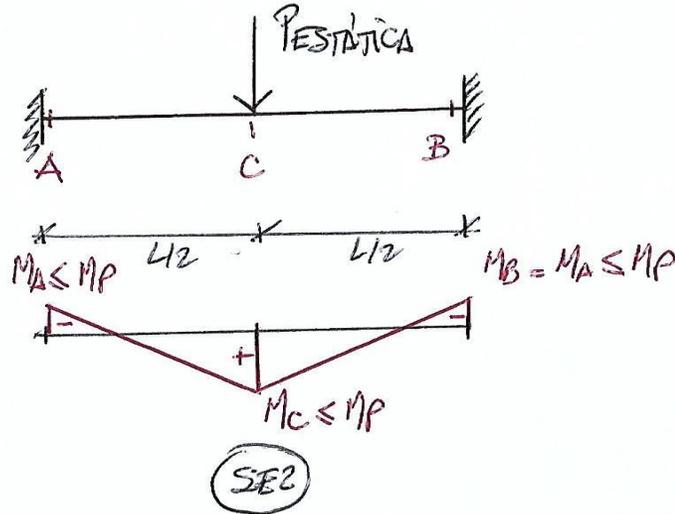
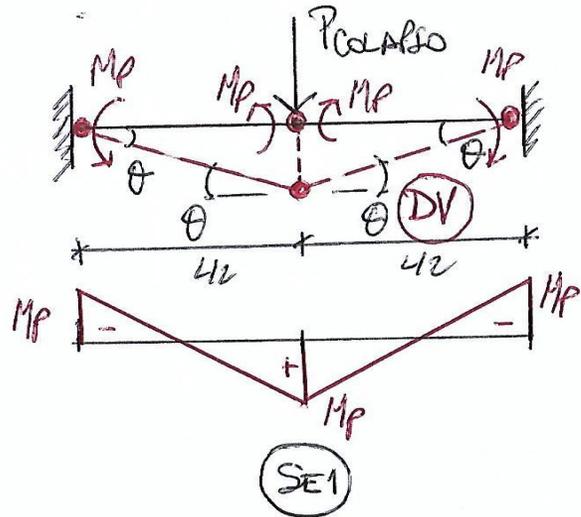
TEOREMA DE UNICIDAD
↓
(1950)

$$\text{Si } P = P_{\text{ESTÁTICA}} \text{ y } P = P_{\text{CINEMÁTICA}} \Rightarrow P = P_{\text{COLAPSO}}$$

ESTABILIDAD III - CURSO 1 - CLASE 21 - 13/07/2020 – Análisis Elasto - Plástico

TEOREMA ESTÁTICO ó DEL LÍMITE INFERIOR ó DE LA SEGURIDAD

$$P_{\text{COLAPSO}} \geq P_{\text{ESTÁTICA}}$$



$$TIV \left\{ \begin{array}{l} SE = SE1 \\ DV \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \sum W = 0 = P_{\text{COLAPSO}} \cdot \theta \cdot \frac{L}{2} - 4M_P \theta = 0 \Rightarrow P_{\text{COLAPSO}} = \frac{L}{2} \cdot \underbrace{4M_P}_a$$

$$TIV \left\{ \begin{array}{l} SE = SE2 \\ DV \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \sum W = 0 = P_{\text{ESTÁTICA}} \cdot \theta \cdot \frac{L}{2} - 2M_A \theta - 2M_C \theta = 0 \Rightarrow P_{\text{ESTÁTICA}} = \frac{L}{2} \cdot \underbrace{(2M_A + 2M_C)}_b$$

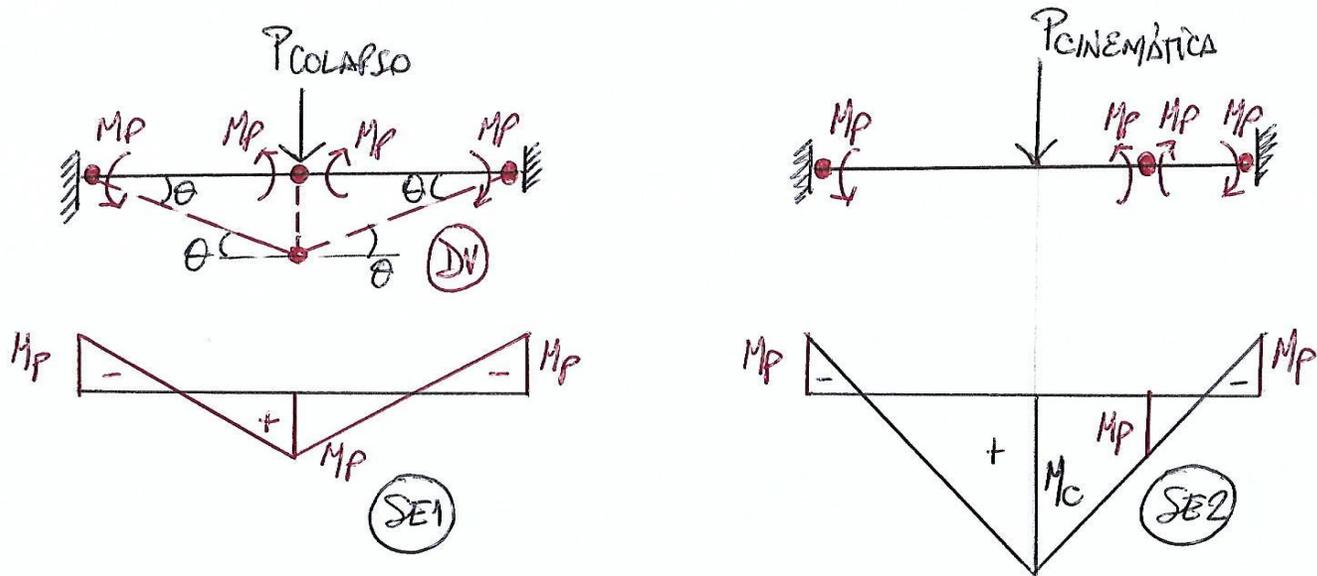
$$b \leq a$$

$$(2M_A + 2M_C) \leq 4M_P \Rightarrow \underline{P_{\text{COLAPSO}} \geq P_{\text{ESTÁTICA}}}$$

ESTABILIDAD III - CURSO 1 - CLASE 21 - 13/07/2020 – Análisis Elasto - Plástico

TEOREMA CINEMÁTICO o DEL LÍMITE SUPERIOR o de la INSEGURIDAD

$$P_{\text{COLAPSO}} \leq P_{\text{CINEMÁTICA}}$$



$$\text{TTV} \left\{ \begin{array}{l} \text{SE} = \text{SE1} \\ \text{DV} \end{array} \right. \Rightarrow \sum W = 0 = P_{\text{COLAPSO}} \cdot \theta \cdot \frac{L}{2} - 4MP\theta = 0 \Rightarrow P_{\text{COLAPSO}} = \frac{L}{2} \cdot \frac{4MP}{L}$$

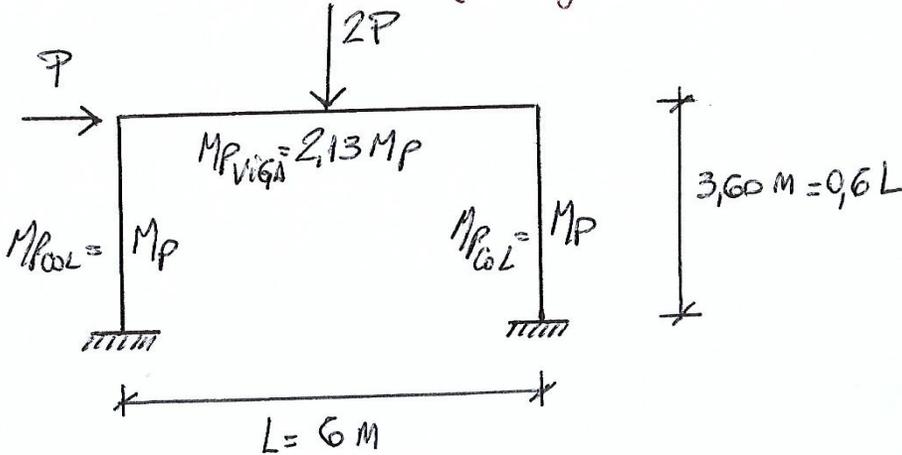
$$\text{TTV} \left\{ \begin{array}{l} \text{SE} = \text{SE2} \\ \text{DV} \end{array} \right. \Rightarrow \sum W = 0 = P_{\text{CINEMATICA}} \cdot \theta \cdot \frac{L}{2} - 2MP\theta - 2Mc\theta = 0 \Rightarrow P_{\text{CINEMATICA}} = \frac{L}{2} \cdot (2MP + 2Mc)$$

$$b \geq a \Rightarrow (2MP + 2Mc) \geq 4MP \Rightarrow \underline{P_{\text{COLAPSO}} \leq P_{\text{CINEMATICA}}}$$

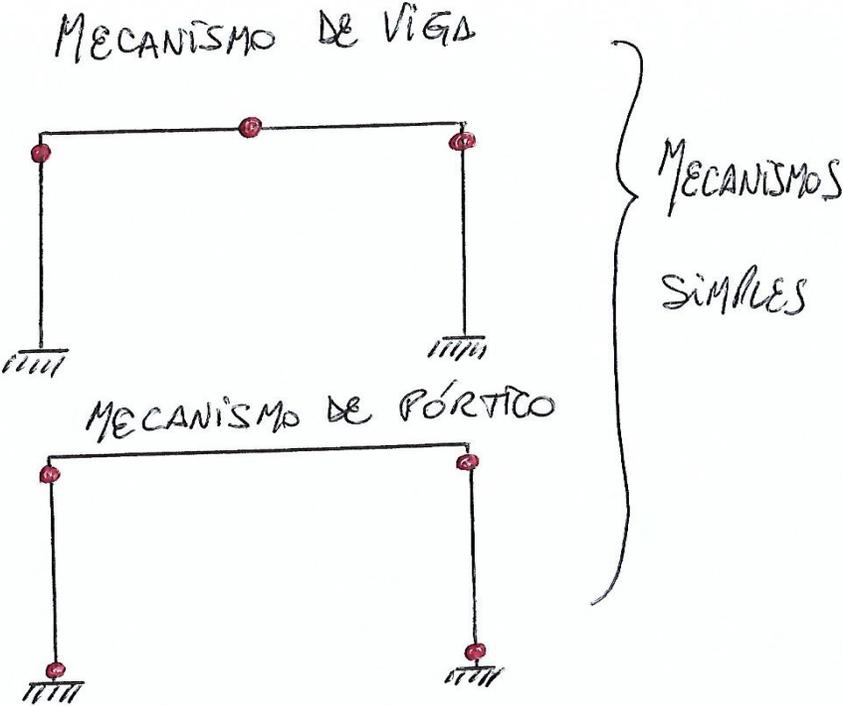
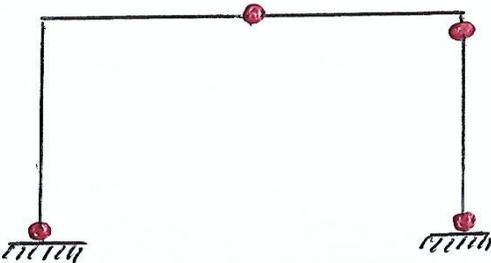
ESTABILIDAD III - CURSO 1 - CLASE 21 - 13/07/2020 – Análisis Elasto - Plástico

CARGA DE COLAPSO DE UN PÓRTICO - MÉTODO DE COMBINACIÓN DE MECANISMOS

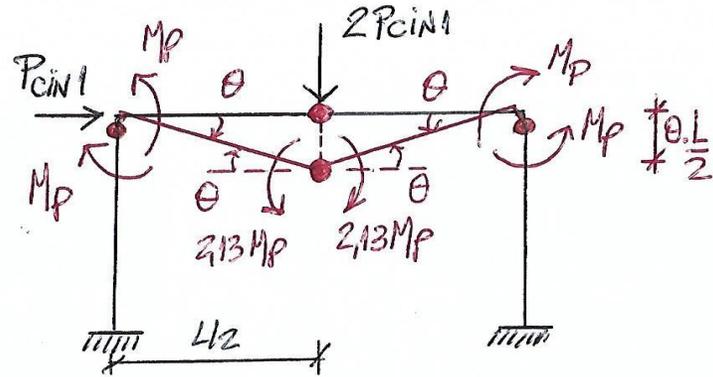
(NEAL y SYMONDS)



MECANISMO COMBINADO



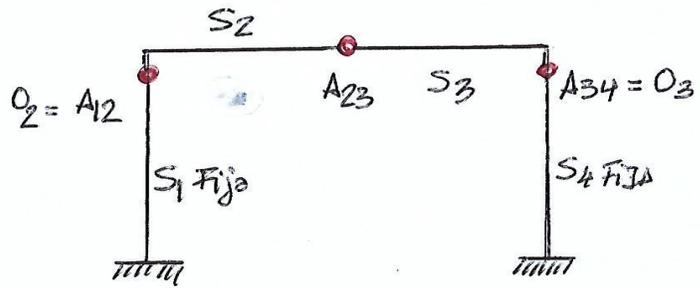
ESTABILIDAD III - CURSO 1 - CLASE 21 - 13/07/2020 – Análisis Elasto - Plástico



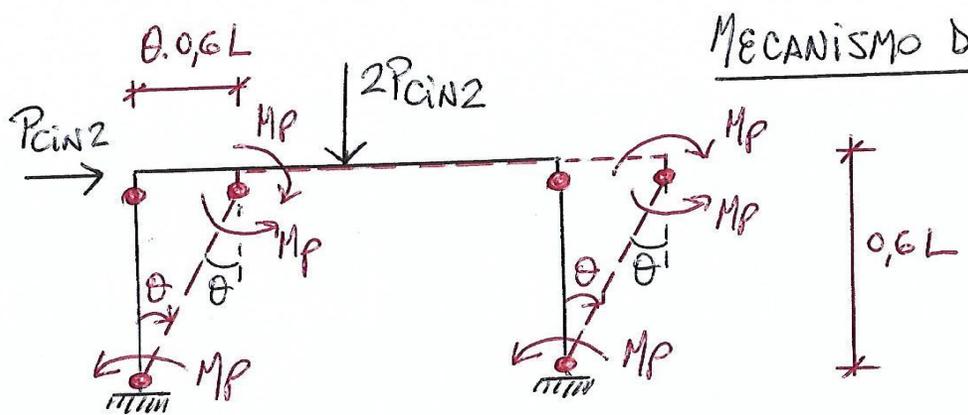
MECANISMO DE VIGA

$$\sum W = 0 = 2 P_{ci} \cdot \theta \cdot \frac{L}{2} - M_p \cdot \theta - 2 \times 2/3 M_p \theta - M_p \theta$$

$$\therefore P_{ci} = \frac{(2 + 4,26) M_p}{L} = \underline{\underline{6,26 \frac{M_p}{L}}}$$

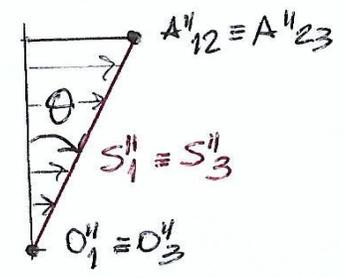
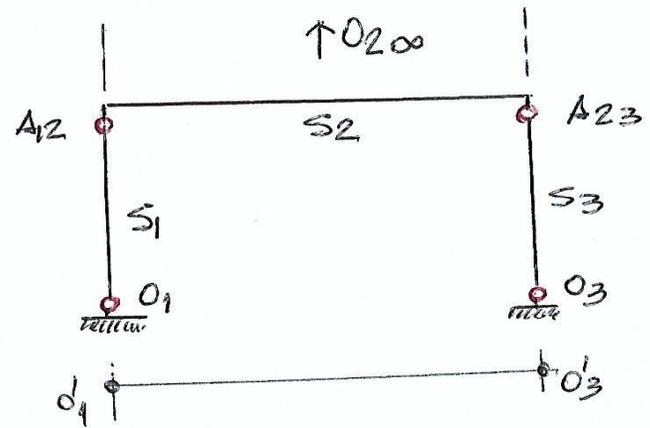


ESTABILIDAD III - CURSO 1 - CLASE 21 - 13/07/2020 – Análisis Elasto - Plástico



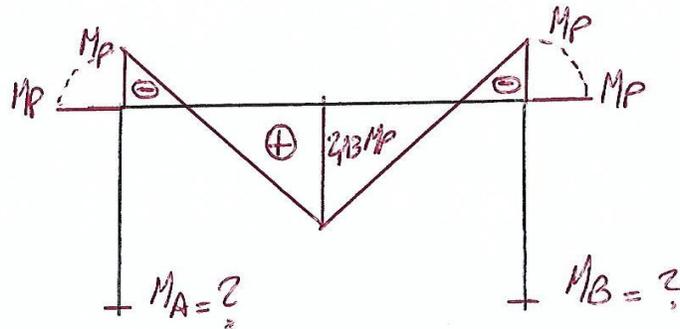
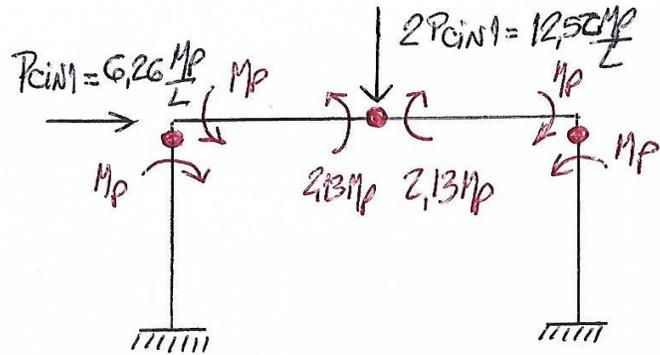
$$\sum W = 0 = P \sin 2 \cdot 0.06L - 4 M_p \theta$$

$$\therefore P \sin 2 = \frac{4}{0.6} \frac{M_p}{L} = 6.67 \frac{M_p}{L}$$

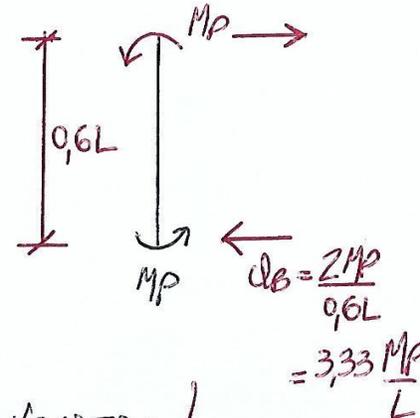
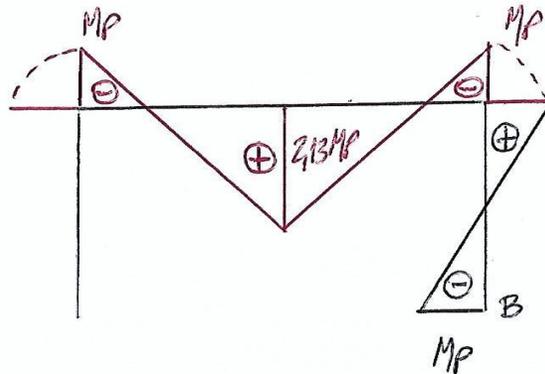
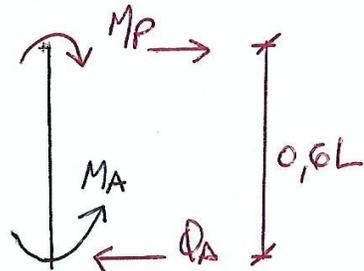


ESTABILIDAD III - CURSO 1 - CLASE 21 - 13/07/2020 – Análisis Elasto - Plástico

INTENTO VERIFICACIÓN DE ADMISIBILIDAD PLÁSTICA CON P_{CIN1}



$$Q_A = \frac{M_A - M_p}{0,6L}$$

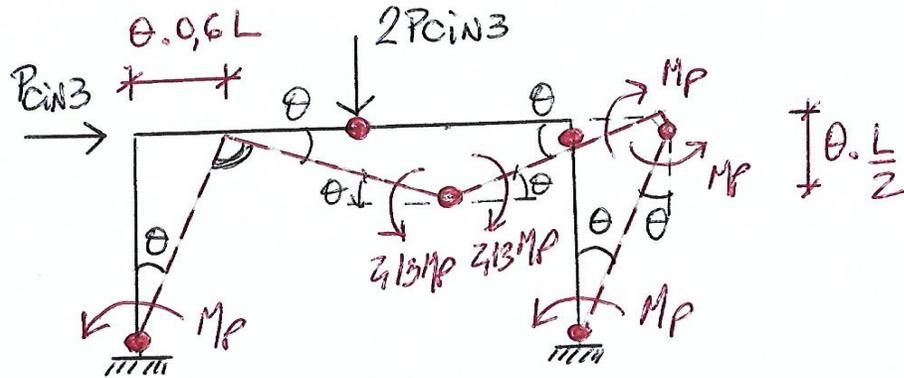


Para equilibrar carga horizontal necesario $Q_A = 6,26 \frac{MP}{L} - Q_B = 2,93 \frac{MP}{L}$

$$Q_A = 2,93 \frac{MP}{L} \Rightarrow \boxed{M_A = Q_A \cdot 0,6L + M_p = 1,76 MP + M_p = 2,76 MP > M_p} \text{ No VERIFICA!}$$

ESTABILIDAD III - CURSO 1 - CLASE 21 - 13/07/2020 – Análisis Elasto - Plástico

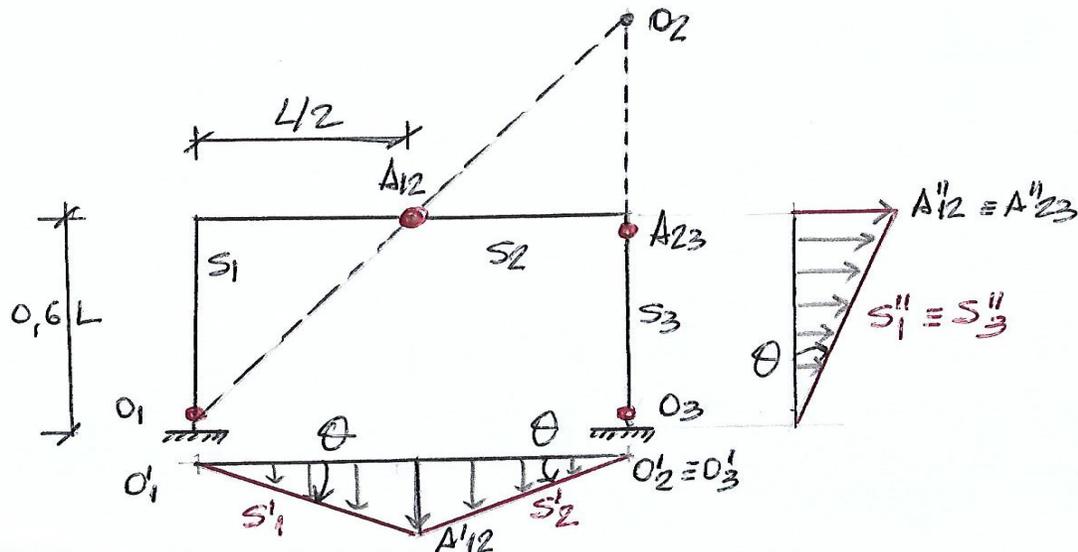
MECANISMO COMBINADO



$$\Sigma W=0 = P_{cin3} \cdot \theta \cdot 0,6L + 2P_{cin3} \cdot \theta \cdot \frac{L}{2} - 4M_p\theta - 2 \cdot 2M_p\theta$$

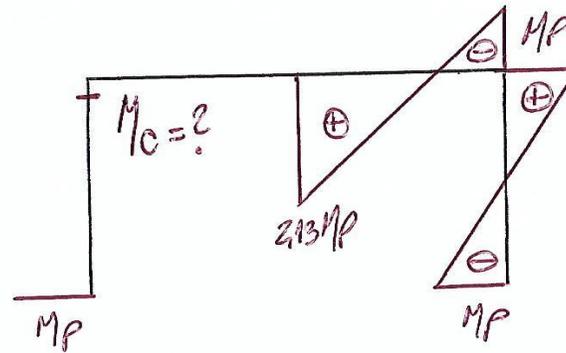
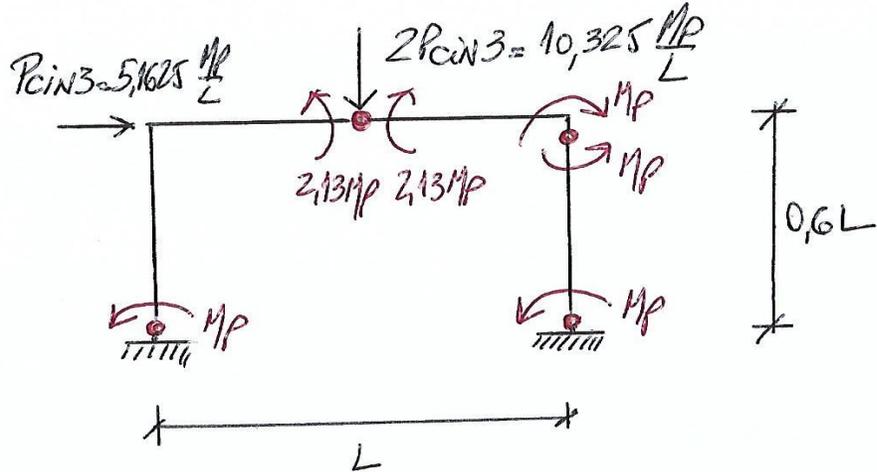
$$P_{cin3} = \frac{(4+4,26)}{(0,6+1)} \frac{M_p}{L} = \frac{8,26}{1,6} \frac{M_p}{L} = \underline{\underline{5,1625 \frac{M_p}{L}}}$$

$$P_{cin3} = \underline{\underline{5,1625 \frac{M_p}{6} = 0,86 M_p}}$$



ESTABILIDAD III - CURSO 1 - CLASE 21 - 13/07/2020 – Análisis Elasto - Plástico

VERIFICACIÓN DE ADMISIBILIDAD PLÁSTICA CON PCIN3 (CONDICIÓN DE CARGA ESTÁTICA)



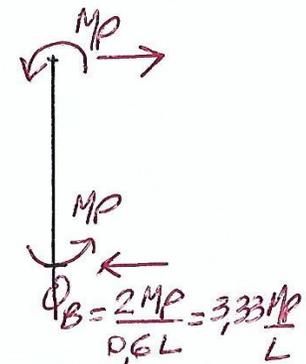
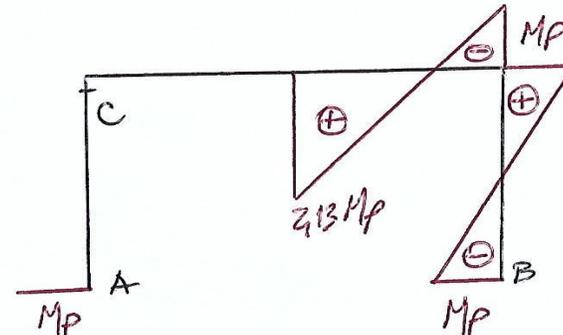
Para equilibrar carga horizontal

$$Q_A = PCIN3 - Q_B = 5,1625 \frac{MP}{L} - 3,3333 \frac{MP}{L} = 1,8292 \frac{MP}{L}$$

$$Q_A = \frac{M_C + MP}{0,6L}$$

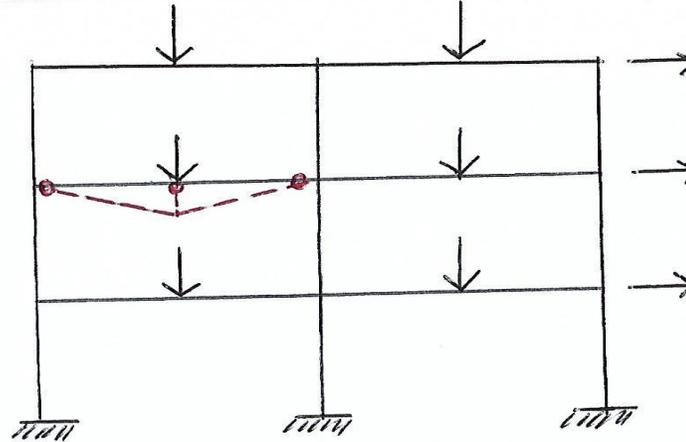
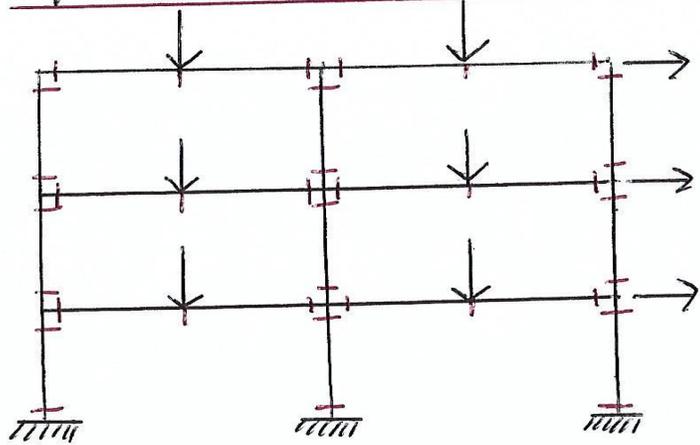
$$M_C = Q_A \cdot 0,6L - MP = 1,098 MP - MP = 0,098 MP < MP ; \text{VERIFICA!}$$

$$\therefore PCIN3 \text{ es } P_{ESTATICA} \Rightarrow \boxed{P_{COLAPSO} = PCIN3 = 0,86 MP}$$



ESTABILIDAD III - CURSO 1 - CLASE 21 - 13/07/2020 – Análisis Elasto - Plástico

Método de combinación de mecanismos (NEAL y SYMONDS - 1952)



Mecanismo de Viga

$a = 36$ rótulas potenciales
 $GH = 4 \times 3 + 6 = 18$ Grado de hiperestaticidad

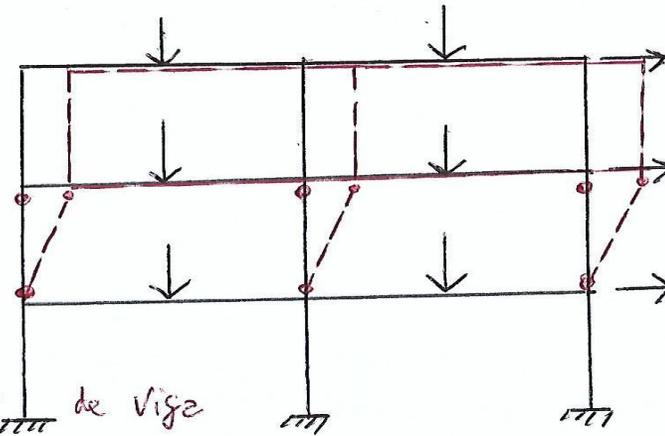
$M = a - GH$ Ecuaciones de equilibrio que relacionen los valores de los momentos flexores en las rótulas potenciales con la magnitud de las cargas aplicadas.

$$M = m_v + m_p + m_n$$

$m_v = 6$ Ecuaciones de equilibrio de vigas $\rightarrow 6$ Mecanismos de Viga

$m_p = 3$ Ecuaciones de equilibrio de piso $\rightarrow 3$ Mecanismos de Piso

$m_n = 9$ Ecuaciones de equilibrio de nudos $\rightarrow 9$ Mecanismos de Nudo

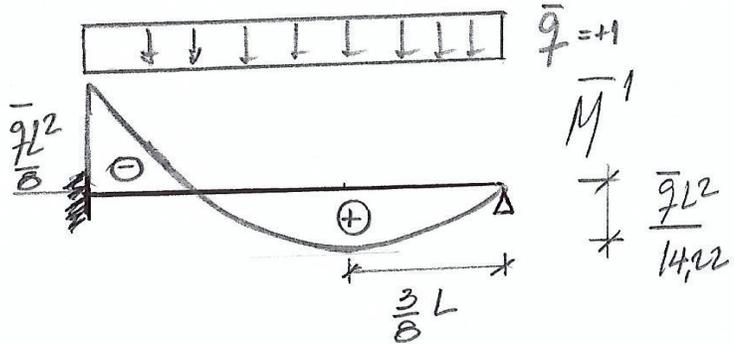


Mecanismo de Piso

ESTABILIDAD III - CURSO 1 - CLASE 21 - 13/07/2020 – Análisis Elasto - Plástico

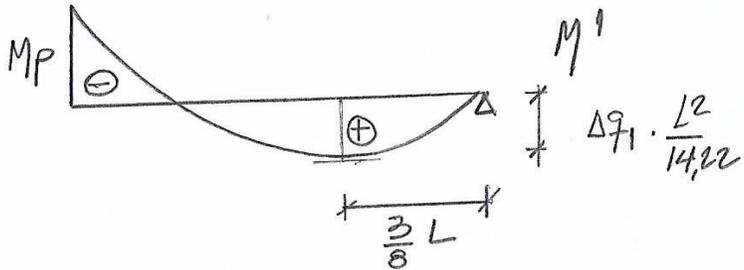
CARGAS DISTRIBUIDAS

→ Posición de Rótulas Plásticas?



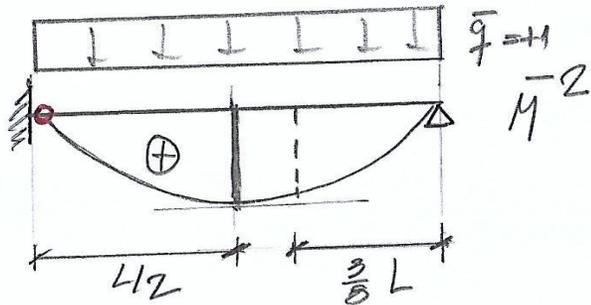
1º ESCALÓN DE CARGA

$$\Delta q_1 = \frac{M_p}{\frac{L^2}{8}} = 8 \frac{M_p}{L^2}$$

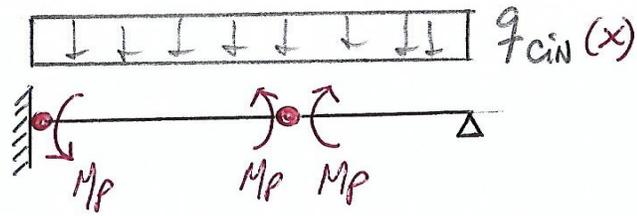


2º ESCALÓN DE CARGA

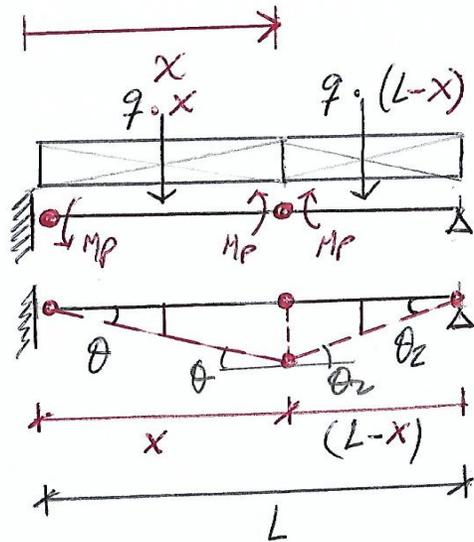
?



ESTABILIDAD III - CURSO 1 - CLASE 21 - 13/07/2020 – Análisis Elasto - Plástico



La 2ª rótula plástica estará en la abscisa x que minimice la carga cinemática



$$q = q \sin(x)$$

$$\theta_2 = \frac{\theta \cdot x}{(L-x)}$$

$$\delta W = 0 = q \cdot x \cdot \theta \cdot \frac{x}{2} + q \cdot (L-x) \cdot \theta_2 \cdot \frac{(L-x)}{2} - 2 M_p \theta - M_p \cdot \theta_2$$

$$q \frac{x^2}{2} \theta + q \frac{x}{2} (L-x) \theta = 2 M_p \theta + M_p \frac{x}{(L-x)} \theta$$

$$q \frac{xL}{2} = \frac{2(L-x) + x}{(L-x)} M_p$$

$$q = \frac{2 M_p}{L} \left[\frac{2}{x} + \frac{1}{(L-x)} \right] = \frac{2 M_p}{L} \left[2 \cdot x^{-1} + (L-x)^{-1} \right]$$

ESTABILIDAD III - CURSO 1 - CLASE 21 - 13/07/2020 – Análisis Elasto - Plástico

$$\frac{d\eta}{dx} = 0 = 2 \frac{MP}{L} \left[2 \cdot x^{-2} + (-1)(L-x)^{-2} (-1) \right]$$

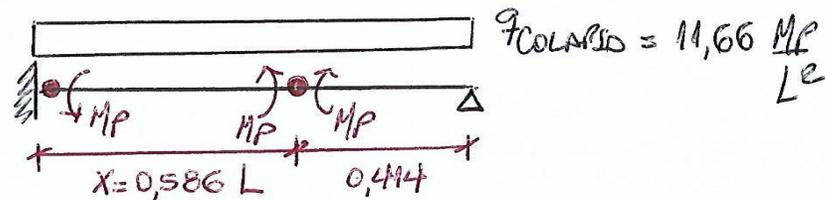
$$2x^{-2} - (L-x)^{-2} = 0 \Rightarrow \frac{2}{x^2} = \frac{1}{(L-x)^2}$$

$$2(L-x)^2 = x^2 \rightarrow 2(L^2 - 2xL + x^2) = x^2$$

$$x^2 - 4Lx + 2L^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{4L \pm \sqrt{(4L)^2 - 4 \cdot 2 \cdot L^2}}{2} = 2L \pm 1,414L$$

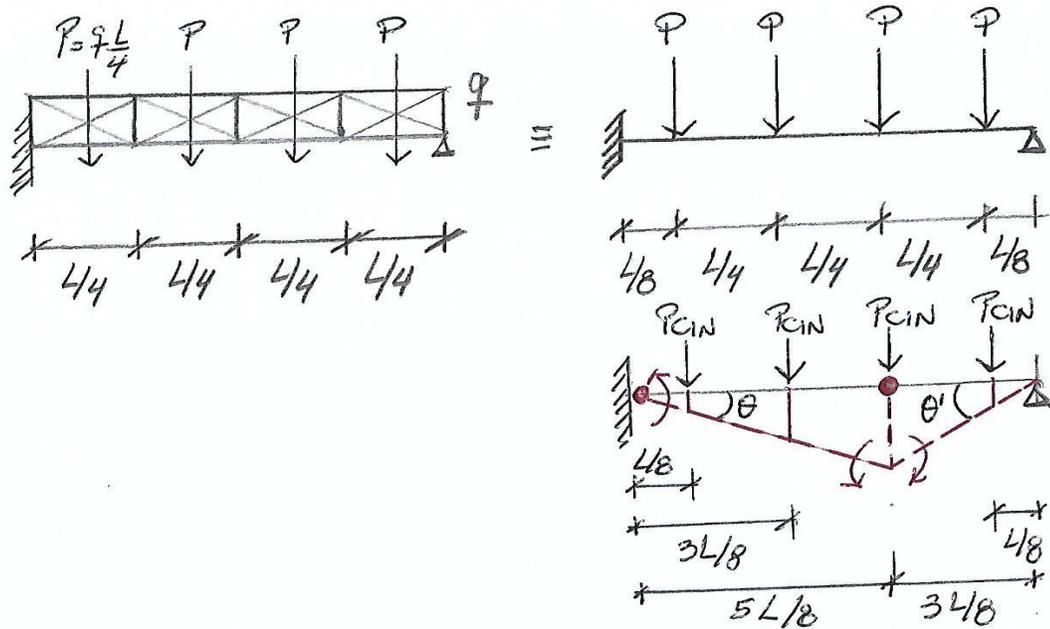
$$\therefore \boxed{x = \begin{cases} 3,414L \rightarrow \text{se descarta (fuera de la viga)} \\ 0,586L \end{cases}}$$

$$\boxed{\eta_{\text{COLAPSO}} = \eta_{\text{CIN}}^{\text{mínima}}(x) = \frac{2MP}{L} \left[\frac{2}{0,586L} + \frac{1}{(L-0,586L)} \right] = \boxed{11,66 \frac{MP}{L^2}}}$$



ESTABILIDAD III - CURSO 1 - CLASE 21 - 13/07/2020 – Análisis Elasto - Plástico

APROXIMACIÓN CON CARGAS CONCENTRADAS ESTÁTICAMENTE EQUIVALENTES



$$\theta' = \frac{\theta \cdot \frac{5}{8} L}{\frac{3}{8} L} = \frac{5}{3} \theta$$

$$\sum W = 0 = P_{cin} \cdot \theta \cdot \left[\frac{L}{8} + 3 \frac{L}{8} + 5 \frac{L}{8} \right] + P_{cin} \cdot \left(\frac{5}{3} \theta \right) \cdot \frac{L}{8} - 2 M_p \cdot \theta - M_p \cdot \frac{5}{3} \theta$$

$$P_{cin} = \frac{\frac{11}{3} M_p}{\frac{4}{3} L} = \frac{11}{4} \frac{M_p}{L} = \frac{q \cdot L}{4} \Rightarrow \boxed{q_{cin} = 11 \frac{M_p}{L^2}} \approx q_{colapso}$$

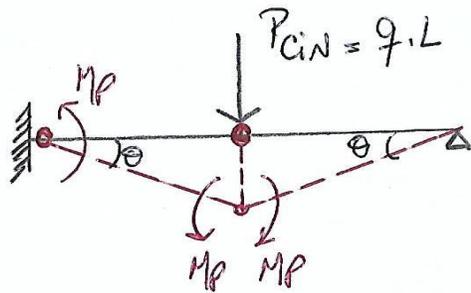
ESTABILIDAD III - CURSO 1 - CLASE 21 - 13/07/2020 – Análisis Elasto - Plástico

Hay 2 errores que se compensan entre sí:

- Error por exceso: Las cargas concentradas generan M más grandes que las distribuidas

- Error por defecto: El mecanismo de colapso No es el verdadero
 ($x = 0,586 L \neq \frac{5}{8} L = 0,625 L$)

Si hubieramos usado una sola carga concentrada:



$$\sum W = 0 = P_{cin} \cdot \theta \cdot \frac{L}{2} - 3M_p \cdot \theta \Rightarrow P_{cin} = 6 \frac{M_p}{L} = q_{cin} \cdot L$$

$$\therefore q_{cin} = 6 \frac{M_p}{L^2} \leftarrow \text{Valor MUY BAJO} \text{ (antieconómico)}$$

ESTABILIDAD III - CURSO 1 - CLASE 21 - 13/07/2020 – Análisis Elasto - Plástico

BIBLIOGRAFIA ANÁLISIS ELASTO-PLÁSTICO

- "ANÁLISIS ESTRUCTURAL" - Tomo 2 Cap. 10 "Análisis Límite de Estructuras"
Autores: BIGNOLI, CARRETERO, FIORAVANTI, GVARAGNA
Ed: ATEC (BUENOS AIRES)
- "CIENCIA DE LA CONSTRUCCIÓN" - Tomo 3 Cap. 30 "La Plasticidad"
Autor: O. Belluzzi
Ed: AGUILAR (MADRID)
- "ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS - Un estudio histórico" -
Autor: Jacques Heyman
Ed: ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA DE MADRID
- "CÁLCULO DE ESTRUCTURAS" - Tomo 2
Autor: RAMÓN ARGÜELLES MÚÑEZ

ESTABILIDAD III - CURSO 1 - CLASE 21 - 13/07/2020 – Análisis Elasto - Plástico

ESTABILIDAD III - CURSO 1 - CLASE 21 - 13/07/2020 – Análisis Elasto - Plástico